Jan Vojtěch

O vytvoření kollineace projekcemi nebo homologiemi

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 3, 324--336

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121469

volném stadiu křivky obr. 3; velmi velikými odpory snadno docílíme prvého stadia, obdobného jiskře „nekondensované“, doutnavého výboje.

Předchozími vývody, doufám, že jsem Vám s důstatek nastínil veliký význam, který mají charakteristiky pro pochopení zjevů el. výbojů. Jest jen litovati, že vzhledem k velikým obtížím předmětu jest fysikální literatura dosud velmi chudou na systematické jich zkoumání, které mimo jiné často vyžaduje velikých prostředků experimentálních. Doufejme, že za dnešního mohutného vzmachu vědecké práce i tato mezera bude v brzku vyplněna tak, aby dnes mnou pouze naskizzovaný obraz mohl zdárně býti dokreslen.

O vytvoření kollineace projekcemi nebo homologiemi.

Napsal **Jan Vojtěch** v Brně.

Dva základní útvary geometrické (zejména 1. řádu) slují podle definice *Cremonovy* projektivní (kollineární), je-li možno jeden z druhého obdržeti konečným počtem průmětů a řezů. První část tohoto článku zabývá se úkolem udati co možná jednoduchou konstrukci projektivního vztahu dvou nesoumístných útvarů bodových n-tého řádu na tomto základě a nalézti tak nejmenší počet projekcí a řezů ke konstrukci té nutných. V části druhé obsaženo je řešení obdobného úkolu pro dva soumístné útvary základní, jichž kollineace sestrojena jako produkt kollineací nejjednodušších, totiž homologií.

Postup při výkladu zvolen byl ten, že příslušné úvahy provedeny nejdříve pro bodové útvary nejnižších řádů; jednak jsou tyto o sobě důležité, jednak činí výklad o útvarech n-tého řádu (o prostorech n-rozměrných) přístupnější. Bez tohoto zřetele mohlo býti pojednání stručnější.

Uspořádání věci jest jednotné; nové jsou některé konstrukce a odůvodnění výsledků.

I. Vytvoření kollineace projekcemi a řezy.

1. Dvě projektivní řady bodové *nesoumístné*, jichž přímky protínají se v bodě samodružném, jsou — jak známo — perspektivní. Jestliže v případě obecném průsečík dvou přímek neodpovídá sobě samému v projektivním vztahu obou řad jejich, lze jednu řadu převésti v druhou projektivní dvěma transformacemi perspektivními. Rozumějme totiž transformací perspektivní (*perspektivností*) převedení útvaru projekcí z bodu mimo něj ležícího a řezem v útvar stejnojmenný. Projektivnost dvou řad bodových budiž pak určena třemi dvojicemi korrespondujících bodů A a A', B a B', C a C'. Z rozmanitých způsobů, jimiž možno řadu $ABC\ldots$ na přímce p převésti v projektivní řadu $A'B'C'\ldots$ na přímce p', užijeme tohoto: Na spojnici dvou bodů sobě odpovídajících AA' zvolíme bod O_1 a z něho promítneme řadu $ABC\ldots$ na přímku p_1 jdoucí bodem A' v řadu $A'B_1C_1\ldots$ Řada $A'B_1C_1\ldots$ jest nyní perspektivní k řadě $A'B'C'\ldots$, majíc s ní společný element samodružný, t. j. řadu $A'B_1C_1\ldots$ převedeme v $A'B'C'\ldots$ perspektivností o středu $O_2 \equiv (B_1B', C_1C')$.

Sestrojení toto zůstává v platnosti i pro řady bodové, jichž přímky p a p' neleží v téže rovině; při mimoběžných přímkách p a p' nutno pouze toho dbáti, aby zvolená přímka p_1 byla s přímkou p v téže rovině. Platí tedy:

Projektivnost dvou nesoumístných řad bodových (jichž přímky leží v rovině nebo v prostoru) *možno vytvořiti nejvýše dvěma perspektivnostmi.*

2. Vezměme v úvahu dvě kollineární nesoumístná (rovinná) pole bodová. Obsahuje-li průsečnice rovin obou polí body vesměs samodružné, jsou pole taková ovšem perspektivní. Jestliže dvě kollineární pole mají společný jen jeden bod sobě samému odpovídající (na průsečnici), jest možno jedno pole převésti v druhé dvěma perspektivnostmi. Dejme tomu totiž, že kollineace rovin ϱ a ϱ' určena je dvojicemi korrespondujících bodů $A \equiv A'$, B a B', C a C', D a D'. I promítneme nejprve ze středu perspektivnosti O_1 bodových řad AB a $A'B'$, t. j. z průsečíku spoj-

nice BB' a spojnice EE' bodů $E \equiv (AB, CD)$ a $E' \equiv (A'B', C'D')$ pole ϱ na pole ϱ_1, jehož rovinu položíme přímkou $A'B'$; body $ABCD \ldots$ přejdou tím v body $A'B'C_1D_1 \ldots$ Pole bodové na rovině ϱ_1 je potom perspektivní k poli roviny ϱ' dle středu O_2, jenž je průsečíkem spojnic C_1C' a D_1D' (ležících v téže rovině, protože C_1D_1 a $C'D'$ protínají se v bodě E').

