Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vladimír Mašek

O kuželosečkách na jisté ploše sborcené

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 4-5, 382--411

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121503

tyčných c, d. Opišme tedy poloměrem $\overline{of}$ kružnici, která protne řídící přímku R v bodech 6, 7, a těmito veďme rovnoběžky ku A; tyto pak protnou kollineační osu O v bodech c, d, jež jsou společnými body daných parabol; ostatní dva $a \equiv b$ jsou v nekonečnu na $A \parallel A'$. Posléze tečny sestrojené z bodu s ku parabole P (známá konstrukce elementárná) jsou zároveň tečnami paraboly P'; vnitřní tečny společné v našem případě splývají s přímkou úběžnou.

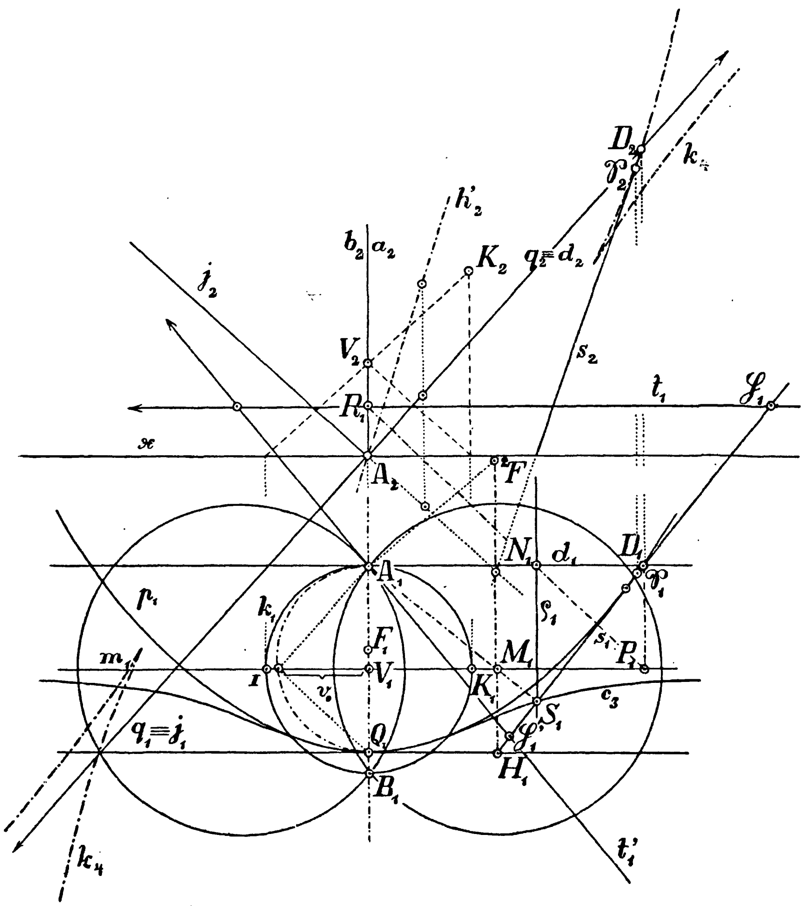
O kuželosečkách na jisté ploše sborcené.

Napsal **Vladimír Mašek**, assistent české techniky v Brně.

1. V pojednání „O ploše sborcené naplněné osami křivosti příslušnými některémů společnému bodu určité soustavy šroubovic", uveřejněném v Rozpravách České akademie roč. XXIV., uvažovali jsme plochu sborcenou S^3 určenou následovně: Dán jest svazek rotačních válců procházejících přímkami a a b kolmými k průmětně π. (Obr. 1.) Průmětna π nechť protíná tento svazek rotačních válců ve svazku kružnic o základních bodech A_1 a B_1. Na každém z těchto válců vytkněme šroubovici levou vycházející z bodu A_1 o dané, všem šroubovicím společné, výšce závitu v. Osy křivosti těchto šroubovic příslušné bodu A_1 naplňují pak plochu S^3.

Uveďme některé vlastnosti plochy S^3, jež jsou ve výše zmíněném pojednání odvozeny. Bylo dokázáno, že plocha S^3 jest sborcenou plochou 3. řádu. Rovina nekonečně vzdálená protíná plochu v přímce u_∞, jež jest dána směrem roviny nárysné a v kuželosečce ε_∞. Označme $š$ šroubovici ležící na rotačním válci procházejícím nejmenší kružnicí k_1 daného svazku kružnic a budiž bod V vrcholem řídícího kužele této šroubovice proloženým kružnicí k_1. Průmětna π protíná plochu S^3 v *Sluse*-ově konchoidě c_3, jejímž dvojným bodem jest bod A_1 a asymptotou symetrála m_1 bodů A_1 a B_1. Bod Q_1 křivky c_3 ležící na spojnici $\overline{A_1B_1}$ sestrojíme na základě relace $\overline{A_1V_1} \cdot \overline{V_1Q_1} = v_0^2$, značí-li v_0 redukovanou výšku závitu daných šroubovic. Dále bylo odvozeno, že řídícím kuželem plochy S^3 jest kužel orthogonálný protínající průmětnu π v kružnici. Označme I a K_1 průsečíky přímky m_1

s kružnicí k_1. Proložíme-li řídící kužel plochy S^3 kružnicí k_1, jest jeho vrchol K průsečíkem přímky procházející bodem K_1 kolmo ku π s povrchovou přímkou $\overline{1V}$ řídícího kužele šroubovice š. Dvojná řídící přímka d plochy S^3 prochází bodem A_1 a jest rovno-



Obr. 1.

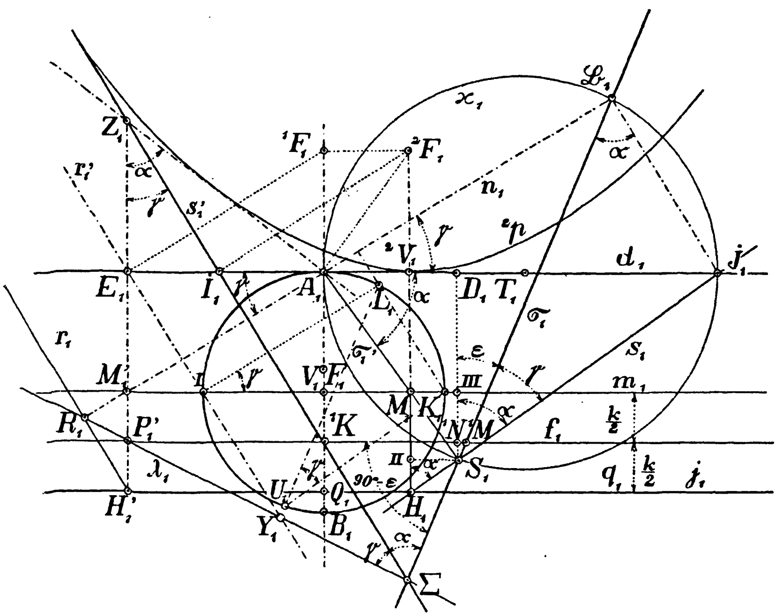
běžná s přímkou $\overline{1K}$ řídícího kužele plochy. Jednoduchá řídící přímka j plochy S^3 prochází bodem Q_1 a nachází se v rovině rovnoběžné s rovinou nárysnou a jest vzhledem ku řídící přímce d mimoběžkou kolmou. Půdorysné průměty povrchových přímek plochy S^3 obalují parabolu p_1 o vrcholu B_1 a ohnisku F_1 ležícím na spojnici $\overline{A_1B_1}$. Značí-li r poloměr kružnice k_1, jest $\overline{Q_1F_1} = r$. Asymptotickou plochou plochy S^3 jest rozvinutelná plocha tečen určité kubické paraboly.

Vedeme-li libovolnou povrchovou přímkou s plochy S^3 rovinu, protíná tato plochu obecně v hyperbole. Pouze rovina procházející zvolenou přímkou kolmo k π protíná plochu v parabole o ose kolmé k π a dále roviny vedené zvolenou přímkou a některou přímkou řídící protínají plochu v kuželosečkách degenerovaných.

2. Uvažujme nyní asymptoty všech ∞^2 kuželoseček na ploše S^3 ležících. Uvedli jsme, že nekonečně vzdálená rovina protíná plochu S^3 v přímce u_∞ a v kuželosečce ε_∞, jež jest stanovena orthogonálným řídícím kuželem plochy. Tvoří tudíž asymptoty všech kuželoseček na ploše S^3 ležících dvě kongruence paprskové. Prvá kongruence jest souhrnem všech tečen plochy S^3 podél přímky u_∞ a druhá souhrnem všech tečen plochy podél kuželosečky ε_∞. Prvá kongruence jest zřejmě kongruencí lineární, jejíž osy splývají v přímce u_∞. Zvolíme-li libovolnou rovinu procházející přímkou u_∞ plochy S^3, jest tato rovina rovnoběžná s rovinou nárysnou a uvažujeme-li v této rovině všechny přímky rovnoběžné se směrem udávajícím bod, v němž se tato rovina plochy S^3 dotýká, obdržíme jednotlivé paprsky této lineární kongruence. Vytkneme-li dále v jednotlivých oskulačních rovinách křivky vratu asymptotické plochy všechny přímky rovnoběžné vždy s příslušnou tečnou křivky vratu asymptotické plochy, jsou tyto přímky paprsky kongruenčními kongruence tečen plochy S^3 podél kuželosečky ε_∞.

Bylo uvedeno, že křivkou vratu asymptotické plochy jest kubická parabola. Poněvadž libovolným bodem v prostoru procházejí tři oskulační roviny této kubické paraboly a v každé z nich nachází se jeden kongruenční paprsek bodem zvoleným procházející, jest kongruence právě uvažovaná 3. řádu. Poněvadž řídícím kuželem kubické paraboly jest kužel 2. stupně, v našem případě kužel orthogonálný, jsou obecně s každou rovinou dvě přímky tohoto kužele rovnoběžné. S těmito přímkami rovnoběžné kongruenční paprsky naplňují dvě oskulační roviny uvažované kubické paraboly. Leží tudíž v libovolné rovině 2 paprsky kongruenční, pročež jest naše kongruence 2. třídy. Poněvadž paprsky kongruenční procházející určitým bodem kuželosečky ε_∞ leží vždy v určité rovině oskulační kubické paraboly, jest kuželosečka ε_∞ geometrickým místem singulárních bodů této kongruence.

3. Uvažujme nyní některé sborcené plochy 3. řádu obsažené v naší kongruenci [3, 2]. Zvolme (obr. 2.) základní body A_1 a B_1 z počátku uvedeného svazku kružnic, jich symetrálu m_1 a prů-



Obr. 2.

měty j_1 a d_1 přímek řídících. Veďme bodem A_1 paprsek protínající přímku m_1 v bodu M_1 a sestrojme způsobem naznačeným v pojednání svrchu uvedeném na tomto paprsku bod S_1 ($\overline{M_1H_1} \parallel \overline{A_1B_1}$; $\overline{H_1S_1} \perp \overline{A_1M_1}$) křivky c_3, v níž průmětna π plochu S^3 protíná. Přímku povrchovou plochy S^3 bodem S_1 procházející označme s. Přímku s považujme za osu svazku rovin, z nichž každá protíná plochu obecně v hyperbole. Poněvadž směr jedněch asymptot těchto hyperbol jest dán směrem průsečíků jednotlivých rovin s přímkou u_∞ plochy sborcené, tvoří půdorysné průměty těchto asymptot patrně osnovu přímek rovnoběžných s přímkou d_1.

