Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Maxmilián Pinl
W-Projektionen totalisotroper Flächen. [I.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 66 (1937), No. 2, 95--102

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121491

W-Projektionen totalisotroper Flächen I.

M. Pinl, Prag.

(Eingegangen am 18. März 1936.)

Die Theorie der sogenannten totalisotropen Mannigfaltigkeiten[1]) ist im komplexen n-dimensionalen Raum R_n identisch mit der Theorie der μ-dimensionalen Integralmannigfaltigkeiten V_μ der Mongeschen Differentialgleichung:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 = 0 \qquad \mu = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{1}$$

Im Sonderfall $\mu = 2$ wurde diese Theorie in neuerer Zeit mit Vorzug innerhalb der Dimensionszahlen $n = 4, 5, 6$ als Theorie totalisotroper Flächen genauer entwickelt und alle Typen totalisotroper Flächen in den Räumen R_4, R_5, R_6 aufgestellt.[2])

Im folgenden sollen nunmehr diese Ergebnisse, einer Anregung des Herrn A. Winternitz folgend, eine ebenso naheliegende wie neuartige Deutung erfahren, die wir hier zunächst für allgemeine Dimensionszahlen μ und n formulieren (§ 1), um sie weiterhin für die Dimensionszahlen $\mu = 2$, $n = 4, 5, 6$ genauer zu behandeln (§ 2—§ 4).

§ 1. W-Projektionen und B-Projektionen.

V_μ sei eine μ-dimensionale Integralmannigfaltigkeit der Mongeschen Gleichung (1). Ihre Parameterdarstellung sei durch die Gleichungen:

$$\begin{gathered} x_1 = x_1(u_1, u_2, \ldots, u_\mu), \ldots, x_{n-\mu} = x_{n-\mu}(u_1, \ldots, u_\mu), \\ x_{n-\mu+1} = iu_1, \ldots, x_n = iu_\mu \end{gathered} \tag{2}$$

---

[1]) Vgl. J. Lense, Jahresber. D. M. V. **35** (1926), 280—294; Wiener Berichte **135** (1926), 29—32; **136** (1927), 81—85; Math. Z. **29** (1928), 87—95, **34** (1932), 721—736.

[2]) Vgl. M. Pinl, Proceedings Amsterdam **35** (1932), 1181—1188, **36** (1933), 550—557, **38** (1935), 171—180; J. Lense, Über vollisotrope Flächen, Monatshefte f. Math. u. Phys. **43** (1936), 177—186.

gegeben,[3]) worin die n Funktionen $x_k(u_1, \ldots, u_\mu)$ [der Vektor $\mathfrak{x}(u_1, \ldots, u_\mu)$] als analytische Funktionen ihrer Argumente mit gemeinsamen Existenzbereich vorausgesetzt werden.[4]) Dann befriedigen die Funktionen (2) die Gleichung (1) und man erhält:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx^2_{n-\mu} \equiv du_1^2 + \ldots + du^2_\mu, \ \{u_1, \ldots, u_\mu\} \quad (3)$$

bzw. für $\mu = 2$:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx^2_{n-2} \equiv du_1^2 + du_2^2 \ \{u_1, u_2\}. \quad (4)$$

Mitanderen Worten: das Integrationsproblem (1) der Bestimmung aller totalisotropen V_μ des R_n ist gemäß (3) der Bestimmung aller euklidischen μ-dimensionalen Mannigfaltigkeiten im $(n-\mu)$-dimensionalen Projektionsraum der (kartesischen) Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_{n-\mu}$, der W-Projektionen der totalisotropen V_μ des R_n äquivalent.

Insbesondere entspricht so für $\mu = 2$ jedem Typus totalisotroper Flächen des R_n ein euklidischer Flächentypus des R_{n-2} und umgekehrt.