Budiž v obecném případě kollineace nesoumístných polí ϱ a ϱ' stanovena tím, že bodům A, B, C, D příslušejí body A', B', C', D'. Ze středu O_1 zvoleného na spojnici AA' promítněme ϱ na rovinu ϱ_1 položenou bodem A': body $ABCD \ldots$ přejdou tím v body $A'B_1C_1D_1 \ldots$ a případ obecný převeden tím na předcházející, ježto kollineární roviny ϱ_1 a ϱ' mají společný bod A' samodružný. Promítneme-li tedy podruhé ϱ_1 ze středu $O_2 \equiv (B_1B', E_1E')$, kde $E_1 \equiv (A'B_1, C_1D_1)$, $E' \equiv (A'B', C'D')$, na rovinu ϱ_2 položenou přímkou $A'B'$, přejdou body $A'B_1C_1D_1 \ldots$ v body $A'B'C_2D_2 \ldots$; třetím promítnutím roviny ϱ_2 ze středu $O_3 \equiv (C_2C', D_2D')$ na rovinu ϱ' obdržíme konečně body $A'B'C'D' \ldots$ Shrnujeme:

Kollineaci dvou nesoumístných polí bodových možno vytvořiti nejvýše třemi transformacemi perspektivními.

V této obecné konstrukci a větě zahrnuty jsou mimo prve uvedený také tyto případy zvláštní: Odpovídá-li v kollineaci rovin ϱ a ϱ' přímka jim společná sobě samé tak, že kollineace určena je dvojicemi $A \equiv A'$, $B \equiv B'$, C a C', D a D', mohou se přímky CD a $C'D'$ protínati v bodě nutně samodružném (a ovšem různém od A i B); v tomto případě složena je průsečnice rovin z bodů veskrze samodružných, a roviny ty jsou perspektivní. Nebo se neprotínají a stačí dvě perspektivnosti k převedení jedné roviny v druhou; promítneme totiž ϱ nejprve třebas z průsečíku O_1 spojnice CC' a spojnice EE' bodů $E \equiv (AC, BD)$ a $E' \equiv (A'C', B'D')$ na rovinu ϱ_1 položenou přímkou $A'C'$, potom ϱ_1 z bodu $O_2 \equiv (B_1B', D_1D')$ na ϱ'. Korresponduje-li v kollineaci rovin ϱ a ϱ' jejich průsečnice sobě samé a je-li kollineace ta stanovena čtyřmi dvojicemi bodů sdružených, z nichž jedna nebo dvě dvojice leží na společné přímce rovin těch, možno applikovati obecnou konstrukci, jenže nutno vyjíti od dvojice bodů korrespondujících, jež neleží na průsečnici *).

3. Výsledek nalezený pro vytvoření projektivních řad bodových transformacemi perspektivními možno z části pozměniti, rozšíříme-li pojem perspektivnosti. Nazveme totiž perspektivní i dvě řady bodové v prostoru, lze-li je pokládati za řezy jejich přímek se svazkem rovin (1. řádu); osa svazku je osou perspektivnosti takových řad (řady ty jsou perspektivní dle přímky). Vzhledem k tomu můžeme část věty obsažené v odst. 1. vysloviti takto: *Dvě projektivní řady bodové, jichž přímky jsou mimoběžné, jsou vždy perspektivní* (dle přímky). Osou perspektivnosti je patrně spojnice obou středů O_1 a O_2, uvedených v konstrukci odst. 1.

Konstrukce projektivních řad bodových zůstává v platnosti, leží-li útvary ty v prostoru r-rozměrném S_r pro $r > 3$; neboť dvě různé přímky určují S_3 nebo S_2, a na tyto se konstrukce omezuje. Za to nutno doplniti úvahu odst. 2. o kollineárních polích rovinných.

Jestliže dvě roviny kollineárních polí bodových ϱ a ϱ' nemají žádného bodu společného, leží v S_5; jejich kollineace budiž stanovena opět čtyřmi dvojicemi korrespondujících bodů. I v tomto případě možno jedno pole převésti v druhé třemi transformacemi perspektivními. Stačí k tomu v podstatě konstrukce uvedená pro dvě roviny v S_3 s těmito doplňky: rovinu ϱ_1 musíme položiti bodem A' tak, aby ležela v prostoru trojrozměrném určeném rovinou ϱ a bodem A', rovinu ϱ_2 pak nutno položiti přímkou $A'B'$ v trojrozměrném prostoru, v němž leží ϱ_1 a B'. Stejně jsou nutny tři perspektivnosti k vytvoření kollineace dvou rovin ležících v S_4 tak, že průsečík jejich není bod samodružný; počet perspektivností, jež kollineaci dvou rovin uskutečňují, redukuje se však na dvě, je-li bod rovinám těm společný samodružný.