Asymptoty druhé těchto hyperbol obdržíme, vytkneme-li z kongruence [3, 2] tečen plochy podél kuželosečky ε_∞ ony paprsky, jež leží v jednotlivých rovinách jdoucích přímkou s. Poněvadž kongruence jest 3. řádu, procházejí každým bodem paprsku s ještě dva paprsky kongruenční. Poněvadž dále kongruence jest 2. třídy, leží v každé rovině jdoucí paprskem s ještě jeden paprsek kongruenční. *Jest tudíž plocha zmíněnými asymptotami naplněná sborcenou plochou 3. řádu*, jejíž dvojnou řídící přímkou jest přímka s. Označme tuto plochu ${}^2S^3$ a ustanovme průmět této plochy do π a vyhledejme její jednoduchou přímku řídící.

Veďme přímkou s libovolnou rovinu σ o půdorysné stopě σ_1 jdoucí bodem S_1. Vrcholem K řídícího kužele plochy S^3 procházející povrchová přímka jeho rovnoběžná s přímkou s má za půdorysnou stopu bod U_1 ležící na kružnici k_1 ($\overline{K_1U_1} \parallel s_1$). Přímkou $\overline{KU_1}$ vedená rovina $\sigma' \parallel \sigma$ má za půdorysnou stopu přímku $\sigma'_1 \parallel \sigma_1$ jdoucí bodem U_1 a protínající kružnici k_1 v bodu L_1. Přímka $\overline{KL_1}$ řídícího kužele udává patrně směr asymptoty průsečné hyperboly ležící v rovině σ. Veďme bodem A_1 paprsek $n_1 \perp \overline{L_1K_1}$ a protínající přímku m_1 v bodu M'_1 a stanovme známým způsobem bod R_1, v němž paprsek n_1 protíná křivku c_3 ($M_1'H_1' \parallel \overline{A_1B_1}$; $\overline{H_1'R_1} \perp R_1A_1$). Bodem R_1 procházející přímka r sborcené plochy S^3 jest rovnoběžná s rovinou σ, neboť jest rovnoběžná s přímkou $\overline{KL_1}$ řídícího kužele. Průsečnice s' asymptotické roviny λ příslušné přímce r s rovinou σ jest tudíž hledanou asymptotou. Půdorysnou stopou λ_1 asymptotické roviny λ jest dle pojednání výše uvedeného spojnice stopy R_1 přímky r s bodem P_1' půlícím úsečku $\overline{M_1'H_1'}$. Stopa λ_1 protíná stopu σ_1 v bodu Σ, jenž jest půdorysnou stopou hledané asymptoty $s' \parallel r$ ($s_1' \parallel r_1$).

Označme J_1 průsečík přímek s_1 a d_1 a opišme pravoúhlému trojúhelníku $A_1S_1J_1$ kružnici $\varkappa_1$ o středu T_1 na přeponě $\overline{A_1J_1}$. Označme $\sphericalangle S_1A_1J_1 = \alpha$. Veďme bodem S_1 přímku rovnoběžnou s $\overline{A_1B_1}$ a označme D_1 její průsečík s přímkou d_1. Pak jest též $\sphericalangle D_1S_1J_1 = \alpha$. Je-li bod $\mathfrak{B}_1$ průsečíkem stopy σ_1 s kružnicí $\varkappa_1$ a označíme-li $\sphericalangle D_1S_1\mathfrak{B}_1 = \varepsilon$ a $\sphericalangle \mathfrak{B}_1S_1J_1 = \gamma$, jest patrně $\varepsilon + \gamma = \alpha$. Též $\sphericalangle J_1A_1\mathfrak{B}_1 = \sphericalangle J_1S_1\mathfrak{B}_1 = \gamma$, neboť jsou to úhly obvodové nad tětivou $\overline{J_1\mathfrak{B}_1}$ kružnice $\varkappa_1$. Rovněž $\sphericalangle K_1U_1L_1 = \gamma$ a dále $\sphericalangle M_1IL_1 = \sphericalangle R_1A_1E_1 = \sphericalangle J_1A_1\mathfrak{B}_1 = \gamma$, značí-li bod

E_1 průsečík spojnice $\overline{H_1{}'M_1{}'}$ s přímkou d_1. Je-li bod I_1 průsečíkem přímek $s_1{}'$ a d_1, jest $\sphericalangle S_1\Sigma I_1 = \sphericalangle S_1\mathfrak{B}_1 J_1 = \alpha$, neboť jest $\overline{I_1\Sigma} \parallel \overline{\mathfrak{B}_1 J_1}$. Značí-li konečně bod Z_1 průsečík spojnice $\overline{H_1{}'M_1{}'}$ s průmětem $s_1{}'$ asymptoty s', jest $\sphericalangle I_1 Z_1 M_1{}' = \sphericalangle R_1 A_1 I_1 = \gamma$, neboť příslušná ramena těchto úhlů stojí k sobě kolmo. Veďme bodem E_1 přímku $r_1{}' \parallel r_1$ a protínající stopu λ_1 v bodu Y_1. Z konstrukce stopy λ_1 asymptotické roviny λ jest patrno, že $\triangle R_1 H_1{}'P_1{}'$ jest rovnoramenný. Tudíž i $\triangle E_1 P_1{}'Y_1$ a $\triangle Z_1 P_1{}'\Sigma$ jsou rovnoramenné, pročež $\sphericalangle P_1{}'\Sigma Z_1 = \sphericalangle P_1{}'Z_1\Sigma = \gamma$.

Budiž bod II patou kolmice spuštěné z bodu S_1 ku přímce $\overline{M_1 H_1}$ a bod III průsečíkem přímky m_1 se spojnicí $\overline{S_1 D_1}$. Dále označme ${}^1N$ a ${}^1M$ průsečíky přímek $\overline{S_1 III}$ a σ_1 se symetrálou f_1 bodů M_1 a H_1 a vytkněme průsečík ${}^1K$ přímky f_1 s přímkou $\overline{A_1 B_1}$. Z obrazce jest patrno, že

$$\overline{P_1{}'{}^1M} = \overline{P_1{}'{}^1K} + \overline{{}^1K{}^1N} + \overline{{}^1N{}^1M}. \tag{1}$$

Dosadíme-li $\overline{{}^1K{}^1N} = \overline{V_1 M_1} + \overline{M_1 III}$ do rov. (1) a značí-li r poloměr kružnice k_1 a k vzdálenost přímek m_1 a j_1, obdržíme z rov. (1) nahradivše zároveň délky jednotlivých úseček pomocí hodnot plynoucích snadno postupně z $\triangle A_1 M_1{}'E_1$, $\triangle M_1 H_1 S_1$, $\triangle A_1 V_1 M_1$, $\triangle M_1 II S_1$ a $S_1{}^1N{}^1M$:

$$\overline{P_1{}'{}^1M} = r \cot g\, \gamma + r \cot g\, \alpha + k \sin\alpha \cos\alpha + k \operatorname{tg} \varepsilon \left(\sin^2\alpha - \frac{1}{2}\right). \tag{2}$$

Z $\triangle P_1{}'\Sigma{}^1M$ plyne:

$$\overline{P_1{}'\Sigma} : \overline{P_1{}'{}^1M} = \sin(90^0 - \varepsilon) : \sin(\alpha + \gamma),$$

odkudž

$$\overline{P_1{}'\Sigma} = \frac{P_1{}'{}^1M \, .\, \sin(90^0 - \varepsilon)}{\sin(\alpha + \gamma)}. \tag{3}$$

Z obrazce jest patrno, že

$$\overline{Y_1\Sigma} = \overline{P_1{}'\Sigma} - \overline{P_1{}'Y_1} \tag{4}$$

a poněvadž

$$\overline{P_1{}'Y_1} = \overline{P_1{}'E_1} = r + \frac{k}{2}, \tag{5}$$

obdržíme z rov. (4) dosadivše do ní příslušné hodnoty z rov. (3) a (5):

$$\overline{Y_1\Sigma} = \frac{P_1{}'{}^1M \sin(90^0 - \varepsilon)}{\sin(\alpha + \gamma)} - r - \frac{k}{2}. \tag{6}$$

Dosadíme-li do rov. (6) za $\overline{P_1{}'{}^1M}$ z rov. (2) a zavedeme-li dle dřívějšího $\gamma = \alpha - \varepsilon$ a uvedeme-li pravou stranu rovnice na společného jmenovatele, seznáme, že členy obsahující k vymizí; obdržíme tudíž po snadné úpravě

$$\overline{Y_1 \Sigma} = r \, cotg \, (\alpha - \varepsilon) \, cotg \, \alpha. \tag{7}$$

Zavedeme-li opět $\gamma = \alpha - \varepsilon$, máme

$$\overline{Y_1 \Sigma} = r \, cotg \, \gamma \, . \, cotg \, \alpha. \tag{8}$$

Poněvadž $\overline{Y_1 \Sigma} = \overline{E_1 Z_1}$ a $\overline{E_1 A_1} = r \, cotg \, \gamma$, musí v $\triangle E_1 Z_1 A_1$ býti $\sphericalangle E_1 Z_1 A_1 = \alpha$, má-li býti vyhověno rov. (8).

Z $\triangle \overline{E_1 Z_1 I_1}$ plyne: $\overline{E_1 I_1} = \overline{E_1 Z_1} \, . \, tg \, \gamma$; poněvadž $\overline{E_1 Z_1} = \overline{Y_1 \Sigma}$, obdržíme po dosazení z rov. (8)

$$\overline{E_1 I_1} = r \, cotg \, \gamma \, . \, cotg \, \alpha \, . \, tg \, \gamma = r \, cotg \, \alpha. \tag{9}$$

Jest tudíž délka úsečky $\overline{E_1 I_1}$ konstantní, neboť jest odvislá pouze od polohy přímky, jíž vedeme sečné roviny.

Dříve jsme uvedli, že půdorysné průměty povrchových přímek plochy S^3 obalují parabolu p_1 o vrcholu Q_1 a ohnisku F_1 ($\overline{Q_1 F_1} = r$). Pak jest přímka r_1' procházející bodem E_1 rovnoběžně s průmětem r_1 povrchové přímky r tečnou paraboly ${}^1p_1$, shodné s parabolou p_1, o vrcholu A_1 a ohnisku ${}^1F_1$ na přímce $\overline{A_1 B_1}$ ($\overline{A_1 {}^1F_1} = r$). Poněvadž průmět $s_1' \parallel r_1'$ asymptoty s protíná přímku d_1 v bodu I_1 majícím od bodu E_1 konstantní vzdálenost $\overline{E_1 I_1} = r \, cotg \, \alpha$, *musí obalovati půdorysné průměty jedněch asymptot průsečných hyperbol ležících v rovinách svazku o ose s parabolu ${}^2p$, jíž obdržíme, pošinemc-li parabolu ${}^1p$ po tečně vrcholové d_1 o úsečku $\overline{E_1 I_1}$.*

Veďme bodem M_1 přímku rovnoběžnou s $\overline{A_1 B_1}$ a protínající tečnu d_1 v bodu ${}^2V_1$. Z $\triangle A_1 M_1 {}^2V_1$ jest patrno, že $\overline{A_1 {}^2V_1} = \overline{{}^2V_1 M_1} \, . \, cotg \, \alpha = r \, cotg \, \alpha$. Jest tudíž bod ${}^2V_1$ vrcholem paraboly ${}^2p$ a přímka $\overline{M_1 {}^2V_1}$ jest její osou. Ohniskem paraboly ${}^2p$ jest bod ${}^2F_1$ ($\overline{{}^2V_1 {}^2F_1} = r$).