Der Fall gerader Dimension $n = 2m$ der euklidischen Einbettungsräume läßt noch eine andere Deutung zu. Man substituiere:

$$x_{m+1} = iy_1, \ldots, x_{2m} = iy_m \quad (i = \sqrt{-1}). \quad (5)$$

Dann entsteht aus (1):

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_m^2 \equiv dy_1^2 + dy_2^2 + \ldots + dy_m^2. \quad (6)$$

Da die Dimensionszahl μ einer totalisotropen V_μ des R_n nach J. Lense durch $\left[\frac{n}{2}\right]$ beschränkt ist,[5]) liegt darin folgende auf W. Blaschke zurückgehende Deutung des Integrationsproblems (1) für den Fall gerader Dimensionszahlen $n = 2m$: die Bestimmung aller totalisotropen V_μ des R_{2m} erscheint durch B-Projektionen (5) auf die Bestimmung aller Isometrien (6) des R_m zurückgeführt.

Eine genauere Untersuchung solcher B-Projektionen, sowie die ihrer Verallgemeinerungen im Sinne des Äquivalenzproblems:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_k^2 \equiv dy_{k+1}^2 + dy_{k+2}^2 + \ldots + dy_n^2 \quad (7)$$

(„A-Projektionen")

für alle möglichen Werte μ, k, n soll an anderer Stelle gegeben werden.

[3]) Vgl. Duschek-Mayer, Lehrbuch der Differentialgeometrie II, 201, Leipzig 1930.

[4]) Vgl. E. Study, Trans. Amer. Math. Soc. 10 (1909), 1—49.

[5]) Vgl. [1]).

§ 2. $\mu = 2$, $n < 6$, die trivialen Fälle.

Die Existenz totalisotroper Flächen beginnt im komplexen R_4. Hier erhält man aus (1) eine einzige Flächenklasse, die totalisotropen Ebenen.[6]) Ihre W-Projektion in den R_2 der Koordinaten x_1, x_2 fällt mit (einem Stück) dieser Koordinatenebene zusammen und liefert so wiederum nur eine einzige Realisierung für das binäre euklidische Bogenelement (4). Dagegen enthält der komplexe R_5 bereits zwei totalisotrope Flächenklassen: totalisotrope Ebenen und totalisotrope Torsen d. h. die Tangentenflächen:

$$\mathfrak{x}(u_1, u_2) = \mathfrak{y}(u_1) + u_2\, \mathfrak{y}'(u_1), \quad \mathfrak{y}'^2 \equiv \mathfrak{y}''^2 \equiv 0, \qquad (\mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \mathfrak{y}''', \mathfrak{y}^{IV}, \mathfrak{y}^{V},) \not\equiv 0, \quad \{u_1\} \tag{8}$$

der zweifach isotropen Kurven dieses Raumes $\mathfrak{y}$. Nach Voraussetzung ist dabei die Matrix:

$$\| \mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \mathfrak{y}''', \mathfrak{y}^{IV}, \mathfrak{y}^{V} \|, \tag{9}$$

vom Rang fünf, die Matrix $\| \mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \mathfrak{y}''' \|$ daher vom Rang drei und es existiert mindestens ein Koordinaten-R_3, in dem die Projektion der Gratlinie $\mathfrak{y}$ nicht in eine ebene Kurve ausartet, in dem also die W-Projektion von (8) wiederum eine Torse darstellt. Diese Projektionstorse ist notwendig anisotrop, da andernfalls zwei Zeilen der Matrix (9) proportional wären. Sie stellt somit die Realisierung eines euklidischen binären Bogenelementes dar.

Versteht man ferner unter $g_{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathfrak{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathfrak{x}_{\gamma\delta}$ den biquadratischen Fundamentaltensor der totalisotropen Torse (8), so fallen bekanntlich die zweifach isotropen Kurven der Fläche (8) d. h. die Nulllinien:

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta}\, du^\alpha\, du^\beta\, du^\gamma\, du^\delta = 0, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2 \tag{10}$$

in der einparametrigen Schar der Tangenten der Gratlinie $\mathfrak{y}$ zusammen. Ihnen entsprechen durch W-Projektion die (euklidischen!). Tangenten der Projektionsgratlinie d. h. die einparametrige Schar der Asymptotengeraden.

§ 3. $\mu = 2$, $n = 6$; komplexe euklidische Regelflächen in R_4.