---

*) Srv. *F. Aschieri*, Geometria projettiva, 2. vyd. (Milán 1888), p. 264; *V. Dantscher* v. Kollesberg, Zur Collineation der Grundgebilde zweiter Stufe, Berichte des nat.-med. Vereines in Innsbruck, 18. (1889), p. 86—96.; *A Sannia*, Lezioni di geometria proiettiva, 2. vyd. (Neapol 1895), p. 384. a 407.; *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, díl 2. (1908) p. 8. (dle pís. sdělení Reyeova).

Obdobně jako pro dvě projektivní řady bodové v S_3 platí pro dvě kollineární pole bodová v S_5: *Dvě kollineární pole bodová, jichž roviny nemají bodu společného, jsou vždy perspektivní* (dle roviny). Nazveme totiž perspektivními dle roviny taková dvě rovinná pole, jež možno pokládati za řezy jejich rovin se svazkem (2. řádu) prostorů trojrozměrných o společné osové rovině. Tuto osovou rovinu perspektivnosti daných dvou kollineárních polí rovinných obdržíme jako rovinu určenou třemi středy perspektivností, jež kollineaci dle uvedené konstrukce vytvořují.

Také u dvou kollineárních polí, jichž roviny ležíce v S_4 mají ve svém průsečíku bod samodružný, lze dvě perspektivnosti (dle bodů) kollineaci vytvořující nahraditi jedinou perspektivností dle přímky: *Dvě kollineární pole bodová, jichž roviny mají jediný bod společný a to samodružný, jsou vždy perspektivní* (dle přímky). Základem této perspektivnosti jest svazek rovin (2. řádu) se společnou přímkou v S_4; osou perspektivnosti je spojnice obou středů perspektivností obyčejných, kterými se jedno pole převádí v druhé. K úplnosti si připomeňme, že dvě kollineární roviny se společnou přímkou bodů vesměs samodružných jsou perspektivní dle bodu; základem perspektivnosti té jest svazek paprskový (2. řádu) v S_3.

4. Předcházející úvahy o dvou nesoumístných projektivních přímkách a kollineárních rovinách můžeme rozšířiti na dvě nesoumístné soustavy bodové v lineárních prostorech n-rozměrných*). A platí:

Kollineaci dvou n-rozměrných prostorů nesoumístných možno vytvořiti nejvýše $n+1$ transformacemi perspektivními.

Kollineace dvou prostorů n-rozměrných S_n a S'_n budiž stanovena $n+2$ dvojicemi korrespodujících bodů $A, B, C, D, E, \ldots, K, L, M, N$ a $A', B', C', D', E', \ldots, K', L', M', N'$ (z nichž ovšem žádných $k+2$ dvojic neleží v prostoru k-rozměrném). Předpokládejme nejprve, že prostory S_n a S'_n se neprotínají, t. j. že jsou obsaženy v prostoru r-rozměrném, kde $r \geqq 2n+1$. Prostor S_n můžeme v prostor S'_n převésti touto konstrukcí:

*) Srv. *E. Bertini*, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi (Pisa 1907), p. 49. a násl.

