Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef Kounovský

Základové projektivní geometrie. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 3, 369--377

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121466

anebo klademe-li

$$-\frac{\mathsf{A}_{\varrho-1}}{\mathsf{A}_{\varrho-2}} = d_\varrho, \quad x + \beta_\varrho = b_\varrho(x), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \varphi_\varrho(x) &= b_\varrho(x)\,\psi_{\varrho-1}(x) + d_\varrho\,\psi_{\varrho-2}(x), \\ \varphi_\varrho(x) &= b_\varrho(x)\,\varphi_{\varrho-1}(x) + d_\varrho\,\varphi_{\varrho-2}(x). \end{aligned} \tag{3'}$$

Při tom jest ovšem $a \gtrless 1$ a $\varrho - 2 \geqq \varrho_0$. Jestliže $a = 1$, jest

$$\psi_\varrho(x)\,\varphi_{\varrho-1}(x) - \psi_{\varrho-1}(x)\,\varphi_\varrho(x) = \frac{-\mathsf{A}_{\varrho-1}}{2\varrho - 1}, \tag{2'}$$

Rovnice (3′) zůstávají v platnosti i při $a = 1$, při čemž však jest $d_\varrho = -\frac{2\varrho - 3}{2\varrho - 1}\frac{\mathsf{A}_{\varrho-1}}{\mathsf{A}_{\varrho-2}}$.

(Dokončení.)

Základové projektivní geometrie.

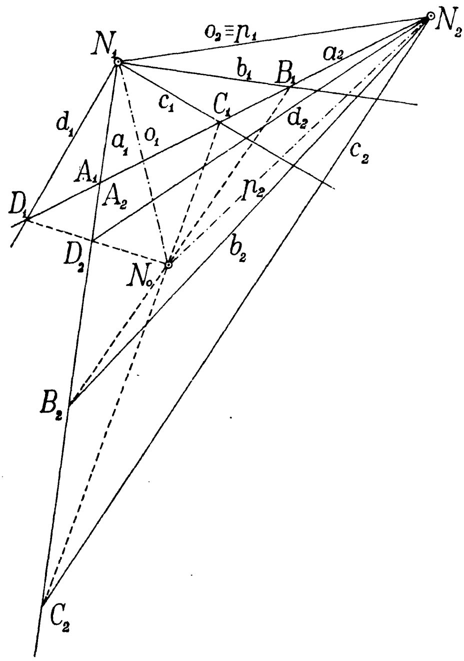
Studujícím středních škol podává dr. **Jos. Kounovský.**

(Dokončení.)

V obr. 6. jsou dány dva projektivní svazky o vrcholech N_1 a N_2 třemi dvojinami sdružených paprsků a_1a_2, b_1b_2 a c_1c_2. Sestrojiti d_2, dáno-li libovolně d_1.

Protněme přímku a_1 paprsky $a_2, b_2, c_2, \ldots$ v řadě A_2, $B_2, C_2, \ldots$ a přímku a_2 paprsky $a_1, b_1, c_1, \ldots$ v řadě A_1, B_1, $C_1, \ldots$ Řady bodové $A_2, B_2, C_2, \ldots$ a $A_1, B_1, C_1, \ldots$ jsou projektivní, ježto však průsečík obou jest bodem samodružným $A_1 \equiv A_2$, jsou řady ty perspektivní a jsou řezy téhož svazku $b_0, c_0, \ldots$ o vrcholu N_0, stanoveném spojnicemi B_1B_2 a C_1C_2. Bod N_0 jest *perspektivní střed* svazků N_1 a N_2. Paprsek d_1 určí na a_2 bod D_1, spojnice D_1N_0 stanoví na a_1 bod D_2 a tím prochází žádaný d_2.

Řetěz perspektivních útvarů o nositelích N_1, a_2, N_0, a_1, N_2 odůvodňuje rovnost dvojpoměrů $(a_1b_1c_1d_1) = (a_2b_2c_2d_2)$, čímž ozřejměna konstrukce a ukázáno, že projektivita dvou paprskových svazků, určená třemi dvojinami sdružených prvků, skutečně existuje.



