Vavřinec Jelínek

O přesnosti hodnot nabytých průkladem praktických tabulek mathematických

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 21 (1892), No. 1, 31--39

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121508

v té části řeky, kde jest spád její malý. Vrchol vysoké rozlévající se vody postupuje tím pomaleji, čím bývá vyšší, takže mívá voda v proudu říčném větší rychlosť a dostává se dříve do moře než vrchní voda při velkých povodních.

Velkou vodu zářijovou lze stopovati ještě v té části Labe, jež podlehá účinkům přílivu a odlivu mořského; v Zollenspiekeru 25 *km* nad Hamburkem příchodem jejím zmizely úplně rozdíly mezi přílivem a odlivem, v Hamburku a v Cuxhavenu se rozdíly tyto zmenšily. Poslední zbytky velké vody z Čech dostaly se do moře koncem září a začátkem října.*)

Voda spadlá začátkem září 1890 v Čechách *vrátila se ještě během téhož měsíce nazpět do moře, vykonavši při tom oběh, jenž zůstane ještě dlouho památným.* Byvši přinesena proudy vzduchovými do země v podobě páry od severu, srážela se zde hojně silným ochlazením zvláště na výšinách pokrajních, a stékala velmi rychle přeplňujíc potoky, rybníky a řeky, valíc se mocným proudem do moře nazpět.

O přesnosti hodnot nabytých průkladem praktických tabulek mathematických.

Napsal

Vavřinec Jelínek,

professor v Novém Městě u Vídně.

Při technických výpočtech dobře sloužívají praktickým počtářům ode dávna mathematické tabulky, obsahující druhou a třetí mocninu i odmocninu a jiné hodnoty čísel nanejvýše trojmístných. Bývají proto tabulky takové v různém rozsahu připojeny k technickým knížkám kapesním i k tak zvaným technickým kalendářům. Za příčinou pohodlí a rychlejšího vypočítávání číselných hodnot seznamují se i žáci nynějších vyšších škol průmyslových s podobnými tabulkami, jak tomu nasvědčuje „Sbírka tabulek a vzorců", již v Praze r. 1889 sestavil prof.

---

*) Dle měření vody na dolním Labi konaných staveb. úřadem hamburským: *Baudeputation, Section für Strom- u. Hafenbau.*

F. Červený a V. Řehořovský. Tím nabyly tabulky tyto větší důležitosti.

Část takových tabulek vypadá asi takto:

n	$1:n$	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[2]{n}$	πn	$\frac{1}{4}\pi n^2$
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
205	487805	4 20 25	8 615 125	143178	589637	644·03	3 30 06·36
206	485437	4 24 36	8 741 816	143527	590594	647·17	3 33 29·16
207	483092	4 28 49	8 869 743	143875	591548	650·31	3 36 53·53
208	480769	4 32 64	8 990 912	144222	592499	653·45	3 39 79·47
209	478469	4 36 81	9 129 329	144568	593447	656·59	3 43 06·98
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
785	127389	61 62 25	483 736 625	280179	922479	2466·15	48 39 81·98
786	127226	61 77 96	485 587 656	280357	922871	2469·29	48 52 15·84
787	127065	61 93 69	487 443 403	280535	923262	2472·43	48 64 51·28
788	126904	62 09 44	489 303 872	280713	923653	2475·58	48 76 88·28
789	126743	62 25 21	491 169 069	280891	924043	2478·72	48 89 26·85
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.

Pro hodnoty $1:n$, $\sqrt{n}$, $\sqrt[3]{n}$ udává tato ukázka pouze pořadí číslic, místní jejich hodnotu stanoví počtář snadno. Pro přehlednosť jsou číslice hodnot n^2, n^3 a $\frac{1}{4}\pi n^2$ seřaděny ve skupiny.