Střed první perspektivnosti O_1 zvolíme na spojnici AA' a promítneme z něho S_n do prostoru $S_n^{(1)}$, jdoucího bodem A' a obsaženého v prostoru $(n+1)$-rozměrném, který je určen prostorem S_n a bodem A'; body $ABC \ldots MN \ldots$ přejdou tím v body $A'B_1C_1 \ldots M_1N_1 \ldots$ Střed druhé perspektivnosti O_2 zvolíme v průsečíku spojnic B_1B' a P_1P', kde P_1 je průsečík přímky $A'B_1$ a prostoru $(n-1)$-rozměrného $C_1D_1 \ldots M_1N_1$ a obdobně $P' \equiv (A'B', C'D' \ldots M'N')$. Bod O_2 existuje, protože přímky B_1P_1 a $B'P'$ leží v téže rovině majíce společný bod A'. Ze středu O_2 promítneme $S_n^{(1)}$ do prostoru $S_n^{(2)}$, jdoucího přímkou $A'B'$ a obsaženého v $(n+1)$-rozměrném prostoru, jenž je určen prostorem $S_n^{(1)}$ a bodem B'; transformací touto přejdou body $A'B_1C_1D_1 \ldots M_1N_1P_1 \ldots$ v body $A'B'C_2D_2 \ldots M_2N_2P' \ldots$ Za střed O_3 třetí perspektivnosti zvolíme průsečík spojnic C_2C' a Q_2Q', kde Q_2 je průsečík roviny $A'B'C_2$ a prostoru $(n-2)$-rozměrného $D_2E_2 \ldots M_2N_2$ a obdobně $Q' \equiv (A'B'C', D'E' \ldots M'N')$. Bod O_3 existuje, protože přímky C_2Q_2 a $C'Q'$ leží v jedné rovině, majíce bod P' společný; neboť předně leží roviny $A'B'P'C_2Q_2$ a $A'B'P'C'Q'$ v témž prostoru trojrozměrném, majíce přímku $A'B'P'$ společnou; rovina $A'B'C'$ protíná pak $(n-1)$-rozměrný prostor $C'D'E' \ldots M'N'$ v přímce jdoucí bodem C', na které leží jednak bod P' jako průsečík přímky $A'B$ a prostoru $C'D'E' \ldots M'N'$, jednak bod Q' jako průsečík roviny $A'B'C'$ a prostoru $D'E' \ldots M'N'$; obdobně dokážeme, že také body C_2, P' a Q_2 leží v přímce, protože totiž ležely v přímce body C_1, P_1 a Q_1, kde P_1 je průsečík přímky $A'B_1$ a prostoru $C_1D_1E_1 \ldots M_1N_1$, Q_1 pak průsečík roviny $A'B_1C_1$ a prostoru $D_1E_1 \ldots M_1N_1$; i protínají se přímky $C'Q'P'$ a C_2Q_2P' vskutku v bodě P'. Ze středu O_3 promítneme $S_n^{(2)}$ do prostoru $S_n^{(3)}$, který prochází rovinou $A'B'C'$ a je obsažen v prostoru $(n+1)$-rozměrném, určeném prostorem $S_n^{(2)}$ a bodem C'; body $A'B'C_2D_2 \ldots M_2N_2P'Q_2 \ldots$ přejdou tím v body $A'B'C'D_3 \ldots M_3N_3P'Q' \ldots$ Obdobně volíme další perspektivnosti, jichž možnost se obdobnými úsudky odůvodňuje jako prve; dospějeme takto k n-té perspektivnosti, za jejíž střed O_n zvolíme průsečík spojnic $L_{n-1}L'$ a $T_{n-1}T'$, kde $T_{n-1} \equiv (A'B'C' \ldots K'L_{n-1}, M_{n-1}N_{n-1})$ a $T' \equiv (A'B'C' \ldots K'L', M'N')$. Z bodu O_n promítneme $S_n^{(n-1)}$ do prostoru $S_n^{(n)}$, jdoucího prostorem $A'B' \ldots K'L'$ a obsaženého v prostoru $(n+1)$-rozměrném spolu s $S_n^{(n-1)}$ a bodem L'; body $A'B'C' \ldots K'L_{n-1} M_{n-1} N_{n-1} \ldots$ převedou se tím v body $A'B'C' \ldots K'L'M_n N_n \ldots$ Konečně zvolíme střed $(n+1$-ní perspektivnosti O_{n+1} v průsečíku spojnic $M_n M'$ a $N_n N'$. Bod O_{n+1} existuje, protože přímky $M_n N_n$ a $M'N'$ leží v téže rovině, protínajíce se v bodě T': neboť přímka $M_{n-1} N_{n-1} T_{n-1}$ přejde n-tou perspektivností v přímku $M_n N_n T'$, jež proto protíná přímku $M'N'T'$. Z bodu O_{n+1} promítneme naposled $S_n^{(n)}$ do prostoru S'_n, čímž body $A'B' \ldots L'M_n N_n \ldots$ přejdou v body $A'B' \ldots L'M'N' \ldots$

Jak patrno, převádí k prvních perspektivností, uvedeným postupem zvolených (pro $k = 1, 2, \ldots n-1, n$), k daných bodů prostoru S_n v k korrespondujících bodů prostoru S'_n; poslední perspektivnost pak dokončí převod ve zbývajících dvou bodech.

Na př. kollineaci dvou nesoumístných prostorů trojrozměrných S_3 a S'_3 (obsažených v S_7), která je stanovena korrespondujícími body A, B, C, D, E a A', B', C', D', E', možno takto uskutečniti čtyřmi perspektivnostmi: Ze středu O_1 zvoleného na AA' promítneme S_3 do prostoru $S_3^{(1)}$, položeného bodem A' v prostoru čtyřrozměrném spolu s S_3 a A'. Ze středu $O_2 \equiv (B_1 B', F_1 F')$, kde $F_1 \equiv (A'B_1, C_1 D_1 E_1)$ a $F' \equiv (A'B', C'D'E')$, promítneme $S_3^{(1)}$ do prostoru $S_3^{(2)}$, jdoucího přímkou $A'B'$ a ležícího spolu s $S_3^{(1)}$ a B' v témž prostoru čtyřrozměrném. Ze středu $O_3 \equiv (C_2 C', G_2 G')$, kde $G_2 \equiv (A'B'C_2, D_2 E_2)$, $G' \equiv (A'B'C', D'E')$, promítneme $S_3^{(2)}$ do prostoru $S_3^{(3)}$, obsahujícího rovinu $A'B'C'$ a obsaženého v prostoru čtyřrozměrném spolu s $S_3^{(2)}$ a C'. Konečně ze středu $O_4 \equiv (D_3 D', E_3 E')$ promítneme $S_3^{(3)}$ do prostoru S'_3. Při tom transformace bodů postupuje z $ABCDE \ldots$ do $A'B_1 C_1 D_1 E_1 \ldots$, do $A'B'C_2 D_2 E_2 \ldots$, do $A'B'C'D_3 E_3 \ldots$, do $A'B'C'D'E' \ldots$ Existence středů perspektivností uvedených odůvodňuje se, jak naznačeno: O_2 existuje, protože $B_1 F_1$ a $B'F'$ se protínají v A'; O_3 existuje, protože $C_2 G_2$ a $C'G'$ protínají se v F'; konečně O_4 existuje, protože $D_3 E_3$ a $D'E'$ protínají se v G'.