Sestrojíme tudíž přímo průmět jedné asymptoty průsečné hyperboly ležící v libovolné rovině procházející přímkou s, vytkneme-li průsečík půdorysné stopy této roviny s kružnicí $\varkappa_1$ a vedeme-li tečnu paraboly ${}^2p$ kolmou ku spojnici tohoto prů-

sečíku s bodem A_1. Pak jest tato tečna hledaným průmětem asymptoty.

Z uvedené konstrukce snadno lze nahlédnouti, že přímka r_1' jest průmětem asymptoty hyperboly, v níž protíná plochu S^3 rovina mající za půdorysnou stopu spojnici $\overline{Q_1 Y_1}$ a procházející přímkou q plochy S^3, značí-li q povrchovou přímku procházející bodem Q_1 rovnoběžně s řídící přímkou d. Parabola ${}^1p_1$ jest tudíž obalena půdorysnými průměty jedněch asymptot průsečných kuželoseček, v nichž protínají plochu S^3 roviny procházející přímkou q.

Dříve jsme seznali, že půdorysný průmět s_1' asymptoty s', ležící v rovině σ, svírá se stopou této roviny $\sphericalangle \alpha$. Poněvadž půdorysné stopy rovin procházejících přímkou s tvoří svazek paprskový o vrcholu S_1, naplní půdorysné stopy Σ jedněch asymptot průsečných kuželoseček křivku, již obdržíme, protneme-li každou tečnu paraboly ${}^2p$ paprskem jdoucím bodem S_1 a svírajícím s tečnou konstantní $\sphericalangle \alpha$. Naplní tudíž tyto stopy *úpatnici paraboly*, jejímž dvojným bodem jest bod S_1. Označme ji ${}^2c_3$. Směr asymptoty křivky ${}^2c_3$ udává patrně přímka s_1.

Uvedené asymptoty kuželoseček ležících v rovinách svazku o ose s možno tedy považovati za průsečnice jednotlivých rovin tohoto svazku s příslušnými tečnými rovinami přímého parabolického válce, jehož řídící křivkou jest parabola ${}^2p$. Poněvadž stopy odpovídajících si rovin svírají konstantní úhel α, jest tento svazek rovin o ose s projektivný s uvedeným svazkem rovin 2. třídy. *Tudíž průsečnice sdružených rovin, čili uvažované asymptoty, naplní sborcenou plochu 3. řádu,* jak bylo již z počátku uvedeno. Tato sborcená plocha ${}^2S^3$ a daná plocha S^3 mají patrně týž řídící kužel.

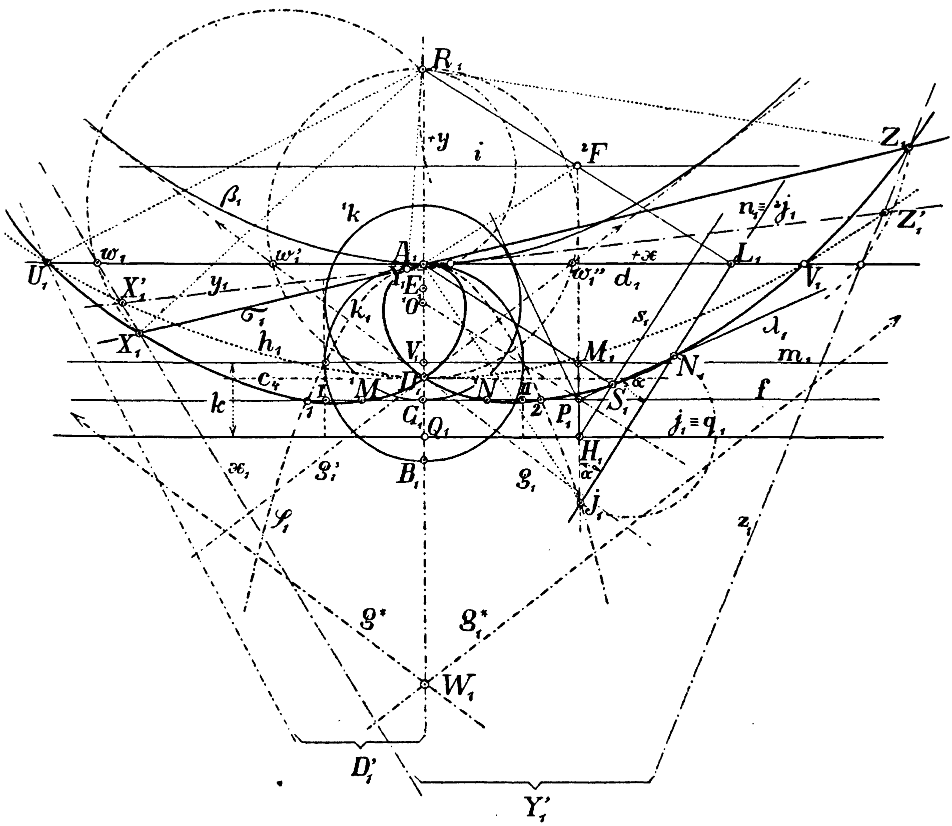
Sestrojujeme-li přímku plochy ${}^2S^3$ ležící v půdorysně promítací rovině přímky s, vidíme, že tato přímka zapadne do nekonečna, neboť tato rovina protíná plochu S^3 v parabole. Označme tuto přímku ${}^2u_\infty$. Vedeme-li přímkou s rovinu o půdorysné stopě $\overline{S_1 A_1}$, odpovídá jí v uvedeném svazku rovin 2. třídy rovina kolmá k π procházející vrcholovou tečnou d_1 paraboly ${}^2p$, neboť $\sphericalangle M_1 A_1 J_1 = \alpha$. Průsečnicí těchto rovin jest patrně řídící přímka d plochy S^3. Náleží tudíž přímka d též ploše ${}^2S^3$. Prochází-li rovina sečná σ přímkou s a přímkou řídící j, degeneruje průsečná kuželosečka v této rovině ležící v přímku j a přímku ${}^1s$

plochy S^3, jež prochází průsečíkem J přímek s a d. Přímka ${}^1s$ náleží ploše ${}^2S^3$ a snadno ji určíme, neboť její půdorysný průmět ${}^1s_1$ jest druhou tečnou obrysové paraboly p_1 z bodu J_1 k ní vedenou. Plochy S^3 a ${}^2S^3$ dotýkají se podél kuželosečky ε_∞, neboť mají společnou plochu asymptotickou. Rozpadá se tudíž průsečná křivka 9. řádu, v níž se plochy S^3 a ${}^2S^3$ protínají, v dvojnásobně čítanou kuželosečku ε_∞, dvojnásobně čítané přímky d a s a přímku ${}^1s$.

Veďme přímkou d rovinu mající za půdorysnou stopu spojnici $\overline{A_1 R_1}$ a ustanovme asymptoty hyperboly, v níž tato rovina protíná plochu ${}^2S^3$. Průmětem jedné asymptoty bude patrně přímka rovnoběžná s přímkou s_1, neboť uvažovaná rovina sečná protíná přímku ${}^2u_\infty$, danou směrem půdorysně promítací roviny přímky s, v bodu, jehož směr jest dán průsečnicí sečné roviny s touto rovinou promítací. Příslušná asymptota jest patrně přímka s tímto směrem rovnoběžná a jest paprskem kongruenčním lineárné kongruence tečen plochy S^3 podél přímky u_∞. Poněvadž dále s uvažovanou rovinou sečnou jest rovnoběžná přímka s' plochy ${}^2S^3$ a poněvadž asymptotickou rovinou přímkou s' procházející jest zase dříve určená rovina λ, jest přímka r plochy S^3, jakožto průsečnice roviny sečné s asymptotickou rovinou λ, druhou asymptotou průsečné hyperboly, v níž rovina sečná plochu ${}^2S^3$ protíná. Platí tudíž: *Vedeme-li řídící přímkou d plochy S^3 roviny sečné a vytkneme-li ony asymptoty všech průsečných kuželoseček, v nichž tyto roviny protínají plochu ${}^2S^3$, jež procházejí jednotlivými body kuželosečky ε_∞, naplňují tyto asymptoty původní plochu sborcenou S^3.* Věta tato plyne též přímo, uvážíme-li, že asymptoty uvažované jsou paprsky kongruenčními dříve uvedené kongruence [3, 2] tečen plochy S^3 podél kuželosečky ε_∞. Pak každá rovina vedená přímkou d protíná plochu ${}^2S^3$ v kuželosečce, jejíž jednou asymptotou musí býti druhý paprsek kongruenční v této rovině se nacházející. Tento paprsek jest samozřejmě totožný s přímkou plochy S^3 v rovině sečné ležící.

Vedeme-li sečné roviny současně všemi povrchovými přímkami plochy S^3, naplní jedny asymptoty kuželoseček, v nichž tyto roviny plochu S^3 protínají, ∞^1 ploch sborcených 3. řádu, jichž přímky povrchové jsou kongruenčními paprsky kongruence

[3, 2] výše uvedené. Všechny tyto plochy sborcené procházejí řídící přímkou d plochy S^3. Považujeme-li přímku d za osu svazku rovin a protneme-li jimi všechny uvedené sborcené plochy, tu všechny průsečné hyperboly v téže rovině se nacházející mají



Obr. 3.

za společnou asymptotu přímku plochy S^3, jež v rovině sečné leží. Otáčí-li se tedy rovina sečná okolo přímky d, naplní tyto společné asymptoty původní plochu sborcenou S^3.

Zvolme (obr. 3.) zase základní body A_1 a B_1, průměty d_1 a j_1 řídících přímek plochy S^3 a zobrazme známým způsobem průmět s_1 libovolné přímky s plochy S^3. Stopu půdorysnou přímky s označme S_1. Seznali jsme, že jedny asymptoty průsečných hyperbol plochy S^3 s rovinami vedenými přímkou s naplňují sborcenou plochu 3. řádu ${}^2S^3$, jejíž dvojnou řídící přímkou jest přímka s. Stanovme nyní druhou řídící přímku plochy ${}^2S^3$. Přejde-li rovina sečná vedená přímkou s v rovinu asymptotickou, jest patrně přímka s již směrem jedné asymptoty průsečné hyperboly v rovině asymptotické ležící. Označme tuto asymptotu n. Půdorysná stopa její N_1 jest průsečíkem půdorysné stopy uvažované asymptotické roviny s dříve odvozenou úpatnicí paraboly ${}^2c_3$, v níž průmětna π protíná plochu ${}^2S^3$. Odvodili jsme, že půdorysné průměty povrchových přímek plochy ${}^2S^3$ obalují parabolu ${}^2p$ o ohnisku ${}^2F$ a vrcholové tečně d_1. Poněvadž přímka n plochy ${}^2S^3$ jest rovnoběžná s přímkou s plochy S^3, obdržíme její půdorysný průmět n_1, vedeme-li ku obrysové parabole ${}^2p$ tečnu rovnoběžnou s přímkou s_1. Vedeme-li tedy ohniskem ${}^2F$ kolmici ku s_1 a průsečíkem jejím L_1 s vrcholovou tečnou d_1 přímku $n_1 \parallel s_1$, jest tato přímka půdorysným průmětem hledané asymptoty n a její půdorysná stopa N_1 jest průsečíkem přímky n_1 s půdorysnou stopou λ_1 uvažované asymptotické roviny.