Die totalisotropen Flächen des R_6 zerfallen in vier Typen: Ebenen, Torsen, Regelflächen und harmonische Flächen.[7]) Entsprechend sind im R_4 vier Typen euklidischer Flächen zu erwarten darunter insbesondere komplexe euklidische (krümmungsfreie) Regelflächen, die keine Torsen sind.[8]) Im Gegensatz zu den tota-

[6]) Vgl. 1); der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Identität $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{\alpha\beta}, \mathfrak{v})^2 \equiv 0\ \{\mathfrak{v}\}$ (unter Berücksichtigung von $\mathfrak{x}_1^2 = \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_2^2 = 0$).

[7]) Vgl. [2]) 35, 1184—1185, J. Lense [2]), 181.

[8]) Vgl. C. L. E. Moore, E. B. Wilson, Proceedings of the Amer. Acad. 52 (1916), auf S. 338 schließen die Verf. aus dem Verschwinden der Gauß'-

lisotropen Torsen ist der von den Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}\ (= 0)$ aufgespannte Schmiegraum totalisotroper Regelflächen:

$$\begin{gathered}\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u_1) + u_2\, \mathfrak{z}(u_1), \\ \mathfrak{y}_1^2 \equiv \mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_2 \equiv \mathfrak{z}_2^2 \equiv \mathfrak{y}_1\mathfrak{z} \equiv \mathfrak{z}\mathfrak{z}_2 \equiv \mathfrak{z}^2 \equiv 0 \quad \{u_1, u_2\}\end{gathered} \tag{11}$$

vierdimensional.[9]) Die Matrix $\| \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \|$ ist nach Voraussetzung vom Rang zwei. Somit existiert mindestens eine Darstellung der Fläche (11) von der Form:

$$x^{(1)} = x^{(1)}(u_1, u_2), \ldots, x^{(4)} = x^{(4)}(u_1, u_2),\ x^{(5)} = iu_1,\ x^{(6)} = iu_2, \tag{12}$$

wo unter $x^{(k)}$ die sechs Komponenten des Vektors $\mathfrak{x}$ zu verstehen sind. Bezeichnet man Ableitungen (wie bei Vektoren) mit unteren Indizes, so ist die Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} x_1^{(1)}, & x_1^{(2)}, & x_1^{(3)}, & x_1^{(4)}, & i, & 0 \\ x_2^{(1)}, & x_2^{(2)}, & x_2^{(3)}, & x_2^{(4)}, & 0, & i \\ x_{\alpha\beta}^{(1)}, & x_{\alpha\beta}^{(2)}, & x_{\alpha\beta}^{(3)}, & x_{\alpha\beta}^{(4)}, & 0, & 0 \\ x_{\gamma\delta}^{(1)}, & x_{\gamma\delta}^{(2)}, & x_{\gamma\delta}^{(3)}, & x_{\gamma\delta}^{(4)}, & 0, & 0 \end{matrix} \right\| \quad (\alpha, \beta) \neq (\gamma, \delta) \tag{13}$$

für (mindestens) eine bestimmte Indexgruppe notwendig vom Rang vier. Setzt man jetzt zur Abkürzung:

$$\begin{gathered}\mathfrak{x}_1^* = \{x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(4)}\},\ \mathfrak{x}_2^* = \{x_2^{(1)}, \ldots, x_2^{(4)}\}, \\ \mathfrak{x}_{\alpha\beta}^* = \{x_{\alpha\beta}^{(1)}, \ldots, x_{\alpha\beta}^{(4)}\}, \ldots,\end{gathered} \tag{14}$$

so ergibt sich für die Matrix $\| \mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*, \mathfrak{x}_{\alpha\beta}^*, \mathfrak{x}_{\gamma\delta}^* \|$ wiederum der Rang vier. Andernfalls bestünde die lineare Relation:

$$\lambda_1\mathfrak{x}_1^* + \lambda_2\mathfrak{x}_2^* + \lambda_{\alpha\beta}\mathfrak{x}_{\alpha\beta}^* + \lambda_{\gamma\delta}\mathfrak{x}_{\gamma\delta}^* = 0, \tag{15}$$

aus der wegen:

$$\mathfrak{x}_\alpha^*\mathfrak{x}_\beta^* = -\delta_{\alpha\beta},\ \mathfrak{x}_{\alpha\beta}^* = \mathfrak{x}_{\alpha\beta},\ \mathfrak{x}_\alpha^*\mathfrak{x}_{\beta\gamma}^* = 0 \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \tag{16}$$

durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{x}_1^*$ bzw. $\mathfrak{x}^*_2$:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \mathfrak{x}_{\alpha\beta}^* = \varrho\mathfrak{x}_{\gamma\delta}^*,\ \mathfrak{x}_{\alpha\beta} = \varrho\mathfrak{x}_{\gamma\delta}, \tag{17}$$

hervorgeht. Dann wäre aber die Matrix (13) entgegen der Voraussetzung vom Rang drei. Daher ist auch der von den Vektoren $\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*, \mathfrak{x}_{\alpha\beta}^*, \mathfrak{x}_{\gamma\delta}^*$ aufgespannte Schmiegraum der W-Projektion $\mathfrak{x}^*$ wiederum vierdimensional und $\mathfrak{x}^*$ selbst keine Torse. Gemäß (16) reduzieren sich ferner die Skalarprodukte der zur Basis $\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*, \mathfrak{x}_{\alpha\beta}^*$ bzw. $\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*, \mathfrak{x}_{\gamma\delta}^*$ gebildeten Trivektoren auf die biquadratischen Fundamentalkomponenten $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$ von $\mathfrak{x}$:

---

schen Krümmung der Regelfläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u_1) + u_2\mathfrak{z}\,(u_1)$ auf das Verschwinden von $[\mathfrak{y}', \mathfrak{z}, \mathfrak{z}']^2$ und daraus auf den Torsencharakter der Fläche. Dies gilt nur für reelle Flächen im Gegensatz zu den hier vorliegenden Fällen isotroper Trivektoren $[\mathfrak{y}', \mathfrak{z}, \mathfrak{z}']$; entsprechend ist auch der auf S. 342 ausgesprochene Satz zu ergänzen.

[9]) Der Schmiegraum einer Torse wird bereits von den Vektoren $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{y}''$, $\mathfrak{y}'''$ aufgespannt.

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta}{}^* = [\mathfrak{x}_1{}^*, \mathfrak{x}_2{}^*, \mathfrak{x}_{\alpha\beta}{}^*] \cdot [\mathfrak{x}_1{}^*, \mathfrak{x}_2{}^*, \mathfrak{x}_{\gamma\delta}{}^*] =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{x}_{\alpha\beta}{}^* \mathfrak{x}_{\gamma\delta}{}^* \end{vmatrix} = \mathfrak{x}_{\alpha\beta}\mathfrak{x}_{\gamma\delta} = g_{\alpha\beta\gamma\delta} \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2. \tag{18}$$

Das bedeutet: der zweite Fundamentaltensor $g^*_{\alpha\beta\gamma\delta}$ der W-Projektion $\mathfrak{x}^*$ (Tensor von Voss-Bompiani[10]) ist mit dem biquadratischen Fundamentaltensor von $\mathfrak{x}$ identisch; dieselbe Differentialgleichung:

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta}\, du^\alpha\, du^\beta\, du^\gamma\, du^\delta = 0, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2 \tag{19}$$

definiert auf $\mathfrak{x}$ das Netz der zweifach isotropen Kurven[11]) und auf $\mathfrak{x}^*$ Isotropen zweiter Art nach E. Bompiani insbesondere die Asymptoten.[12]) Dabei besteht das Netz der zweifach isotropen Kurven aus den isotropen Erzeugenden und einer nichtlinearen Schar, das Asymptotennetz der W-Projektion desgleichen aus den Projektionsgeraden der Erzeugenden und einer entsprechenden nichtlinearen Schar.