Konstrukce a věta, uvedené pro dva prostory n-rozměrné, jež se neprotínají, platí i pro nesoumístné prostory se společným prostorem k-rozměrným (pro $k = 0, 1, \ldots, n-1$). Z $n+2$ dvojic korrespondujících bodů může ovšem v společném prostoru k rozměrném ležeti nejvýše $k+1$ dvojic, takže aspoň 2 dvojice bodů těch musí ležeti mimo prostor společný. Při konstrukci kollineace perspektivními transformacemi musíme vyjíti od dvojice, jež není obsažena v prostoru společném.

5. Při uvedené konstrukci kollineace dvou prostorů S_n a S'_n dospějeme, jak z popisu jejího vysvítá, prvními $k+1$ transformacemi perspektivními (pro $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) ke $(k+1)$-nímu pomocnému prostoru $S_n^{(k+1)}$, jenž má s prostorem S'_n společný prostor k-rozměrný, složený z bodů vesměs samodružných. Tento prostor $S_n^{(k+1)}$ může tedy býti převeden v kollineární prostor S'_n, s nímž má společný k-rozměrný prostor bodů samodružných, $n+1-(k+1) = n-k$ transformacemi perspektivními. I lze větu dokázanou v odst. 4. takto doplniti:

Kollineaci dvou nesoumístných prostorů n-rozměrných, jež mají společný prostor k-rozměrný s body vesměs samodružnými (pro $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$), *možno vytvořiti $n-k$ perspektivnostmi.*

Odůvodněná právě redukce počtu perspektivností, nutných k uskutečnění kollineace dvou prostorů n-rozměrných, se nezmění, i když prostory S_n a S'_n mají společný prostor l-rozměrný, kde $l > k$, v němž však pouze prostor k-rozměrný obsahuje body vesměs samodružné.

Případ dvou prostorů kollineárních, jež nemají žádného bodu společného, lze sem zahrnouti pro $k = -1$.

6. Věty odvozené v odst. 4. a 5. o vytvoření kollineace dvou nesoumístných prostorů n-rozměrných, jež nemají bodu společného nebo mají společný pouze prostor k-rozměrný s body veskrze samodružnými (pro $k = 0, 1, \ldots, n-1$), můžeme nahraditi jinými větami.

Definujme dvě bodové soustavy n-tého řádu v prostorech S_n a S'_n jako perspektivní (v širším smyslu) a to dle prostoru m rozměrného (pro $m = 0, 1, 2, \ldots, n$), mohou-li býti pokládány za řezy prostorů těch se svazkem n-tého řádu prostorů $(m+1)$-rozměrných o společném (osovém) prostoru m-rozměrném. Možno pak větu o $n+1$ perspektivnostech (dle bodu), nutných pro konstrukci kollineace dvou prostorů S_n a S'_n bez společného elementu, zaměniti větou: *Dva kollineární prostory n-rozměrné, jež se neprotínají, jsou vždy perspektivní* (dle prostoru n-rozměrného). Základem této perspektivnosti jest svazek n-tého řádu prostorů $(n + 1)$-rozměrných, jehož osový prostor n-rozměrný určen jest $n + 1$ středy perspektivností dle bodů O_1; O_2 . . ., O_{n+}, uvedených v konstrukci odst. 4. Dva prostory této vlastnosti musí ležeti v prostoru (aspoň) S_{2n+1}.

Větu pak o $n - k$ perspektivnostech (dle bodu), potřebných ke konstrukci kollineace dvou prostorů S_n a S'_n, jež se protínají v prostoru S_k s body jen samodružnými, lze obdobně vysloviti také takto: *Dva kollineární prostory n-rozměrné protínající se v prostoru k-rozměrném s body vesměs samodružnými* (pro $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$) *jsou vždy perspektivní* (dle prostoru $(n - k - 1)$-rozměrného). Základní svazek této perspektivnosti jest svazek n-tého řádu prostorů $(n - k)$-rozměrných, jehož osový prostor má $n - k - 1$ rozměrů; je to prostor určený $n - k$ středy perspektivností, jež podle věty odst. 5. uskutečňují kollineaci prostorů S_n a S'_n.