Rovina půdorysně promítací vedená přímkou n prochází též přímkou ${}^2u_\infty$ plochy ${}^2S^3$. Protíná tudíž plochu ještě v další přímce, jež musí býti patrně hledanou druhou přímkou řídící. Označme ji ${}^2j$. Půdorysnou stopou přímky ${}^2j$ jest bod N_1 a průmětem půdorysným přímka ${}^2j_1 \equiv n_1$. Poněvadž řídící přímka d plochy S^3 náleží též ploše ${}^2S^3$, musí ji řídící přímka ${}^2j$ protínati. Označme tento průsečík L ($L_1 \equiv d_1 \times {}^2j_1$). Stopou N_1 a bodem L jest řídící přímka ${}^2j$ určena.

4. *a*) Stanovme nyní plochu, jíž naplňují jednoduché řídící přímky všech ∞^1 ploch 3. řádu, jež mají za dvojné přímky řídící jednotlivé povrchové přímky plochy S^3 a jež náleží do kongruence [3, 2] tečen plochy S^3 podél kuželosečky ε_∞. Dle výše odvozeného protínají všechny tyto řídící přímky přímku d. Jest tudíž přímka d řídící přímkou hledané plochy. Označme tuto plochu S^4. Budiž bod R_1 průsečíkem spojnice $\overline{L_1{}^2F}$ s přímkou $\overline{A_1B_1}$. Poněvadž vzdálenost ohniska ${}^2F$ od průmětu d_1 řídící přímky d se rovná poloměru r kružnice k_1 a dle konstrukce jest $\overline{A_1M_1} \parallel \overline{{}^2FL_1}$, musí býti úsečka $\overline{A_1R_1} = \overline{M_1{}^2F} = 2r$. Poněvadž dále průmět ${}^2j_1$ řídící přímky ${}^2j$ jde bodem L_1 kolmo ku $\overline{R_1L_1}$, platí: *Půdorysné*

průměty všech jednoduchých řídících přímek uvažovaných ∞^1 *sborcených ploch 3. řádu obalují parabolu* β_1 *o ohnisku* R_1 *a vrcholové tečně* d_1.

b) V pojednání na počátku práce uvedeném jsme dokázali, že vztyčíme-li v půlícím bodě P_1 úsečky $\overline{M_1H_1}$ kolmici ku stopě λ_1 asymptotické roviny λ, dotýká se tato kolmice kružnice ${}^1k$ shodné s kružnicí k_1 a dotýkající se symetrály f bodů M_1 a H_1 v průsečíku jejím G_1 s přímkou $\overline{A_1B_1}$. Konstrukci jednotlivých bodů křivky c_4, v níž plocha S^4 protíná průmětnu π, možno provésti buď způsobem, jako jsme sestrojili již bod N_1 této křivky, nebo též pomocí vlastnosti právě uvedené následovně: Vedeme libovolnou tečnu kružnice ${}^1k$ a v průsečíku jejím P_1 s přímkou f vztyčíme normálu λ_1 ku této tečně, načež ohniskem R_1 vedeme přímku $\overline{R_1L_1}$ rovnoběžnou se spojnicí středu ${}^1O$ kružnice ${}^1k$ s bodem P_1. V průsečíku L_1 této přímky s přímkou d_1 vztyčená k ní kolmice n_1 protne kolmici λ_1 v bodu N_1 křivky c_4.

Označíme-li J_1 průsečík spojnice $\overline{{}^2FP_1}$ s přímkou n_1, jest patrně $\sphericalangle P_1J_1N_1 = \sphericalangle P_1N_1J_1 = \alpha$, tudíž $\triangle P_1J_1N_1$ jest rovnoramenný. Z obrazce jest patrno, že jest $\overline{A_1J_1} \perp \overline{A_1{}^2F}$. Má tudíž křivka, kterou při opakující se konstrukci naplní body J_1, následující výtvarný zákon: Bodem A_1 vedeme libovolný paprsek a v průsečíku jeho ${}^2F$ se symetrálou i bodů A_1 a R_1 vedeme kolmici ku i a protneme ji kolmicí v bodě A_1 ku $\overline{A_1{}^2F}$ vztyčenou v bodu J_1. Body J_1 naplní, jak snadno lze nahlédnouti, parabolu φ_1 mající vrchol v bodu A_1 a ohnisko v bodu E_1 ($\overline{A_1E_1} = \frac{1}{4}\overline{A_1V_1}$). Můžeme proto jednotlivé body křivky c_4 sestrojiti též následujícím způsobem: Středem ${}^1O$ kružnice ${}^1k$ vedeme libovolný paprsek protínající přímku f v bodu P_1. Bodem P_1 vedená kolmice ku přímce f nechť protne parabolu φ_1 o bodu J_1. Sestrojíme-li k bodu J_1 bod orthogonálně souměrný N_1 vzhledem ku přímce $\overline{{}^1OP_1}$, jest tento bod hledaným bodem křivky c_4. Dle této konstrukce náležejí průsečíky *1* a *2* přímky f s parabolou φ_1 patrně již křivce c_4.

Veďme ku kružnici ${}^1k$ tečny rovnoběžné s $\overline{A_1B_1}$ a označme *I* a *II* průsečíky jich s přímkou f. Z dříve uvedené konstrukce křivky c_4 plyne, že body ${}^1M$ a ${}^1N$ křivky c_4, v nichž tato protíná ještě přímku f, obdržíme, učiníme-li $\overline{I^1M} = \overline{{}^1NII} = \frac{k}{2}$, značí-li k kolmou vzdálenost přímek m_1 a j_1.

Považujeme-li bod A_1 za počátek pravoúhlých souřadnic a přímku $\overline{A_1L_1}$ za kladnou osu x a přímku $\overline{A_1R_1}$ za kladnou osu y, jest rovnice přímky $\overline{A_1S_1}$ dána rovnicí

$$y = \lambda x.$$

Snadno nalezneme, že rovnice přímky λ_1, pomocí téhož parametru λ vyjádřená, zní

$$y + r + \frac{k\lambda^2}{\lambda^2+1} = -\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\left(x + \frac{r}{\lambda} + \frac{k\lambda}{\lambda^2+1}\right). \quad (10)$$

Týmž parametrem λ vyjádřená rovnice přímky n_1 jest

$$y = -\frac{1}{\lambda}\left(x + \frac{2r}{\lambda}\right). \quad (11)$$

Elliminací proměnného parametru λ z rovnic (10) a (11), již lze snadno provésti, obdržíme rovnici křivky c_4 ve tvaru

$$x^2(y+4r)^2 + [2r(3y+2r+2k)-x^2][(3y+2r+2k)y+2x^2] = 0. \quad (12)$$

Z rovnice (12) seznáváme, že křivka c_4 jest křivkou 4. řádu souměrnou ku ose y. Ze zhomogenisované rov. (12) plyne dále, že křivka c_4 prochází nekonečně vzdálenými imaginárnými body kruhovými průmětny π a dotýká se úběžné přímky průmětny π ve směru osy y.

Pro $x = 0$ dostaneme z rov. (12)

$$2ry\,(3y + 2r + 2k)^2 = 0,$$

z čehož plyne

$$y_1 = 0, \quad y_{23} = -\frac{2\,(r+k)}{3}.$$

Vložíme-li do rovnice křivky c_4 za y výraz $-\frac{2\,(r+k)}{3}$, obdržíme

$$x_{12} = 0, \quad x_{34} = \pm\frac{(5r-k)\sqrt{2}}{3}. \quad (13)$$

Má tudíž křivka c_4 na ose y dvojný bod D, $\left(x = 0;\ y = -\frac{2\,(r+k)}{3}\right)$.

Konstrukce bodů, v nichž přímka vedená bodem D_1 rovnoběžně s osou x křivku c_4 protíná, plyne přímo z rov. (13).

Pro $y = 0$ podává rov. (12)

$$x_{12} = 0, \quad x_{34} = \pm 2\sqrt{r(3r + k)}.$$

Dotýká se tudíž křivka c_4 osy x v bodě A_1 a protíná zároveň osu x v bodech, označme je U_1 a V_1, jichž konstrukce z uvedeného výrazu jest patrná.

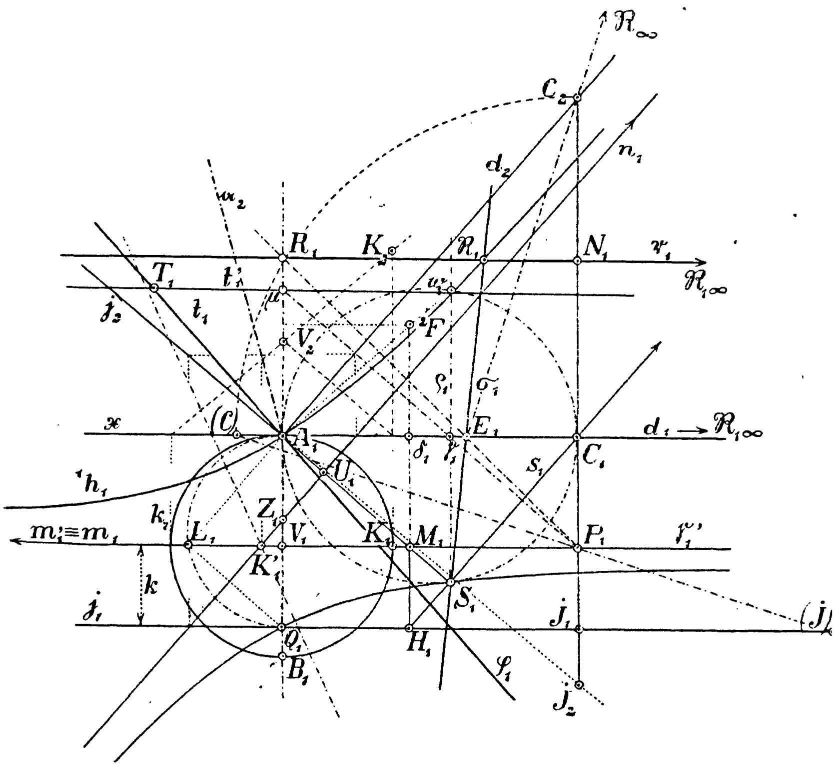
c) Veďme přímkou d plochy S^4 libovolnou rovinu σ. Její půdorysná stopa σ_1 prochází bodem A_1 křivky c_4 a protíná tuto křivku ještě v dalších třech bodech X_1, Y_1, Z_1. Každý z těchto bodů jest půdorysnou stopou určité přímky v rovině σ ležící a náležející ploše S^4, neboť bylo odvozeno, že přímka d jest řídící přímkou plochy S^4. Označme tyto přímky x, y a z. Dle dřívější konstrukce obdržíme půdorysný průmět na př. přímky x, opíšeme-li nad spojnicí $\overline{X_1R_1}$ kružnici a vytkneme-li příslušný průsečík w_1 této kružnice s přímkou d_1. Pak spojnice $\overline{w_1X_1}$ jest půdorysným průmětem x_1 přímky x. Průmět x_1 jest patrně tečnou paraboly β_1, tvořící obrys půdorysného průmětu plochy S^4. Podobně sestrojíme y_1 a z_1. Poněvadž přímky x, y a z leží v rovině σ, protínají se ve třech bodech, označme je X', Y' a Z', jež náleží patrně dvojné křivce plochy S^4. Poněvadž každá rovina vedená přímkou d obsahuje tři body dvojné křivky, jest tato prostorovou křivkou 3. řádu. Z konstrukce povrchových přímek plochy S^4 plyne přímo, že tato plocha obsahuje přímku v nekonečnu danou směrem nárysně promítací roviny procházející přímkou d. Přímka tato prochází patrně nekonečně vzdáleným bodem E_∞ křivky c_4. Označme ji e_∞. Nárysně promítací rovina δ přímkou d vedená má za půdorysnou stopu přímku $\overline{A_1B_1}$ a protíná křivku c_4 kromě bodu A_1 ještě v dvojném bodu D_1 a v bodu E_∞. V rovině δ leží přímky g a g' plochy S^4 jdoucí bodem D_1 a přímka e_∞. Tyto tři přímky se protínají v bodech D_1, G_∞ a G'_∞ náležejících dvojné křivce plochy. Půdorysné průměty g_1 a g_1' přímek g a g' obdržíme, opíšeme-li nad průměrem $\overline{D_1R_1}$ kružnici protínající přímku d_1 v bodech w_1' a w_1''. Pak jest $g_1 \equiv \overline{D_1w_1'}$ a $g'_1 \equiv \overline{D_1w_1''}$. Přímky g a g' jsou patrně směry dvou asymptot dvojné křivky plochy S^4.