Ein Beispiel für Flächen dieser Art verdankt man Herrn J. Lense[13]):

$$x^1 = -\frac{u^3}{12} - v\frac{1}{u}, \quad x^2 = -\frac{iu^3}{12} + v\frac{i}{u}, \quad x^3 = \frac{u}{2} + v\frac{1}{2},$$
$$x^4 = -\frac{iu}{2} + v\frac{i}{2}, \quad x^5 = \frac{u^2}{4} - v\frac{1}{u}, \quad x^6 = -\frac{iu^2}{4} - v\frac{i}{u}. \tag{20}$$

Durch Einführen neuer Parameter u_1, u_2:

$$u_1 = -\tfrac{1}{2} i\,(u + v), \quad u_2 = -\tfrac{1}{2}(u - v),$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_2}{\partial v} - \frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial u_2}{\partial u} = -\frac{i}{2} \neq 0 \tag{21}$$

und W-Projektion gemäß:

$$x^{*1} = x^1, \quad x^{*2} = x^2, \quad x^{*3} = x^5, \quad x^{*4} = x^6, \quad x^3 = iu_1, \quad x^4 = iu_2 \tag{22}$$

in den R_4 der $x_1{}^*, \ldots, x_4{}^*$ entsteht die (Mongesche!) Regelfläche:

---

[10]) Vgl. A. Voss, Zur Theorie der Transformation quadratischer Differentialausdrücke und der Krümmung höherer Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. **16** (1880); E. Bompiani, Invarianti e covarianti metrici nelle deformazioni di specie superiore, Rend. Accad. d. Lincei (5), 28 (1919_{II}), 29 (1920_{I}), Atti Ist. Veneto **80** (1921), 1113—1145.

[11]) Vgl. [2]) **35**, 1183.

[12]) Vgl. E. Bompiani, Geometrie riemanniane di specie superiore, parte IV p. 447—448, Roma 1935.

[13]) Vgl. [1]) J. Lense, Math. Z. **34** (1932), 735—736; [2]) M. Pinl, **35**, 1185.

$$\left.\begin{array}{l} x^{*1} = -\frac{u^3}{12} - \frac{v}{u^2}, \quad x^{*3} = \frac{u^2}{4} - v\frac{1}{u} \\ x^{*2} = -\frac{iu^3}{12} + v\frac{i}{u^2}, \quad x^{*4} = -\frac{iu^2}{4} - v\frac{i}{u} \\ \left\| \begin{array}{c} \frac{\partial x^{*i}}{\partial u} \\ \frac{\partial x^{*i}}{\partial v} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} -\frac{u^2}{4} + \frac{2v}{u^3}, & -\frac{iu^2}{4} - \frac{2iv}{u^3}, & \frac{u}{2} + \frac{v}{u^2}, & -\frac{iu}{2} + \frac{iv}{u^2} \\ -\frac{1}{u^2}, & \frac{i}{u^2}, & -\frac{1}{u}, & -\frac{i}{u} \end{array} \right\| \end{array}\right\} \quad (23)$$

mit den konstanten Fundamentalkomponenten:

$$g_{11}^* = 0, \; g_{12}^* = -\tfrac{1}{2}, \; g_{22}^* = 0, \; |\, g_{\alpha\beta}^* \,| = -\tfrac{1}{4}. \qquad (24)$$

Somit ist (23) euklidisch und (20) totalisotrop:

$$\begin{array}{c} g_{11} = g_{11}^* + (\tfrac{1}{2})^2 + (-\tfrac{1}{2}i)^2 = 0, \; g_{12} = g_{12}^* + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^2 = 0. \\ g_{22} = g_{22}^* + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2}i)^2 = 0. \end{array} \qquad (25)$$

§ 4. $\mu = 2$, $n = 6$; harmonische euklidische Flächen in R_4.

Wir betrachten den zweidimensionalen (reellen!) Torus:

$$\mathfrak{x}^* = \{\cos u \cos v, \; \cos u \sin v, \; \sin u \cos v, \; \sin u \sin v,\} \qquad (26)$$

mit den Fundamentalkomponenten:

$$g_{11}^* = 1, \; g_{12}^* = 0, \; g_{22}^* = 1. \qquad (27)$$

Wegen (27) ist (26) euklidisch und demnach W-Projektion der totalisotropen Fläche:

$$\mathfrak{x} = \{\cos u \cos v, \; \cos u \sin v, \; \sin u \cos v, \; \sin u \sin v, \; iu, \; iv\} \qquad (28)$$

eines komplexen R_6 mit den quadratischen bzw. biquadratischen Fundamentalkomponenten:

$$g_{11} = g_{11}^* + i^2 = 0, \; g_{12} = g_{12}^* = 0, \; g_{22} = g_{22}^* + i^2 = 0, \qquad (29)$$

$$\begin{array}{c} g_{1111} = g_{1111}^* = 1, \; g_{1112} = g_{1112}^* = 0, \; g_{1122} = g_{1122}^* = 1, \\ g_{1222} = g_{1222}^* = 0, \; g_{2222} = g_{2222}^* = 1, \end{array} \qquad (30)$$

$$\Theta_2 = \begin{vmatrix} g_{1111}, & g_{1112}, & g_{1122} \\ g_{1112}, & g_{1122}, & g_{1222} \\ g_{1122}, & g_{1222}, & g_{2222} \end{vmatrix} = 0. \qquad (31)$$

Wegen (30) ist $\mathfrak{x}$ Minkowskischer Natur[14]), wegen (31) harmonisch[15]). Daher ist $\mathfrak{x}$ nach einem bekannten Ergebnis[16]) eine Schiebfläche. Dies zeigt eine einfache Parametertransformation:

---

[14]) Vgl. [2]) **36**, 555—556, **38**, 176.
[15]) Vgl. [2]) **35**, 1185.
[16]) Vgl. [2]) **36**, 555—556.

$$u_1 = u + v,\ u_2 = u - v,\ u = \frac{u_1 + u_2}{2},\quad v = \frac{u_1 - u_2}{2}. \tag{32}$$

Sie ergibt:

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{x}^* = \{&\cos u_1 + \cos u_2, \sin u_1 - \sin u_2, \sin u_1 + \sin u_2, \\ &- \cos u_1 + \cos u_2\} \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{x} = \{&\cos u_1 + \cos u_2, \sin u_1 - \sin u_2, \sin u_1 + \sin u_2, \\ &- \cos u_1 + \cos u_2, i\,(u_1 + u_2), i\,(u_1 - u_2)\} \end{aligned} \tag{34}$$

und man hat das Resultat: der euklidische Torus (26) ist W-Projektion einer Minkowskischen harmonischen totalisotropen Schiebfläche (28), die von den zwei Scharen $u_1 = \text{const.}$ bzw. $u_2 = \text{const.}$ transzendenter isotroper Schrauben erzeugt wird:

$$2\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u_1) + \mathfrak{z}(u_2),\quad \begin{aligned} &\mathfrak{y} = \{\cos u_1, \sin u_1, \sin u_1, -\cos u_1, iu_1, iu_1\}, \\ &\qquad \mathfrak{y}_1{}^2 = 0 \\ &\mathfrak{z} = \{\cos u_2, -\sin u_2, \sin u_2, \cos u_2, iu_2, -iu_2\}, \\ &\qquad \mathfrak{z}_2{}^2 = 0; \end{aligned} \tag{35}$$

diese Erzeugenden $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ verwandeln sich durch die W-Projektion in (nichtisotrope) hypersphärische Kurven $\mathfrak{y}^*$ und $\mathfrak{z}^*$, welche die Torusschiebfläche $\mathfrak{x}^*$ erzeugen:

$$2\mathfrak{x}^* = \mathfrak{y}^*(u_1) + \mathfrak{z}^*(u_2),\quad \begin{aligned} &\mathfrak{y}^* = \{\cos u_1, \sin u_1, \sin u_1, -\cos u_1\}, \\ &\qquad \tfrac{1}{2}\mathfrak{y}^*{}_1{}^2 = 1, \\ &\mathfrak{z}^* = \{\cos u_2, -\sin u_2, \sin u_2, \cos u_2\}, \\ &\qquad \tfrac{1}{2}\mathfrak{z}^*{}_2{}^2 = 1, \end{aligned}\quad \mathfrak{x}^{*2} = 1. \tag{36}$$