Obě věty zde uvedené lze shrnouti v jednu; prvá je totiž v druhé obsažena pro $k = - 1$.

II. Kollineace jako produkt homologií.

7. Kollineace K dvou *soumístných* bodových polí rovinných ϱ a ϱ' budiž dána čtyřmi dvojicemi korrespondujících bodů A, B, C, D a A', B', C', D' (z nichž žádný není samodružný). Sestrojme tuto kollineaci na základě nejjednoduššího typu rovinných kollineací, totiž *homologie*, při které jest invariantní řada bodová na přímce o a svazek paprskový se středem O (mimo o).

Za střed O_1 první homologie H_1 zvolíme kterýkoli bod na spojnici AA' dvou bodů sobě v kollineaci odpovídajících, za osu homologie o_1 pak libovolnou přímku v rovině; O_1 ani o_1 nesmí ovšem býti incidentní s body uvedenými. Určíme-li mimo to homologii H_1 tak, aby v ní bodu A odpovídal bod A', přejdou při ní body $ABCD$ rovinného pole ϱ v body $A'B_1C_1D_1$ soumístného pole ϱ_1. Střed O_2 druhé homologie H_2 položíme do průsečíku spojnic B_1B' a E_1E', kde $E_1 \equiv (A'B_1, C_1D_1)$ a $E' \equiv (A'B', C'D')$, osu o_2 položíme bodem A' a bodu B_1 přiřadíme bod B'. I přejdou homologií H_2 body $A'B_1C_1D_1$ roviny ϱ_1 v body $A'B'C_2D_2$ soumístného pole ϱ_2. Rovinné pole ϱ_2 jest však homologické s polem rovinným ϱ'; neboť transformace roviny ϱ_2 v rovinu ϱ' jest předně jakožto produkt kollineací $H_2^{-1}H_1^{-1}K$ rovněž kollineace, za druhé jest při ní přímka $A'B'$ složena z bodů vesměs samodružných, obsahujíc tři body samodružné A', B', E'. I převedeme body $A'B'C_2D_2$ v body $A'B'C'D'$, zvolíme-li za osu o_3 třetí homologie H_3 přímku $A'B'$, za střed její O_3 průsečík spojnic C_2C' a D_2D' a učiníme-li k bodu C_2 korrespondujícím bod C'; přímky v H_3 homologické C_2D_2 a $C'D'$ protínají se vskutku na ose o_3 ($\equiv A'B'$ v bodě E'). Jest tedy takto *) daná kollineace K sestrojena třemi homologiemi: $K = H_1H_2H_3$, a platí:

Kollineaci v rovině možno rozložiti v produkt nejvýše tří homologií.

Protože první homologii lze zvoliti ∞^3 způsoby (∞^1 poloh středu O_1, ∞^2 poloh osy o_1), druhou pak ∞^1 způsoby (∞^1 poloh osy o_2). možno uvedený rozklad provésti ∞^4 způsoby.

8. Obdobně rozložíme kollineaci dvou soumístných soustav prostorových (v prostoru trojrozměrném) S_3 a S'_3 v produkt homologií. Budiž taková kollineace stanovena pěti dvojicemi bodů korrespondujících A, B, C, D, E a A', B', C', D', E' v obecné poloze. Střed O_1 homologie H_1 zvolíme na spojnici AA', osovou rovinu její ω_1 libovolně (oboje mimo A, A'); homologii tuto určíme mimo to požadavkem, aby bod A převáděla v bod A'. H_1 transformuje tedy body $ABCDE$ soustavy S_3 v body $A'B_1C_1D_1E_1$ soustavy $S_3^{(1)}$. Homologie H_2 ať má střed O_2 v průsečíku spojnic B_1B' a F_1F', kde $F_1 \equiv (A'B_1, C_1D_1E_1)$ a $F' \equiv (A'B', C'D'E')$, který existuje, protože přímky B_1F_1 a $B'F'$ mají společný bod A'; osová rovina její ω_2 ať prochází bodem A' a bodu B_1 ať v H_2 odpovídá bod B'. Při této volbě trans-

*) *F. Aschieri*, Geometria projettiva, p. 265., udává konstrukci složitější (ze 4 homologií). Srv. *A. Sannia*, Lezioni di geometria proiettiva, p. 410—411.