Je-li číslo n jedno- až trojčíselné, nacházíme v tabulkách ovšem přesné pořadí číslic pro hledanou hodnotu, má-li však číslo N více než tři číslice, stanovíme pořadí číslic pro některou hodnotu dle pravidla o průkladu arithmetických řad, jakoby hodnoty v tabulkách úměrně se měnily s číslem n, čemuž arciť mimo πn tak není. Bývají tedy výsledky průkladem nabyté chybné neb alespoň pochybné. Při průkladu pokládáme totiž nejvyšší (z pravidla) tři číslice čísla N jakožto číslo celistvé n, a následující číslice jakožto desetinný zlomek a.

Znamená-li D přírůstek neb úbytek některé hodnoty v tabulkách, příslušný přírůstku čísla n o 1, a je-li d přirůstek neb úbytek téže hodnoty, příslušný přirůstku čísla n o a desetinných jednotkách, najdeme, předpokládajíce správnosť úměry $d : \mathrm{D} = a : 1$,

že
$$d = \mathrm{D}a.$$

Opravu tuto Da přičteme ku hodnotě pro n, neb odečteme od ní, řídíce se dle toho, je-li hodnota pro $(n+1)$ větší neb menší než hodnota pro n. Místní hodnotu nabytého pořadí číslic stanovíme dle místní hodnoty číslic n v čísle N.

Meze pro správnosť opraveného pořadí číslic vyšetříme v následujících řádkách pro hodnoty každého sloupce tabulky zvlášť.

1. *Zvratná hodnota.*

Dle nahoře uvedeného rozkladu čísla $\mathrm{N} = n + a$ jest úplná jeho hodnota převratná

$$1 : \mathrm{N} = 1 : (n + a) = \frac{1}{n} - \frac{a}{n(n+a)}.$$

Že však místo $\frac{a}{n(n+a)}$ od hodnoty $\frac{1}{n}$, vyňaté z tabulek, odčítáme opravu

$$\mathrm{D}a = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) a,$$

jest výsledek chybný o

$$x = \frac{a}{n(n+a)} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) a = \frac{a(1-a)}{n(n+1)(n+a)}.$$

Opomineme-li v čítateli posledního zlomku menšitele a, a ve jmenovateli sčítance 1 a a, jakožto čísel poměrně malých, bude hledaná chyba

$$x < \frac{a}{n^3}.$$

Chyba ta vyskytuje se teprvé na tolikátém místě desetinném v $1 : \mathrm{N}$, kolik míst má mocnina n^3, stojící v třetím sloupci tabulky na řádce čísla n. Pro čísla trojmístná dává tabulka zvratnou hodnotu osmi desetinnými místy; je-li tedy hodnota n^3 devítimístná, bude celé pořadí číslic v $1 : \mathrm{N}$ správné.

Kolik však míst v n^3 schází do devíti, tolik nejníže stojících číslic proložené hodnoty dlužno vynechati, jelikož jsou chybné.

$$\begin{array}{llr}
1. & 1:786{\cdot}4 & =127226 \\
 & \mathrm{D}a=161.0{\cdot}4 & =\quad -64 \\
\hline
 & & 0{\cdot}00127162
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llr}
2. & 1:2{\cdot}0536 & =487805 \\
 & \mathrm{D}a=2368.0{\cdot}36 & =-\begin{cases}710\\142\end{cases} \\
\hline
 & & 0{\cdot}486953
\end{array}$$

V příkladě 1. je celé pořadí číslic správné, ježto $n^3 = 786^3$ má devět míst. V příkladě 2. jsou poslední dvě číslice pochybné; neboť $n^3 = 205^3$ má toliko sedm číslic. Správné jest

$$1:2{\cdot}0536 = 0{\cdot}486950.$$

2. *Druhá mocnina.*

Poněvadž je $N^2 = (n + a)^2 = n^2 + 2na + a^2$, a ježto interpolujíce přičítáváme ku n^2 opravu

$$\mathrm{D}a = [(n + 1)^2 - n^2]\, a = 2na + a \text{ místo } 2na + a^2,$$

pochybíme o

$$x = 2na + a - (2na + a^2) = a(1 - a),$$

kterážto chyba, opomineme-li menšitele a, bude

$$x < a < 1.$$

Je tedy celé pořadí číslic v opravené druhé mocnině správné. Na př.