Rovina půdorysně promítací přímkou d procházející dotýká se křivky c_4 v bodě A_1 a kromě toho ji protíná v dříve sestrojených bodech U_1 a V_1. Dle konstrukce přímek plochy S^4 musí přímky povrchové u' resp. v' procházející body U_1 a V_1 býti rovnoběžny s rovinami půdorysně promítacími kolmými ku přímce $\overline{R_1 U_1}$ resp. $\overline{R_1 V_1}$ a kromě toho musí protínati přímku d. Jsou tudíž u' a v' přímky kolmé k π. Přímky u' a v' protínají se v nekonečně vzdáleném bodě K_∞ náležejícím dvojné křivce plochy S^4. Jest tedy třetí asymptota této dvojné křivky kolmá k π. Rovina půdorysně promítací přímky d obsahuje kromě uvedených přímek u' a v' ještě třetí přímku h' ($h_1' \equiv d_1$) plochy S^4, jež protíná přímky u' a v' v bodech, jichž půdorysné průměty jsou U_1 a V_1, pročež náleží tyto body půdorysnému průmětu křivky dvojné. Značí-li a přímku jdoucí bodem A_1 kolmo k π a j_2 průmět přímky řídící j plochy S^3 do roviny půdorysně promítací přímky d, dokážeme na jiném místě, že přímky a a d oddělují přímky j_2 a h' harmonicky, čímž přímka h' plochy S^4 jest stanovena. Přímka h' jest patrně jednoduchou řídící přímkou sborcené plochy 3. řádu, již naplňují jedny asymptoty hyperbol, v nichž protínají plochu S^3 roviny vedené její povrchovou přímkou $q \| d$. Zároveň snadno nahlédneme, že přímka h' jest současně geom. místem středů těchto průsečných hyperbol.

Odvodili jsme, že dvojná křivka plochy S^4 jest prostorovou křivkou 3. řádu mající 3 reálné asymptoty. Jest tudíž tato křivka *kubickou hyperbolou*. Označme ji h. Půdorysný průmět této křivky, co průmět směrem její asymptoty kolmé k π, jest hyperbola h_1 procházející body U_1, V_1, D_1 atd. Směry asymptot této hyperboly jsou přímky g_1 a g_1'. Bod D_1 jest patrně jedním koncovým bodem reálné osy této hyperboly. Dle konstrukce průmětů jednotlivých povrchových přímek plochy S^4 plyne, že bod D_1', v němž protíná kolmice v bodu U_1 vztyčená ku $\overline{U_1 R_1}$ spojnici $\overline{A_1 B_1}$, jest druhým koncovým bodem reálné osy hyperboly h_1. Půlící bod W_1 úsečky $\overline{D_1 D_1}$ jest tudíž středem hyperboly h_1 a jím procházející přímky $g^* \| g_1$ a $g_1^* \| g_1'$ jsou asymptotami této hyperboly. Bod D_1' jest též půdorysným průmětem asymptoty kolmé k π kubické hyperboly h.

Z výsledků odvozených plyne, že plocha S^4 jest totožná s plochou oněch bisekant kubické hyperboly h, jež protínají přímku d. Jest tudíž plocha S^4 sborcenou plochou 4. řádu.

Zvolme (obr. 4.) základní body A_1 a B_1 svazku kružnic v π, jich symetrálu m_1, nejmenší kružnici svazku k_1, průměty d_1 a j_1 řídících přímek plochy S^3 a průsečík Q_1 přímek j_1 a $\overline{A_1B_1}$. Známým způsobem sestrojme povrchovou přímku s mající za



Obr. 4.

půdorysnou stopu bod S_1 ($\overline{M_1H_1} \parallel \overline{A_1B_1}$; $\overline{H_1S_1} \perp \overline{A_1M_1}$). Přímkou s veďme libovolnou rovinu σ a stanovme onu asymptotu hyperboly, v níž rovina σ plochu S^3 protíná, jež jest paprskem kongruenčním kongruence tečen plochy S^3 podél přímky u_∞.

Označme E_1 průsečík stopy σ_1 roviny σ s přímkou d_1. Přímka s plochy nechť protíná řídící přímku d v bodě C. Rovina σ protíná přímku u_∞ v bodu $\mathfrak{R}_\infty$, jenž jest určen směrem průsečnice $\overline{E_1 C}$ roviny σ s půdorysně promítací rovinou přímky d, neboť tato rovina prochází přímkou u_∞. Jest tudíž přímka $\overline{E_1 C}$ směrem hledané asymptoty r. Průsečnice roviny tečné plochy S^3 v bodě $\mathfrak{R}_\infty$ s rovinou σ jest asymptotou r. Rovinu tečnou v bodu $\mathfrak{R}_\infty$ ustanovíme pomocí dotyčného hyperbolického paraboloidu dotýkajícího se plochy S^3 podél přímky u_∞. Libovolná rovina α rovnoběžná s nárysnou prochází přímkou u_∞, jest tudíž jednou řídící rovinou všech hyp. paraboloidů dotýkajících se plochy podél přímky u_∞. Z těchto paraboloidů zvolme paraboloid oskulační. Jednou řídící rovinou tohoto paraboloidu jest rovina α a druhou patrně rovina β kolmá ku ose x ($x \equiv d_1$). Řídícími rovinami α a β a řídícími přímkami d a j plochy S^3 jest zvolený oskulační hyp. paraboloid úplně určen. Označme jej H. Chceme-li určiti rovinu tečnou tohoto paraboloidu v bodě $\mathfrak{R}_\infty$ přímky u_∞, musíme vyhledati povrchovou přímku jeho rovnoběžnou s přímkou $\overline{E_1 C}$ udávající bod $\mathfrak{R}_\infty$. Veďme bodem C rovinu rovnoběžnou s řídící rovinou β a označme J její průsečík s přímkou j. Stanovme průsečík P_1 povrchové přímky $\overline{CJ}$ paraboloidu s průmětnou π. Opíšeme-li nad průměrem $\overline{A_1 Q_1}$ půlkružnici protínající přímku m_1 v bodu L_1, jest úsečka $\overline{L_1 V_1}$ redukovanou výškou závitu z počátku uvažovaných šroubovic, značí-li bod V_1 střed kružnice k_1. Považujme rovinu půdorysně promítací přímky d za rovinu nárysnou a vyznačme nárysné průměty d_2 a j_2 přímek řídících d a j ($d_2 \equiv \overline{L_1 A_1}$; $j_2 \perp d_2$). Značí-li C_2 a J_2 nárysné průměty bodů C a J, jest $\triangle A_1 Q_1 L_1 \backsim \triangle A_1 J_2 C_2$. Tedy

$$\overline{C_2 C_1} : \overline{C_1 J_2} = \overline{A_1 V_1} : \overline{V_1 Q_1}.$$

Sklopme půdorysně promítací rovinu přímky $\overline{CJ}$ do π. Jsou-li (C) a (J) sklopené body C a J, jest $\overline{C_1(C)} = \overline{C_2 C_1}$ a $\overline{J_1(J)} = \overline{C_1 J_2}$. Z předešlé úměry plyne tedy

$$\overline{C_1(C)} : \overline{J_1(J)} = \overline{A_1 V_1} : \overline{V_1 Q_1}.$$

Seznáváme, že přímka $\overline{CJ}$ protíná průmětnu π v bodu P_1 ležícím na přímce m_1. Zvolený oskulační paraboloid H protíná tudíž průmětnu π v přímkách $\overline{A_1 B_1}$ a m_1. Abychom sestrojili přímku tohoto paraboloidu rovnoběžnou s $\overline{E_1 C}$, proložme bodem P_1 a přímkou $\overline{E_1 C}$ rovinu mající za půdorysnou stopu přímku $\overline{P_1 E_1}$, jež protíná přímku $\overline{A_1 B_1}$ v bodu R_1. Vedeme-li bodem

R_1 rovinu rovnoběžnou s řídící rovinou α, protíná tato přímku $\overline{CJ}$ v bodu N a spojnice $\overline{R_1N}$ jest hledanou povrchovou přímkou paraboloidu H. Jest tedy půdorysně promítací rovina přímkou $\overline{R_1N}$ vedená tečnou rovinou plochy S^3 v bodu $\mathfrak{R}_\infty$. Její půdorysná stopa $\overline{R_1N_1}$ protíná tudíž stopu σ_1 roviny σ v bodu $\mathfrak{R}_1$, jenž jest půdorysnou stopou asymptoty $\mathfrak{r} \parallel \overline{E_1C}$ průsečné hyperboly v rovině σ ležící.

Označme $\mathfrak{R}_{1\infty}$ nekonečně vzdálený bod přímky $\overline{R_1N_1}$. Půdorysné stopy rovin sečných procházejících přímkou s tvoří svazek o vrcholu S_1. Poněvadž bod P_1 při opakující se konstrukci svoji polohu nemění, naplní spojnice $\overline{P_1E_1}$ svazek o vrcholu P_1. Z konstrukce jest patrno, že svazek $P_1(E_1 \ldots)$ jest perspektivný se svazkem $\mathfrak{R}_{1\infty}(R_1 \ldots)$ vzhledem ku přímce $\overline{A_1B_1}$ co persp. ose a svazek $S_1(E_1 \ldots)$ jest perspektivný se svazkem $P_1(E_1 \ldots)$ vzhledem ku přímce d_1 co ose. Jest tudíž svazek $S_1(E_1 \ldots) \pi$ $\mathfrak{R}_{1\infty}(R_1 \ldots)$. Pozorujeme, že půdorysné stopy uvažovaných asymptot průsečných hyperbol, ležících v rovinách přímkou s procházejících, naplní kuželosečku. Označme ji ${}^1h_1$. Stane-li se rovina sečná rovinou půdorysně promítací, plyne přímo, že bod kuželosečky ${}^1h_1$ na stopě s_1 této roviny ležící jest nekonečně vzdáleným bodem stopy s_1. Poněvadž bod $\mathfrak{R}_{1\infty}$ co vrchol svazku též náleží kuželosečce ${}^1h_1$, musí býti tato hyperbolou. Je-li půdorysnou stopou sečné roviny přímka $\overline{A_1S_1}$, plyne z konstrukce, že bod A_1 jest též bodem hyperboly ${}^1h_1$. Body R_1, A_1 a S_1 a směry asymptot jest hyperbola ${}^1h_1$ úplně určena.