formuje H_2 body $A'B_1C_1D_1E_1(F_1)$ soustavy $S_3^{(1)}$ v body $A'B'C_2D_2E_2(F')$ soustavy $S_3^{(2)}$; v $S_3^{(2)}$ má přímka $A'B'(F')$ body vesměs samodružné. Prvky určující homologii H_3 zvolíme takto: střed O_3 v průsečíku spojnic C_2C' a G_2G', kde $G_2 \equiv (A'B'C_2, D_2E_2)$ a $G' \equiv (A'B'C', D'E')$, rovinu ω_3 jdoucí přímkou $A'B'$, C' pak za bod odpovídající bodu C_2. Že přímky C_2C' a G_2G' se vskutku protínají v O_3, plyne odtud, že přímky C_2G_2 a $C'G'$ leží v téže rovině, majíce bod F' společný (roviny $A'B'C'$ a $C'D'E'$ protínají se totiž v přímce, jež obsahuje bod C' a F' i G', obdobně roviny $A'B'C_2$ a $C_2D_2E_2$ v přímce obsahující bod C_2, jakož i F' a G_2). Transformací H_3 přecházejí body $A'B'C_2D_2$ $E_2(F'G_2)$ v $S_3^{(2)}$ do bodů $A'B'C'D_3E_3(F'G')$ soustavy $S_3^{(3)}$; $S_3^{(3)}$ má rovinu $A'B'C'(F'G')$ bodů samodružných. Konečně homologie H_4 převádí $S_3^{(3)}$ v S'_3, zvolíme-li její střed O_4 v průsečíku spojnic D_3D' a E_3E', osovou rovinu ω_4 v rovině $A'B'C'$ a dvojici D_3, D' za body korrespondující. Existence bodu O_4 vysvítá z toho, že přímky D_3E_3 a $D'E'$ mají společný bod G'. Vidíme tedy*), že platí $K = H_1H_2H_3H_4$, t. j.

Kollineaci prostoru trojrozměrného lze rozložiti v produkt nejvýše čtyř homologií.

Je to možno ∞^7 způsoby, jak z popisu konstrukce vyplývá.

9. Uvedenou konstrukci lze bezprostředně rozšířiti na případ prostoru n-rozměrného. Je-li kollineace dvou soumístných bodových soustav n-tého řádu S_n a S'_n určena $n+2$ dvojicemi bodů korrespondujících $A, B, C, D, \ldots, G, H, I, \ldots, L, M, N$ a $A', B', C', D', \ldots, G', H', I', \ldots, L', M', N'$ v obecné poloze, můžeme od soustavy S_n dospěti k soustavě S'_n těmito homologiemi:

Střed O_1 homologie H_1 zvolíme na spojnici bodů sobě odpovídajících AA', osový prostor Ω_1 v poloze libovolné (obojí mimo A i A'), body A a A' za korrespondující v H_1; soustavu S_n transformuje H_1 v soustavu $S_n^{(1)}$ s body $A'B_1C_1D_1 \ldots L_1M_1N_1$. Homologii H_2 určíme potom tím, že střed její O_2 položíme do

*) Srv. *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, díl 3. (1909), p. 24—25. *Sannia*, l. c. p. 420—421. — *Aschieri*, l. c. p. 315—316, podává konstrukci značně složitější (ze 6 homologií).