$$\begin{array}{llr}
3. & 78{\cdot}852^2 & = 62\,09\,44 \\
 & \mathrm{D}a = 1577.0{\cdot}52 & = +\begin{cases}7\,89\\ 31\end{cases} \\
\hline
 & & 62\,17{\cdot}64
\end{array}$$

3. *Třetí mocnina.*

Úplná třetí mocnina čísla N, rozloženého ve dvojčlen, by byla

$$N^3 = (n + a)^3 = n^3 + 3n^2a + 3na^2 + a^3.$$

Vypíšeme-li však z tabulek jen n^3 a doplníme-li mocninu tuto opravou

$$\mathrm{D}a = [(n + 1)^3 - n^3]\, a = 3n^2a + 3na + a,$$

bude výsledek vzdálen od správné hodnoty o

$x = 3n^2a + 3na + a - (3n^2a + 3na^2 + a^3) = 3na(1-a) + a(1-a^2).$
Jelikož stanoviti hodláme toliko nejvyšší místo, v kterém chyba se naskytne, můžeme členu $a(1-a^2)$, jakožto nepatrného u porovnání s členem prvým, opominouti; vynecháme-li v prvém členu ještě menšitele a, jest chyba

$$x < 3na,$$

kde $n < 10^3$ a $a < 1$, tak že nabudeme

$$x < 3.10^3$$

t. j. chyba vězí v celé skupině nejnižších tří číslic takto interpolované třetí mocniny. Vypočítáme tedy toliko obě vyšší skupiny číslic třetí mocniny, berouce zřetel k nejnižší skupině v n^3 a při stanovení rozdílu D i v $(n+1)^3$ pouze pro opravu skupiny vyšší. Na př.

$$\begin{array}{lr} 4. \qquad 7{\cdot}8509^3 = & 483\,737 \\ \mathrm{D}a = 1851.0{\cdot}09 = & +167 \\ \hline & 483{\cdot}904 \end{array}$$

4. *Druhá odmocnina.*

Druhá odmocnina čísla N, rozvedeného ve dvojčlen, jest

$$\sqrt{\mathrm{N}} = \sqrt{n+a} = \sqrt{n} + \frac{a}{2\sqrt{n}} - \frac{a^2}{8n\sqrt{n}} + \ldots$$

a oprava při průkladu jest

$$\mathrm{D}a = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})a = \frac{a}{2\sqrt{n}} - \frac{a}{8n\sqrt{n}} + \ldots$$

Členů tečkami tuto naznačených, avšak vynechaných lze pro nepatrnou jejich hodnotu opominouti. Přičteme-li tedy ku $\sqrt{n}$ opravu Da místo $\dfrac{a}{2\sqrt{n}} - \dfrac{a^2}{8n\sqrt{n}}$, bude v součtu pochybeno o

$$x = \frac{a-a^2}{8n\sqrt{n}} = \frac{a}{8n\sqrt{n}}(1-a),$$

a zanedbáme-li zase menšitele a, nastane

$$x < \frac{a}{8n\sqrt{n}}, \text{ čili } x < \frac{a\sqrt{n}}{8n^2}.$$

Byť bylo číslem n největší trojmístné číslo a $a = 0{\cdot}99\ldots$, předce zůstane $\frac{a\sqrt{n}}{8} < 4$, pročež vždy

$$x < \frac{4}{n^2}.$$

Chyba v opravené druhé odmocnině může tedy se vyskytnouti teprve na tolikátém desetinném místě, kolik míst má n^2. Je-li n trojmístné, dává tabulka pro $\sqrt{n}$ čtyry desetinná místa, a že pak n^2 je nejméně pětimístné, bude v tomto případě opravená $\sqrt{N}$ vždy úplně správná. (O odmocňování, je-li n pouze jedno- neb dvoumístné, viz níže.) Na př.

$$
\begin{array}{llr}
5. & \sqrt{7{\cdot}8746} = & 2\,80535 \\
 & Da = 178.0{\cdot}46 = & +\left\{\begin{matrix}71\\11\end{matrix}\right. \\
\hline
 & & 2{\cdot}80617
\end{array}
$$