Allgemein erhält man aus harmonischen totalisotropen Flächen $\mathfrak{x}$ des R_6 durch W-Projektion harmonische euklidische Flächen $\mathfrak{x}^*$ in R_4, da wegen $g_{\alpha\beta\gamma\delta} = g^*{}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ auch $\Theta_2 = \Theta_2{}^*$ gilt. Somit besteht auf $\mathfrak{x}^*$ in geeigneten Parametern:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{x}_\alpha{}^*\mathfrak{x}_\beta{}^* = \text{Const.},\quad \mathfrak{x}_\alpha{}^*\mathfrak{x}_{\beta\gamma}{}^* = 0, \\ &[\mathfrak{x}_1{}^*, \mathfrak{x}_2{}^*, \mathfrak{x}_{\alpha\beta}{}^*] \cdot [\mathfrak{x}_1{}^*, \mathfrak{x}_2{}^*, \mathfrak{x}_{\gamma\delta}{}^*] = C\mathfrak{x}_{\alpha\beta}{}^*\mathfrak{x}_{\gamma\delta}{}^*] = C\mathfrak{x}_{\alpha\beta}\mathfrak{x}_{\gamma\delta} \end{aligned} \tag{37}$$

und dieselbe Differentialgleichung:

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta}\, du^\alpha\, du^\beta\, du^\gamma\, du^\delta = 0,\qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2 \tag{38}$$

bestimmt wiederum die zweifach isotropen Kurven auf $\mathfrak{x}$ wie die Asymptotenkurven auf $\mathfrak{x}^*$. Das bedeutet mit Rücksicht auf $\Theta_2 = \Theta_2{}^* = 0$: die W-Projektionen $\mathfrak{x}^*$ der harmonischen totalisotropen Flächen $\mathfrak{x}$ des R_6 sind die euklidischen Flächen des R_4, deren Isotrope zweiter Art nach E. Bompiani bzw. deren Asymptotenkurven auf der Fläche ein harmonisches Netz bilden.

Für $n > 6$ ist eine Klassifizierung der allgemeinen totalisotropen Flächen mit fünfdimensionalen Schmiegraum (Vektorraum der Ableitungen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}$. von Standpunkt einer Einbettungstheorie dieser Flächen in den euklidischen R_n $(n > 6)$ noch ausständig. In einer weiteren Untersuchung soll unter Benutzung bekannter Ergebnisse über euklidische Flächen des R_n[17]) versucht werden. umgekehrt aus der Theorie euklidischer Flächen des R_5 und R_6 mit möglicherweise fünfdimensionalem Schmiegraum die noch unbekannte Theorie der totalisotropen Flächen des R_7 und R_8 mit möglicherweise fünfdimensionalem Schmiegraum zu gewinnen. Da die allgemeinste Integralfläche der Mongeschen Gleichung (1) $(n \geqq 5)$ von $n - 5$ willkürlichen analytischen Funktionen zweier Parameter abhängt[18]) gleich wie der allgemeinste binäre biquadratische Fundamentaltensor $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$,[19]) wird man die Existenz allgemeinster totalisotroper Flächen erst im R_8, diejenige der restlichen aus der Klassifizierung des biquadratischen Fundamentaltensors $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$ her bekannten Typen solcher Flächen mit äquianharmonischen bzw. dreifachem bzw. zweifachem[20]) Netz zweifachisotroper Flächenkurven bereits im R_7 erwarten können.

*

W-projekce totálně isotropních ploch I.

(Obsah předešlého článku).

Teorie totálně isotropních ploch v komplexním euklidickém n-dimensionálním prostoru R_n t. j. dvojdimensionálních integrálů Monge-ovy diferencialní rovnice:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 = 0$$

jest teorií všech rozvinutelných (euklidických) binárních elementů oblouku v prostoru R_{n-2} ve smyslu: „W-projekce“:

$$x_1 = x_1,\ x_2 = x_2, \ldots,\ x_{n-2} = x_{n-2},\ x_{n-1} = iu_1,\ x_n = iu_2,\ i = \sqrt{-1}.$$

Známé výsledky pro $4 \leqq n \leqq 6$ z teorie totálně isotropních ploch lze tímto způsobem nově interpretovati v prostorech o dimensi $n - 2$, kdež $2 \leqq n - 2 \leqq 4$.

---

17) Vgl. [8]).
18) Vgl. [2]) (J. Lense, insbesondere S. 180).
19) Vgl. [2]) **36**, 551, **38**, §§ 7, 9.
20) Vgl. [2]) **35**, § 2.