průsečíku spojnic B_1B' a P_1P', kde $P_1 \equiv (A'B_1, C_1D_1 \ldots M_1N_1)$ a $P' \equiv (A'B', C'D' \ldots M'N')$ — přímky B_1P_1 a $B'P'$ se totiž protínají v A' —, osový prostor Ω_2 položíme bodem A' (mimo B_1 a B'), za body korrespondující v H_2 zvolíme pak B_1 a B'; H_2 převádí soustavu $S_n^{(1)}$ v soustavu $S_n^{(2)}$ s body $A'B'C_2D_2 \ldots L_2M_2N_2$. V kollineaci soustav $S_n^{(2)}$ a S'_n jsou body přímky $A'B'$ vesměs samodružné (mimo A' a B' je totiž na přímce té i bod P' samodružný). Soustavu $S_n^{(2)}$ převedeme v $S_n^{(3)}$ homologií H_3: její střed O_3 dáme do průsečíku spojnic C_2C' a Q_2Q', kde $Q_2 \equiv (A'B'C_2, D_2 \ldots M_2N_2)$ a $Q' \equiv (A'B'C', D' \ldots M'N')$ — přímky C_2Q_2 a $C'Q'$ protínají se totiž v bodě P' —, osový prostor Ω_3 položíme přímkou $A'B'$ (mimo C_2 a C'), body C_2 a C' učiníme v H_3 sdruženými; tato homologie transformuje body $A'B'C_2D_2 \ldots M_2N_2$ v body $A'B'C'D_3 \ldots M_3N_3$. V kollineaci soustav $S_n^{(3)}$ a S'_n jsou všechny body roviny $A'B'C'$ samodružné (jsouť tam samodružné body A', B', C' a Q'). Tímto způsobem pokračujeme dále, transformujíce soustavu $S_n^{(i-1)}$ v soustavu $S_n^{(i)}$ homologií H_i; její střed O_i zvolíme v průsečíku dvou spojnic bodů korrespondujících v kollineaci mezi $S_n^{(i-1)}$ a S'_n, z nichž první spojuje body J_{i-1}, J', druhá pak body, ve kterých prostory $A'B'C' \ldots H'J_{i-1}$ a $A'B'C' \ldots H'J'$ protínají prostory určené ostatními body korrespondujícími v $S_n^{(i-1)}$ a S'_n (danými nebo vzniklými z daných homologiemi předchozími) — obě spojnice se protínají, protože dotčené čtyři body leží v téže rovině s průsečíkem prostorů $A'B'C' \ldots H'$ a $J' \ldots L'M'N'$ —; osový prostor její Ω_i položíme $(i - 1)$-rozměrným prostorem bodů $A'B'C' \ldots H'$, samodružných v kollineaci mezi $S_n^{(i-1)}$ a S'_n; homologii H_i určíme mimo to tím, že v ní bodu J_{i-1} přiřadíme bod J'. Tak docílíme pokaždé, že mezi novou soustavou $S_n^{(i)}$ a soustavou konečnou S'_n vznikne kollineace s vyšším prostorem bodů samodružných, a zajistíme mimo to existenci středu další homologie H_{i+1}, obdobně volené. I dospějeme po applikaci n homologií k soustavě $S_n^{(n)}$ s body $A'B'C' \ldots L'M_nN_n$; v kollineaci mezi $S_n^{(n)}$ a S'_n jest $(n - 1)$-rozměrný prostor určený body $A'B'C' \ldots L'$ složen z bodů veskrze samodružných a jest tedy kollineace tato homologií. Převádí proto $(n + 1)$-ní homologie H_{n+1} se středem $O_{n+1} \equiv (M_nM', N_nN')$ — přímky M_nN_n a $M'N'$ se totiž protínají v průsečíku prostoru $A'B'C' \ldots L'$ s přímkou $M'N'$ —, s osovým prostorem $\Omega_{n+} \equiv A'B'C' \ldots L'$ a s korrespondujícími body M_n, M' (N_n, N') soustavu $S_n^{(n)}$ v S'_n. Platí tedy věta:

Kollineaci prostoru n-rozměrného jest možno rozložiti v produkt nejvýše $n+1$ homologií.

Rozklad ten lze provésti ∞^p způsoby, kde

$$p = 1 + \tfrac{1}{2} n (n+1).$$

10. Z konstrukce právě popsané vysvítá, že prvními $k+1$ homologiemi $H_1, H_2, \ldots H_k, H_{k+1}$ postupně provedenými vznikne ze soustavy S_n soustava $S_n^{(k+1)}$, která je kollineární se soustavou S'_n, a že v kollineaci těchto soustav $S_n^{(k+1)}$ a S'_n existuje k-rozměrný prostor složený z bodů vesměs samodružných. Můžeme tedy soustavu $S_n^{(k+1)}$ transformovati v soustavu S'_n homologiemi v počtu $n+1-(k+1) = n-k$.

Kollineaci v prostoru n-rozměrném, při níž existuje k-rozměrný prostor složený z bodů samodružných, jest možno rozložiti v n—k homologií.

Homologie tyto volíme týmž způsobem, jak uvedeno v případě obecném. Je-li totiž kollineace dvou soumístných soustav n-tého řádu S_n a S'_n dána k-rozměrným prostorem S_k bodů samodružných a $n-k+1$ dvojicemi bodů korrespondujících $A, B, C, D \ldots$ a $A', B', C', D' \ldots$, volíme střed první homologie v průsečíku spojnic AA' a PP', kde $P \equiv (S_k A, BCD \ldots)$ a $P' \equiv (S_k A', B'C'D' \ldots)$, osový prostor její položíme prostorem S_k (mimo A, A') a body A, A' učiníme v homologii té korrespondujícími. Atd.*)

*) *F. Aschieri*, Sulla trasformazione omografica generale di uno spazio lineare di specie qualunque, Rendiconti Ist. Lombardo, (2) 18. (1885), p. 989—999., dokazuje pouze, že kollineaci prostoru n-rozměrného možno uskutečniti konečným počtem homologií. V referátě o tomto pojednání udává *C. Segre*, Jahrbuch über die Fortschritte der Math. 17. (1888), p. 613, bez důkazu minimální počet homologií takových. —

V případech, kdy v kollineaci dáno několik prostorů základních (t. j. s body vesměs samodružnými), možno homologie kollineaci vytvořující voliti se zřetelem ke všem těmto prostorům. Srv. *J. Vojtěch*, Typy a grupy kollineací v S_3, Časopis math. a fys., 38. (1908).

Budiž zde vzpomenuto pouze nejobecnější kollineace s $n+1$ body samodružnými, jež mimo to stanovena je jednou dvojicí bodů korrespondujících A, A'. Za středy n homologií-složek můžeme tu zvoliti n z těchto bodů $O_1, O_2, \ldots, O_n$ a za osové prostory jejich vždy prostor určený ostat-