Uvažujeme-li asymptoty rovnoběžné s rovinou nárysnou všech kuželoseček, v nichž roviny přímkou s procházející plochu S^3 protínají, pozorujeme, že plocha, již naplňují, jest určena hyperbolou ${}^1h_1$, přímkou s protínající tuto hyperbolu co přímkou řídící a rovinou nárysnou co rovinou řídící. Poněvadž tato rovina jest rovnoběžná s asymptotou hyperboly ${}^1h_1$, rozpadá se konoid 3. řádu, útvary uvedenými určený, v rovinu procházející přímkou s rovnoběžně s osou x a v *hyperbolický paraboloid*. Označme jej P. Druhou řídící rovinou tohoto hyperbolického paraboloidu jest půdorysně promítací rovina přímky s, neboť tato rovina protíná plochu S^3 v parabole, pročež nekonečně vzdálená přímka této roviny představuje splývající asymptoty této průsečné kuželosečky a náleží tudíž paraboloidu P.

Že plocha naplněná uvažovanými asymptotami musí být hyperbolickým paraboloidem, plyne též přímo, uvážíme-li, že hledanými asymptotami jsou ony paprsky lineárné kongruence tečen plochy S^3 podél přímky u_∞, jež se nacházejí v rovinách svazku o ose s.

Poněvadž ony asymptoty kuželoseček na ploše S^3 ležících, jež jsou paprsky lineární kongruence tečen plochy podél přímky u_∞, tvoří v libovolné rovině s nárysnou rovnoběžné osnovu přímek rovnoběžných s přímkou paraboloidu H ve zvolené rovině ležící, nachází se tudíž v rovině přímkou m_1 procházející kolmo k π určitá přímka m' paraboloidu P rovnoběžná s přímkou m_1 oskulačního paraboloidu H. Poněvadž osa paraboloidu P jest kolmá ku π, jest m' jednou jeho přímkou hlavní. Tudíž průmět $m_1' \equiv m_1$ jest již jednou asymptotou hyperboly ${}^1h_1$. Značí-li M_1 průsečík paprsku $\overline{A_1 S_1}$ s asymptotou m_1 a vytkneme-li na tomto paprsku bod U_1 tak, aby $\overline{A_1 U_1} = \overline{M_1 S_1}$, prochází bodem U_1, dle známé vlastnosti hyperboly, druhá asymptota n_1 hyperboly ${}^1h_1$. Dle dřívějšího jest $n_1 \parallel s_1$. Značí-li bod Z_1 průsečík asymptoty n_1 s přímkou $\overline{A_1 B_1}$, jest $\triangle M_1 S_1 H_1 \cong \triangle A_1 U_1 Z_1$ a tedy $\overline{A_1 Z_1} = \overline{V_1 Q_1} = k$. *Určíme tudíž průsečnou hyperbolu s průmětnou π libovolného hyperbolického paraboloidu naplněného uvažovanými asymptotami kuželoseček, v nichž plochu S^3 protínají roviny vedené libovolnou přímkou této plochy, vedeme-li pevným bodem Z_1 přímku n_1 rovnoběžnou s půdorysným průmětem přímky zvolené. Hyperbola ${}^1h_1$ jest pak stanovena asymptotami m_1, n_1 a bodem A_1.*

Způsobem uvedeným přísluší každé přímce plochy S^3 určitý hyperbolický paraboloid. Uvažujeme-li současně všechny hyperbolické paraboloidy, příslušné všem přímkám povrchovým plochy S^3, jsou tyto paraboloidy protnuty průmětnou π v hyperbolách o společné asymptotě m_1 a společných bodech A_1 a Q_1. Tvoří tudíž tyto hyperboly svazek. Dále jest patrno, že řídící přímky d a j plochy S^3 jsou společnými přímkami všech těchto paraboloidů. Přímka u_∞ plochy S^3 též náleží těmto paraboloidům a v jednotlivých bodech této přímky mají paraboloidy vždy společnou rovinu tečnou, neboť se podél přímky u_∞ dotýkají. Pozorujeme tudíž, že *uvažované paraboloidy tvoří svazek.* Jedny hlavní přímky těchto paraboloidů jsou přímky rovnoběžné s přímkou m_1 a vyplňují rovinu γ' procházející přímkou m_1 kolmo k π. Poněvadž osy těchto paraboloidů jsou kolmé k π, naplňují druhé hlavní přímky jejich hyperbolický paraboloid A určený mimoběžkami d a j a průmětnou π co rovinou řídicí. Tudíž vrcholy těchto paraboloidů musí se nacházeti na povrchové přímce a paraboloidu A ležící v rovině γ'.

Všechny uvažované paraboloidy náleží patrně do ∞^2 hyperbolických paraboloidů lineární kongruence stanovené mimoběžkami d a j. Jest tedy přímka a obsahující jejich vrcholy povrchovou přímkou určitého konoidu 5. stupně*), jejž naplňují vrcholy všech ∞^2 hyperbolických paraboloidů uvedené lineární kongruence.

6. Stanovme geometrické místo středů kuželoseček, v nichž roviny procházející přímkou s plochy S^3 tuto plochu protínají. Bylo odvozeno, že jedny asymptoty těchto kuželoseček naplňují sborcenou plochu 3. řádu ${}^2S^3$. Poněvadž plocha ${}^2S^3$ a hyperbolický paraboloid P naplněný zbývajícími asymptotami mají společnou dvojnásobně čítanou přímku s, přímku d a nekonečně vzdálenou přímku ${}^2u_\infty$ roviny půdorysně promítací přímkou s procházející, mohou se protnouti ještě v křivce 2. stupně, jež jest, jak ihned dokážeme, parabolou. Náleží totiž této křivce též průsečík přímky u_∞ hyperbolického paraboloidu s přímkou ${}^2u_\infty$ plochy ${}^2S^3$. Obsahuje tedy tato kuželosečka jeden bod v nekonečnu a to onen bod, v němž se plocha ${}^2S^3$ i paraboloid P dotýkají roviny nekonečně vzdálené. Jest tudíž hledaná kuželosečka parabolou o ose kolmé k π. Označme ji φ. Parabola φ prochází bodem A_1, neboť tento bod, jakožto průsečík přímky d plochy ${}^2S^3$ s přímkou i paraboloidu P, procházející bodem A_1 rovnoběžně s půdorysně promítací rovinou přímky s, náleží též průsečné křivce obou ploch. Platí tudíž věta: *Vedeme-li libovolnou přímkou plochy S^3 roviny sečné, protínají tyto plochu S^3 v kuželosečkách, jichž středy naplňují parabolu φ jdoucí bodem A_1. Osa této paraboly jest kolmá k π.*

Stanovme přímku, jež jest půdorysným průmětem paraboly φ. Sestrojme v rovině ϱ jdoucí přímkou s a mající za

---

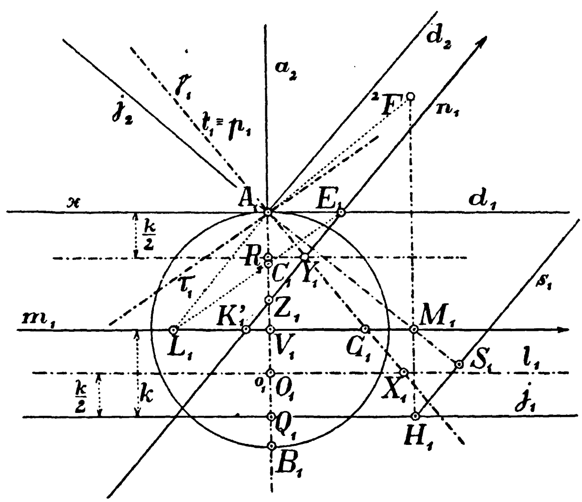
*) Dr. *V. Šimandl*: O určitém konoidu stupně pátého. Časopis pro pěstování math. a fys. roč. XLII. — Dr. *J. Klobouček*: Methodické poznámky ku theorii komplexu A^2. Rozpravy České Akademie r. 1905.

půdorysnou stopu přímku rovnoběžnou s $\overline{A_1 B_1}$ obě asymptoty průsečné hyperboly této roviny s plochou S^3. Opišme za tím účelem, dle dříve odvozené konstrukce, nad průměrem $\overline{A_1 C_1}$ kružnici protínající půdorysnou stopu ϱ_1 roviny ϱ v bodu w_1. Ohnisko ${}^2F$ obrysové paraboly ${}^2p$ plochy ${}^2S^3$ nachází se dle dřívějšího na přímce bodem M_1 rovnoběžně vedené s $\overline{A_1 B_1}$. Je-li bod δ_1 průsečíkem této rovnoběžky s přímkou d_1 a učiníme-li $\overline{M_1 \delta_1} = \overline{\delta_1 {}^2F}$, jest bod ${}^2F$ hledaným ohniskem. Z obrazce jest patrno, že bod ${}^2F$ leží též na přímce $\overline{A_1 w_1}$. Pak kolmice t_1 vztyčená v bodě A_1 ku $\overline{A_1 {}^2F}$ jest tečnou paraboly ${}^2p$ určené tečnou vrcholovou d_1 a ohniskem ${}^2F$. Tečna t_1 jest půdorysným průmětem jedné asymptoty uvažované hyperboly. Asymptotu druhou obdržíme, spojíme-li průsečík γ_1, v němž protíná stopa ϱ_1 přímku d_1 s bodem P_1 a v průsečíku μ této spojnice s přímkou $\overline{A_1 B_1}$ vedeme rovnoběžku t_1' s přímkou d_1. Pak t_1' jest průmětem druhé asymptoty průsečné hyperboly. Průsečík T_1 asymptot t_1 a t_1', jakožto průmět středu průsečné hyperboly v rovině ϱ ležící, náleží též půdorysnému průmětu paraboly φ. *Jest tudíž průmětem* φ_1 *paraboly* φ *přímka* $\overline{A_1 T_1} \perp \overline{A_1 {}^2F}$.

Uvažujeme-li současně roviny sečné všemi přímkami plochy S^3, tvoří roviny parabol, jež obsahují středy příslušných průsečných kuželoseček, svazek rovin o ose a jdoucí bodem A_1 kolmo ku π.

7. Stanovme plochu naplněnou těmito parabolami. Označme ji $\mathcal{H}$. Vyznačme (obr. 5.) základní body A_1 a B_1, průměty d_1 a j_1 řídících přímek plochy S^3 a libovolnou přímku s této plochy o půdorysné stopě S_1. Dále vyznačme asymptoty m_1 a n_1 a střed K_1' hyperboly ${}^1h_1$, bod Z_1 a přímku $\varphi_1 \perp \overline{{}^2FA_1}$, jež jest půdorysným průmětem paraboly φ. Poněvadž parabola φ náleží hyperbolickému paraboloidu P, obdržíme druhý její průsečík s průmětnou π, určíme-li průsečík přímky φ_1 s hyperbolou ${}^1h_1$. Z konstrukce jest patrno, že $\triangle\, {}^2FA_1M_1$ jest rovnoramenný; vrcholem jeho A_1 prochází přímka φ_1 kolmo ku straně $\overline{A_1 {}^2F}$ a bodem Z_1 jde asymptota n_1 kolmo ku straně $\overline{A_1 M_1}$. Je-li Y_1 průsečík přímek n_1 a φ_1, jest $\triangle\, A_1 Y_1 Z_1$ též rovnoramenný. Tudíž kolmice z vrcholu Y_1 ku straně $\overline{A_1 Z_1}$ vedená protíná tuto v bodu R_1 a jest patrně $\overline{A_1 R_1} = \overline{R_1 Z_1} = \frac{k}{2}$, značí-li k

kolmou vzdálenost přímek m_1 a j_1, neboť dříve jsme dokázali, že $\overline{A_1 Z_1} = k$. Hyperbola ${}^1h_1$ prochází, jak již bylo uvedeno, bodem A_1. Označíme-li G_1 průsečík přímky φ_1 s asymptotou m_1, musí pro průsečík X_1 přímky φ_1 s hyperbolou ${}^1h_1$ platiti $\overline{A_1 X_1} = \overline{G_1 X_1}$. Nachází se tudíž hledaný průsečík X_1 na přímce l_1 rozpolující vzdálenost k přímek m_1 a j_1. Totéž platí patrně o průsečících s průmětnou π všech parabol, naplněných středy kuželoseček na ploše S^3 ležících. Vedeme-li přímkou u_∞ plochy S^3 roviny, protínají tyto plochu S^3 v hyperbolách majících středy