5. *Třetí odmocnina.*

Srovnáme-li tuto jako předešle druhý a třetí člen odmocniny

$$\sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{n+a} = \sqrt[3]{n} + \frac{a\sqrt[3]{n}}{3n} - \frac{a^2\sqrt[3]{n}}{9n^2} + \ldots$$

s opravou

$$Da = (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})\,a = \frac{a\sqrt[3]{n}}{3n} - \frac{a\sqrt[3]{n}}{9n^2} + \ldots,$$

shledáme, že dosazením Da na místo druhého a třetího členu v $\sqrt[3]{N}$, vzniká ve výsledku chyba

$$x = \frac{a\sqrt[3]{n}}{9n^2}(1-a)$$

a po vypuštění menšitele a

$$x < \frac{a\sqrt[3]{n}}{9n^2}.$$

Dejme tomu, že by bylo $a = 0{\cdot}99\ldots$, a n v čítateli se vyrovnalo největšímu číslu trojmístnému, což je případ nejnepříznivější, bude činitel $\frac{a\sqrt[3]{n}}{9}$ téměř roveň 1. Jest tedy

$$x < \frac{1}{n^2}.$$

Chyba v třetí odmocnině vyskytuje se tedy zase teprve na tolikátém místě desetinném, kolik míst má n^2, a že tabulka pro celistvé n dává v $\sqrt[3]{n}$ pět míst desetinných, bude poslední číslice opravené třetí odmocniny nesprávná, je-li trojmístné $n < 300$; je-li však $n > 300$, budou všechny číslice této odmocniny správné. Na př.

6. $\sqrt[3]{0{\cdot}20832} = 592499$

$$Da = 948.0{\cdot}32 = + \begin{cases} 284 \\ 19 \end{cases}$$

$$\overline{0{\cdot}592802}$$

7. $\sqrt[3]{787{\cdot}049} = 923262$

$$Da = 391.0{\cdot}049 = + \begin{cases} 16 \\ 3 \end{cases}$$

$$\overline{9{\cdot}23281}$$

Výsledek v příkladě 6. je v poslední číslici chybný, načež upozorňuje $n < 300$. Přesně jest $\sqrt[3]{0{\cdot}20832} = 0{\cdot}592803$. Výsledek v příkladě 7. jest úplně správný; jestiť $n > 300$.

Je-li první část vícečísličného odmocněnce jedno- neb dvoumístná, pokládáme jej jakožto mocninu $(n + a)^2$ neb $(n + a)^3$ a vyhledáme v tabulkách nejbližší mocninu menší, dle níž stanovíme první část n kořene N. Druhé části a kořene nabudeme z úměry $d : \mathrm{D} = a : 1$, svrchu uvedené, v níž D znamená rozdíl obou hodnot pro $(n + 1)$ a pro n, d pak nadbytek daného odmocněnce nad mocninu v tabulkách vyhledanou.

Z důvodu, při třetí mocnině naznačeného, máme zřetel, hledajíce třetí odmocninu, toliko k vyšším dvěma skupinám číslic v odmocněnci. Taktéž opomíjíme nejnižší skupiny číslic v mocnině z tabulek vypsané a v rozdílu D. Na př.

8. $\sqrt{62{\cdot}114_{0}} = 7{\cdot}88125$

$$\sqrt{n^2} = \sqrt{620944} = 788$$

$$a = d : \mathrm{D} = 196 : 1577 = 0{\cdot}125.$$

9. $\sqrt[3]{8{\cdot}7943_{00}} = 2{\cdot}0641$

$$\sqrt[3]{n^3} = \sqrt[3]{8741_{816}} = 206$$

$$a = d : \mathrm{D} = 52 : 128 = 0{\cdot}41$$

Rozumí se samo sebou, že výsledky takto vyvozené jsou zcela správné.