Obr. 5.

na ose $\overline{A_1 B_1}$ mimoběžek d a j. S těmito rovinami jest totiž rovnoběžná přímka $q \parallel d$ plochy S^3 mající půdorysnou stopu v bodu Q_1. Tudíž nárysně promítací rovina přímkou q procházející, co rovina asymptotická přímky q, obsahuje již jedny asymptoty příslušných průsečných hyperbol. Druhými asymptotami jsou povrchové přímky rovnoběžné s nárysnou dříve odvozeného oskulačního paraboloidu H podél přímky u_∞, pročež jest přímka $\overline{A_1 B_1}$, náležející tomuto paraboloidu i zmíněné rovině asymptotické, geometrickým místem středů uvažovaných hyperbol. *Jest tudíž plocha $\mathcal{H}$, naplněná výše uvedenými parabolami, protnuta průmětnou π v přímkách l_1 a $\overline{A_1 B_1}$.*

Uvažujme roviny tečné v bodu A_1 jednotlivých hyperbolických paraboloidů dříve odvozeného svazku hyperbolických paraboloidů procházejících přímkami d a j a dotýkajících se plochy S^3 podél přímky u_∞. Tečná rovina τ v bodě A_1 hyp. paraboloidu na př. P jest určena přímkou d a tečnou τ_1 hyperboly ${}^1h_1$ v bodu A_1. Tečnu τ_1 určíme, jak známo, vedeme-li bodem A_1 rovnoběžky s asymptotami m_1 a n_1 hyperboly ${}^1h_1$ a vytkneme jich průsečíky L_1 a E_1 s asymptotami. Pak prochází tečna τ_1 bodem A_1 rovnoběžně ku spojnici $\overline{L_1E_1}$. Uvažujeme-li současně roviny tečné v bodu A_1 všech zmíněných hyperbolických paraboloidů, plyne z obrazce přímo, že bod C_1, v němž protíná $\overline{L_1E_1}$ přímku $\overline{A_1B_1}$, jest stále bodem pevným. Asymptoty, jdoucí bodem Z_1, jednotlivých hyperbol svazku, v němž průmětna π protíná náš svazek hyp. paraboloidů, tvoří svazek paprskový $Z_1(E_1 \ldots)$ perspektivný se svazkem $C_1(E_1 \ldots)$. Poněvadž dále svazek tečen $A_1(\tau_1 \ldots)$ jest se svazkem $C_1(E_1 \ldots)$ perspektivný a shodný a svazek $Z_1(Y_1 \ldots)$ jest perspektivný se svazkem $A_1(Y_1 \ldots)$, jsou soumístné svazky $A_1(Y_1 \ldots)$ a $A_1(\tau_1 \ldots)$ projektivné. Z konstrukce plyne přímo, že paprsky $\overline{A_1B_1}$ a d_1 těchto soumístných svazků o středu A_1 jsou příslušnými paprsky samodružnými těchto svazků.

Proložíme-li všemi paprsky svazku $A_1(Y_1 \ldots)$ roviny kolmé k π, tvoří tyto roviny svazek rovin o ose a kolmé k π. V tomto svazku rovin nacházejí se dle dřívějšího jednotlivé paraboly φ obsahující středy kuželoseček na ploše S^3 ležících. Proložíme-li roviny přímkou d a paprsky svazku $A_1(\tau_1 \ldots)$, jsou tyto roviny tečnými rovinami v bodě A_1 uvažovaného svazku hyperbolických paraboloidů. Poněvadž stopy půdorysné svazku rovin o ose a tvoří svazek paprskový projektivný se svazkem půdorysných stop těchto tečných rovin, jest svazek rovin o ose a projektivný se svazkem tečných rovin o ose d uvažovaných paraboloidů v bodě A_1. Tedy svazek rovin o ose a jest též projektivný s tímto svazkem hyperbolických paraboloidů. Plocha $\mathcal{H}$ naplněná středy kuželoseček plochy S^3 jeví se nám tudíž co plocha naplněná průsečnými parabolami, v nichž jednotlivé roviny svazku o ose a protínají odpovídající jim hyperbolické paraboloidy projektivně sdruženého uvedeného svazku hyperbolických paraboloidů.

Půdorysně promítací roviny přímek d a j představují degenerovaný paraboloid svazku a poněvadž tomuto degenerovanému paraboloidu odpovídá projektivně sdružená rovina svazku rovin o ose a, jež se ztotožňuje s rovinou půdorysně promítací přímky d, rozpadá se plocha 3. řádu, průsečnými kuželosečkami uvažovaných projektivných svazků naplněná, v rovinu půdorysně promítací přímky d a plochu $\mathcal{H}$ 2. stupně.

Plocha $\mathcal{H}$ musí býti hyperbolickým paraboloidem o ose kolmé k π, neboť jest svazkem rovin o ose a protnuta v parabolách o osách kolmých k π. Přímka u_∞, v níž protíná rovina svazku rovin o ose a rovnoběžná s nárysnou dříve uvedený degenerovaný paraboloid svazku, náleží patrně též paraboloidu $\mathcal{H}$. Dále obsahuje plocha $\mathcal{H}$ přímku v nekonečnu danou směrem roviny kolmé ku ose x, neboť v případě, kdy paraboloid svazku přechází v paraboloid oskulační H podél přímky u_∞, stává se přidružená rovina svazku rovin o ose a rovinou kolmou ku ose x, pročež průsečná parabola v této rovině ležící, rozpadá se v přímku $\overline{A_1B_1}$ a přímku nekonečně vzdálenou této roviny. *Jest tudíž plocha $\mathcal{H}$ hyperbolickým paraboloidem rovnostranným.*

Uvedli jsme, že průmětna π protíná hyperbolický paraboloid $\mathcal{H}$ v přímkách $\overline{A_1B_1}$ a l_1. Poněvadž osa o tohoto paraboloidu jest ku π kolmá, jest průsečík O_1 přímek l_1 a $\overline{A_1B_1}$ vrcholem paraboloidu $\mathcal{H}$.

Shrneme-li uvedené výsledky, dospíváme ku větě:

Geometrickým místem středů všech ∞^2 kuželoseček na ploše S^3 ležících jest rovnostranný hyperbolický paraboloid $\mathcal{H}$, jehož vrchol O_1 leží v průmětně π, jež jest zároveň příslušnou jeho tečnou rovinou vrcholovou.

Poněvadž řídící přímka j plochy S^3 jest geom. místem středů degenerovaných kuželoseček na ploše S^3 ležících, jež se rozpadají v tuto přímku a některou přímku povrchovou plochy S^3, náleží přímka j též hyperbolickému paraboloidu $\mathcal{H}$.

Přímkami j a l_1 a řídící rovinou kolmou ku ose x jest tudíž paraboloid $\mathcal{H}$ úplně určen.

Ku geom. místu středů kuželoseček na ploše S^3 ležících dlužno čítati ještě přímku d, jež nenáleží sice paraboloidu $\mathcal{H}$, představuje však geom. místo středů kuželoseček rozpadajících se v přímku d a některou přímku plochy S^3.

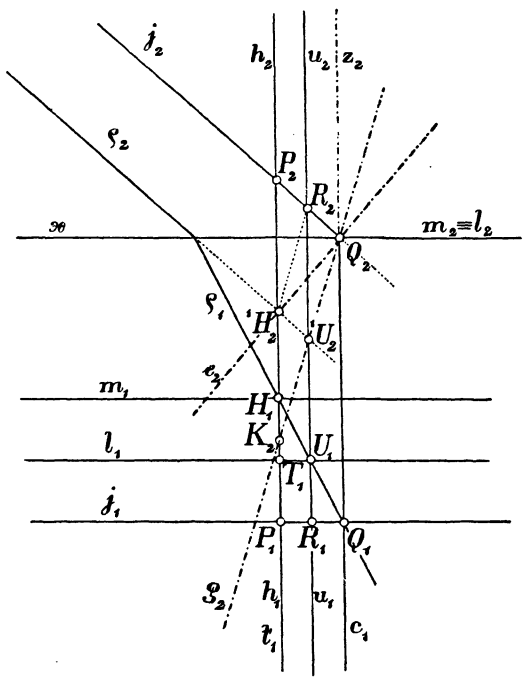
Pomocí konstrukcí v práci odvozených možno jednoduše vyhledati asymptoty hyperboly, v níž libovolná rovina vedená některou přímkou plochy S^3 tuto plochu protíná. Půdorysný průmět této hyperboly jest pak určen průměty těchto asymptot a průmětem průsečíku zvolené přímky s přímkou d, jímž hyperbola též musí procházeti.

Zvolíme-li naopak libovolný bod v průmětně π za průmět středu určité hyperboly na ploše S^3 ležící, možno konstrukcemi uvedenými sestrojiti snadno polohu roviny této hyperboly jakož i určiti povrchovou přímku plochy S^3, jíž rovina tato prochází.

8. Určeme ještě souvislost mezi hyperbolickým paraboloidem $\mathcal{H}$ a oskulačním hyperbolickým paraboloidem H plochy S^3 podél přímky u_∞. Oba tyto hyperbolické paraboloidy mají patrně společné dvě přímky ležící v nekonečnu určené společnými jich řídícími rovinami, společnou přímku j a přímku $c_1 \equiv \overline{A_1 B_1}$.

Buďtež (obr. 6.) $m_1 \parallel l_1$ dříve sestrojené přímky paraboloidu H resp. $\mathcal{H}$ ležící v π, c_1 společná přímka paraboloidů ležící v π a přímka $j (j_1 \parallel m_1)$ o půdorysné stopě Q_1 další společnou jejich přímkou. Přímka l_1 půlí dle dřívějšího vzdálenost přímek m_1 a j_1. Rovina určená společnými přímkami j a c_1 obou paraboloidů jest patrně společnou jich rovinou tečnou v bodu Q_1. Veďme přímkou j libovolnou rovinu ϱ o půdorysné stopě ϱ_1 protínající přímky m_1 a l_1 v bodech H_1 resp. U_1. Vedeme-li body H_1 a U_1 roviny μ' a λ' procházející nekonečně vzdálenou společnou přímkou obou paraboloidů danou směrem kolmým ku ose x, protíná prvá z nich rovinu ϱ v přímce h paraboloidu H a druhá v přímce u paraboloidu $\mathcal{H}$. Z obrazce jest patrno, že půdorysný průmět u_1 přímky u půlí vzdálenost přímek h_1 a c_1. Vedeme-li tudíž společným bodem Q_1 obou paraboloidů libovolnou přímku ležící v rovině ϱ a protínající paraboloid H v bodu X a paraboloid $\mathcal{H}$ v bodu Y, jest patrně stále úsečka $\overline{Q_1 X} = 2\overline{Q_1 Y}$. Otáčí-li se rovina ϱ okolo přímky j, zůstává uvedená vlastnost průsečíků přímek jdoucích bodem Q_1 s oběma paraboloidy stále v platnosti, pročež *oba paraboloidy jsou homothetické vzhledem k bodu Q_1 co středu pro poměr $1 : 2$.*

Stanovme dále přímky obou paraboloidů ležící v libovolné rovině kolmé ku přímce c_1, na př. v rovině nárysné. Nárysné stopy ${}^1H_2$ a ${}^1U_2$ přímek h a u ležících v rovině ϱ nacházejí se na nárysné stopě ϱ_2 roviny ϱ. Stopa ϱ_2 jest rovnoběžná s přímkou j, neboť přímka j jest hlavní přímkou roviny ϱ. Přímka $e_2 \equiv \overline{Q_2{}^1H_2}$ náleží paraboloidu H a přímka $g_2 \equiv \overline{Q_2{}^1U_2}$ paraboloidu $\mathcal{H}$. Značí-li P_2 a R_2 nárysy průsečíků přímek h resp. u s přímkou j a je-li K_2 průsečíkem přímek g_2 a h_2, jest z obrazce patrno,

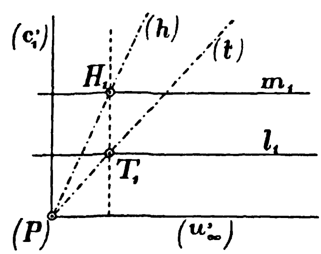


Obr. 6.

že $\triangle\, Q_2{}^1U_2R_2 \cong R_2{}^1H_2P_2 \cong {}^1U_2K_2{}^1H_2$. Tudíž úsečka $\overline{P_2{}^1H_2} = \overline{{}^1H_2K_2}$. Značí-li z_2 průmět z bodu Q_2 do roviny nárysné nekonečně vzdálené společné přímky v_∞ obou paraboloidů dané směrem roviny kolmé ku ose x, tvoří na základě vztahu právě odvozeného přímky z_2, e_2, j_2 a g_2 harmonickou čtveřinu, t. j. $(z_2e_2j_2g_2) = -1$.

Platí tedy: *Promítneme-li společné přímky j a v_∞ z bodu určitého společné přímky c_1 do roviny α určené přímkami obou paraboloidů, jež zvoleným bodem procházejí, tvoří tyto průměty* *a přímky paraboloidů v rovině α ležící harmonickou čtveřinu přímek.*

Tím dokázána jest věta dříve uvedená, že geom. místem středů průsečných hyperbol, v nichž roviny vedené přímkou q (obr. 1.) rovnoběžnou s nárysnou plochu S^3 protínají, jest přímka h' jdoucí bodem A_1 a ležící v rovině půdorysně promítací přímky d, při čemž poloha přímky h' jest určena vztahem $(z_2 d j_2 h') = -1$, značí-li j_2 průmět přímky j do roviny půdorysně promítací přímky d a je-li z_2 přímkou procházející bodem A_1 kolmo k π.



Obr. 7.

Vytkněme dále přímky paraboloidů vycházející z bodu P (obr. 6.) společné přímky j. Jednou z nich jest dříve sestrojená přímka h paraboloidu H a druhou jest spojnice t bodu P s bodem T_1, v němž rovina bodem P vedená kolmo ku ose x protíná přímku l_1. Promítněme společné přímky u_∞ a c_1 z bodu P do roviny určené přímkami h a t. Budiž u_∞' průmětem přímky u_∞ a c_1' průmětem přímky c_1. Z obr. 7., znázorňujícího sklopenou rovinu přímek h a t do π, jest přímo patrno, že přímky u_∞' a h oddělují přímky c_1' a t harmonicky.

Dříve jsme sestrojili přímky h a u (obr. 6.) paraboloidů jdoucí týmž bodem V_∞ společné přímky v_∞. Promítneme-li z bodu V_∞ do roviny ϱ určené přímkami h a u přímku c_1 a přímku u_∞, obdržíme po promítnutí do π přímky h_1, c_1, u_1 a u_∞'', jež tvoří, jak z obr. 6. jest patrno, zase harmonickou čtveřinu přímek.

Podobně plyne přímo, že promítneme-li z bodu U_∞ přímky u_∞ do roviny určené přímkami paraboloidů protínajícími se v bodě U_∞, přímky j a v_∞, tvoří tyto průměty a přímky paraboloidů v rovině ležící rovněž harmonickou čtveřinu přímek.

Platí tudíž: *Promítneme-li z libovolného bodu některé ze čtyř společných přímek paraboloidů H a $\mathscr{H}$ určité dvě další společné přímky těchto paraboloidů do roviny určené povrchovými přímkami paraboloidů zvoleným bodem procházejícími, tvoří tyto průměty a přímky paraboloidů v rovině ležící harmonickou čtveřinu přímek.*

9. Bylo uvedeno, že zdánlivým obrysem plochy S^3 při promítání do roviny půdorysné jest parabola p_1 (obr. 1.). Stanovme nyní křivku, jež jest zdánlivým obrysem této plochy při promítání do roviny nárysné. Určeme bod $\mathfrak{S}_2$, v němž se tato křivka dotýká na př. průmětu s_2 povrchové přímky s. Bod $\mathfrak{S}$. jakožto dotyčný bod roviny nárysně promítací ϱ přímkou s procházející, jest patrně totožný s průsečíkem přímky s s hyperbolou $\mathfrak{h}$, v níž rovina ϱ plochu S^3 protíná. Budiž bod N_1 průsečíkem stopy ϱ_1 roviny ϱ s půdorysným průmětem d_1 řídící přímky d a bod D_1 průsečíkem přímky d_1 s přímkou s_1 a dále bod P_1 nechť jest patou kolmice z bodu D_1 spuštěné ku přímce m_1. Bod orthogonálně souměrný k bodu M_1, v němž spojnice $\overline{A_1S_1}$ protíná přímku m_1, vzhledem ku přímce d_1 označme ${}^2F$. Je-li bod R_1 průsečíkem spojnice $\overline{P_1N_1}$ s přímkou $\overline{A_1B_1}$, jest, dle konstrukcí v práci uvedených, přímka t_1 procházející bodem R_1 rovnoběžně s osou x, asymptotou půdorysného průmětu $\mathfrak{h}_1$ hyperboly $\mathfrak{h}$ a kolmice v bodu A_1 ku $\overline{A_1{}^2F}$ vedená jest druhou asymptotou t_1' hyperboly $\mathfrak{h}_1$. Značí-li body $\mathfrak{H}_1$ a $\mathfrak{H}_1'$ průsečíky přímky s_1 s asymptotami t_1 a t_1', a učiníme-li $\overline{D_1\mathfrak{H}_1} + \overline{\mathfrak{H}_1'\mathfrak{S}_1}$ jest bod $\mathfrak{S}_1$ průsečíkem hyperboly $\mathfrak{h}_1$ s přímkou s_1, neboť bodem D_1 musí hyperbola $\mathfrak{h}_1$ též procházeti. Nárysný průmět $\mathfrak{S}_2$ bodu $\mathfrak{S}$ jest tedy dotyčným bodem přímky s_2 s křivkou k_4 tvořící obrys plochy v rovině nárysné.

Uvedeným způsobem možno tudíž určiti jednotlivé body křivky k_4, jakož i průměty půdorysné bodů prostorové křivky, jež jest skutečným obrysem plochy S^3 při promítání do roviny nárysné. Poněvadž dotyčný kužel ku sborcené ploše 3. řádu z bodu ležícího mimo tuto plochu, jest kuželem 4. řádu, jest *křivka k_4 též křivkou 4. řádu.* Křivka k_4 jest souměrná k bodu A_2 a má dva reálné body vratu. Průmět $q_2 \equiv d_2$ povrchové přímky q plochy S^3 jest asymptotou křivky k_4, neboť rovina asymptotická přímkou q procházející jest rovinou nárysně promítací. Nekonečně vzdálená přímka roviny nárysné jest tečnou inflexní křivky k_4.

Zvolíme-li libovolnou rovinu kolmou k ose x za třetí průmětnu, bude zdánlivým obrysem plochy S^3, při promítání do této průmětny, kuželosečka, neboť v tomto případě promítáme patrně plochu S^3 z bodu ležícího na přímce u_∞ této plochy. Poněvadž roviny asymptotické oněch přímek plochy S^3, jež odpovídají povrchovým přímkám $\overline{A_1 K}$ a $\overline{B_1 K}$ řídícího kužele, jsou rovinami stranorysně promítacími, obsahuje zmíněná kuželosečka, tvořící zdánlivý obrys plochy, dva body v nekonečnu. Jest tudíž *hyperbolou.* Průměty K_1^y a Q_1^y bodů K_1 a Q_1 na půdorysnou stopu y roviny stranorysné jsou patrně koncovými body reálné osy obrysové hyperboly a průměty výše uvedených dvou přímek jsou příslušnými asymptotami.

V případu, kdy redukovaná výška závitu v_0 z počátku uvažovaných šroubovic jest rovna polovičnímu poloměru kružnice k_1, jest obrysem plochy v rovině stranorysné *hyperbola rovnoramenná.*

Použitím konstrukcí v práci odvozených možno sestrojiti též jednoduše průměty meze stínu vlastního plochy S^3 při libovolném rovnoběžném neb centrálním osvětlení.

Obsah:

b) Průsečná křivka plochy S^4 s průmětnou π a některé konstrukce této křivky.

c) Dvojná křivka plochy S^4.

5. Svazek hyperbolických paraboloidů, v němž obsažené jednotlivé hyperbolické paraboloidy jsou naplněny asymptotami kuželoseček na ploše S^3 ležících, jež náleží do lineární kongruence tečen plochy podél přímky u_∞ a nacházejí se v rovinách jdoucích určitou přímkou plochy S^3.

6. Geometrické místo středů kuželoseček, v nichž protíná plochu S^3 svazek rovin mající za osu libovolnou povrchovou přímku této plochy.

7. Rovnostranný hyperbolický paraboloid jakožto geom. místo středů všech kuželoseček na ploše S^3 ležících.

8. Vztah mezi hyperbolickým paraboloidem oskulačním podél přímky u_∞ plochy S^3 a hyperbolickým paraboloidem naplněným středy kuželoseček plochy S^3.

9. Zdánlivé obrysy plochy S^3.

Příspěvek k theorii hyperboly rovnoosé.

Doc. Dr. **Fr. Kadeřávek.**

Kuželosečka K (obr. 1.) buď dána trojúhelníkem polárným xyz, přímkou P a jejím pólem p, mimo to vytkněme v přímce P dva harmonické póly ${}^1q$, ${}^2q$ křivky K. Libovolně je nesmíme vytknouti, neboť křivka K indukuje v přímce P involuci ${}^1a, {}^2a$; ${}^1b, {}^2b$; ${}^1c, {}^2c$ — bodům ${}^1a \equiv (\overline{P, xy})$, ${}^1b \equiv (P, \overline{xz})$, ${}^1c \equiv (P, \overline{yz})$ náležejí totiž poláry $\overline{pz}, \overline{py}, \overline{px}$, protínající přímku P v bodech ${}^2a, {}^2b, {}^2c$ — a k této involuci musí příslušeti i vytčená dvojina ${}^1q, {}^2q$. Proložíme-li body $x, y, z, {}^1q, {}^2q$ kuželosečku $\underline{L}$, prochází tato též bodem p, neboť kuželosečky L; $\overline{xy}, \overline{pz}$; $\overline{xz}, \overline{py}$; $\overline{yz}, \overline{px}$ body xyz a dvojinami involuce v přímce P určené tvoří svazek a procházejí proto vesměs ještě 4tým základním bodem p. Je z toho patrno, že:

a) Dán-li polárný trojúhelník xyz a v přímce P dva harmonické póly ${}^1q$, ${}^2q$ kuželosečky K, tu pól přímky P je obsažen v kuželosečce L, určené body $x, y, z, {}^1q, {}^2q$.