6. *Obvod kruhu.*

Ježto pro obvody kruhů přesně platí úměra $d : \mathrm{D} = a : 1$, budou průkladem vypočítané obvody úplně správny. Ostatně lze obvod $\pi\mathrm{N} = \pi(n + a)$ vzíti přímo z tabulek jakožto součet dvou obvodů pohodlněji. Obvod πa snížíme o tolik míst, kolik míst má a. Na př.

10. Pro $\mathrm{N} = 78.9206$ najdeme

$$\begin{aligned} \pi n &= 247872 \\ \pi a &= \quad\ \ 64717 \\ \hline \pi\mathrm{N} &= 247{\cdot}937 \end{aligned}$$

7. *Plocha kruhu.*

Dle vzorce

$$\frac{1}{4}\pi\mathrm{N}^2 = \frac{1}{4}\pi(n + a)^2 = \frac{1}{4}\pi(n^2 + 2na + a^2)$$

přibude plochy kruhu o $\frac{1}{4}\pi(2n + a)\,a$, prodloužíme-li jeho průměr n o a. Při průkladu nahražujeme však tento přírůstek opravou

$$\mathrm{D}a = \frac{1}{4}\pi[(n + 1)^2 - n^2]a = \frac{1}{4}\pi(2n + 1)a$$

a nabýváme takto výsledku s chybou

$$x = \frac{1}{4}\pi(2n + 1)a - \frac{1}{4}\pi(2n + a)a = \frac{1}{4}\pi a(1 - a).$$

Opomineme-li menšitele a, bude

$$x < \frac{1}{4}\pi a < \frac{\pi}{4}.$$

Jelikož tabulka dává pro celistvé n plochu kruhu přesně i setinami, naskytne se tato chyba toliko v nejnižších dvou místech opravené plochy pro kterékoli vícemístné N. Jest tedy vynechati tato dvě místa nejen v $\frac{1}{4}\pi n^2$, nýbrž i v rozdílu D. Na př.

11. Pro $N = 78{\cdot}6\underline{4}$ jest $\frac{1}{4}\pi n^2 = 48\,52\,16$

$$Da = 123\underline{5}.0{\cdot}4 = +4\,94$$

$$\frac{1}{4}\pi N^2 = 48\,57{\cdot}10$$

Abychom obdrželi plochu kruhu o vícemístném průměru $N = n + a$, vyjádřenou tolika správnými číslicemi, kolik jich má plocha $\frac{1}{4}\pi n^2$, udaná v tabulkách, řiďme se při vypočítávání dle vzorce

$$\frac{1}{4}\pi N^2 = \frac{1}{4}\pi(n + a)^2 = \frac{1}{4}\pi n^2 + \pi n.\frac{a}{2} + \frac{1}{4}\pi a^2.$$

Plochy $\frac{1}{4}\pi n^2$ a $\frac{1}{4}\pi a^2$ vypíšeme přímo z tabulek, snížívše hodnotu $\frac{1}{4}\pi a^2$ o dvakrát tolik míst, co jich má a. Plochu $\pi n.\frac{a}{2}$ najdeme z obvodu πn stojícího vedle a na řádce plochy $\frac{1}{4}\pi n^2$.

12. Pro $N = 788.\underline{2}08$ jest $\frac{1}{4}\pi n^2 = 48\,76\,88\,28$

$$\pi n.\frac{a}{2} = 247\underline{5}5\underline{8}.0{\cdot}104 = +\begin{cases} 2\,47\,56 \\ 9\,90 \end{cases}$$

$$\frac{1}{4}\pi a^2 = 3\;39\,79\,47$$

$$\frac{1}{4}\pi N^2 = 48\,79\,45{\cdot}77$$

Hledáme-li opačně průměr kruhu podle jeho plochy, zkrátíme neb doplníme řadu číslic v dané ploše na tři skupiny a opomineme obou desetinných míst v hodnotách tabulkami daných.

Zřejmo, že praktické tyto tabulky co do pohodlí při vypočítávání i co do přesnosti výsledků se vyrovnají, arciť jen v rozsahu omezeném, pětimístným tabulkám logarithmickým, ano že je i předčí.