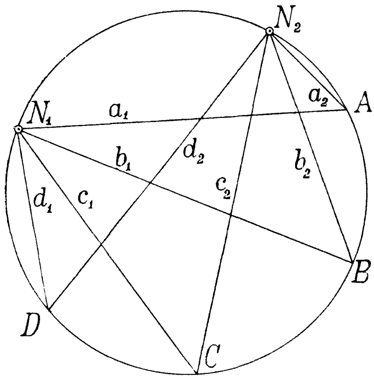
Obr. 6.

Snadná úvaha opět vysvětlí, že spojnice vrcholů svazků s perspektivním středem jsou paprsky sdružené se spojnicí ($o_2 \equiv p_1$) obou vrcholů.

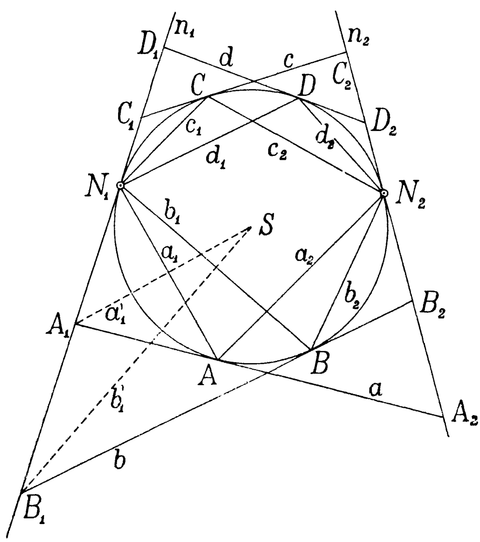
8. Spojíme-li dva body kružnice N_1 a N_2 (obr. 7.) se čtyřmi jejími body A, B, C, D paprsky a_1, b_1, c_1, d_1 resp. a_2, b_2, c_2, d_2, vzniknou dva paprskové svazky shodné (rovnost obvodových úhlů nad týmž obloukem) a téhož smyslu (souhlasné) ježto $(a_1 b_1 c_1 d_1) = (a_2 b_2 c_2 d_2)$, jsou svazky ty projektivní.

Kružnici možno tedy pokládati za křivku vytvořenou dvěma shodnými svazky paprskovými téhož smyslu. Kružnice prochází vrcholy svazků, body kružnice jsou průsečíky sdružených paprsků.

Vytkněme šest tečen kružnice n_1, n_2, a, b, c, d (obr. 8.) a jich dotyčné body N_1, N_2, A, B, C, D. Průsečíky tečen n_1 a n_2 s ostatními tečnami označme A_1, B_1, C_1, D_1 resp. A_2, B_2, C_2, D_2.



Obr. 7.



Obr. 8.

Mezi bodovými řadami A_1, B_1, C_1, D_1, . . . a A_2, B_2, C_2, D_2, . . . existuje vztah projektivní, který ukážeme následovně:

Spojíme-li bod N_1 s A, B, C, D paprsky a_1, b_1, c_1, d_1 a střed kružnice S s body A_1, B_1, C_1, D_1 paprsky a'_1, b'_1, c'_1, d'_1, jest patrně $N_1A \perp SA_1$, $N_1B \perp SB_1$, . . ., t. j.

$$(a_1b_1c_1d_1) = (a'_1b'_1c'_1d'_1) = (A_1B_1C_1D_1).$$

Učiníme-li obdobně s N_2 a na n_2, platí

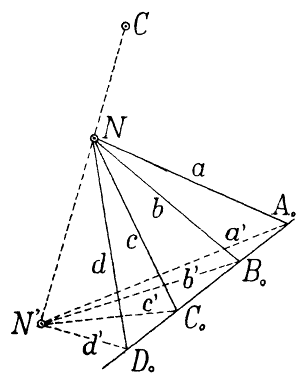
$$(a_2b_2c_2d_2) = (A_2B_2C_2D_2);$$

ježto pak

$$(a_1b_1c_1d_1) = (a_2b_2c_2d_2),$$

jest i

$$(A_1B_1C_1D_1) = (A_2B_2C_2D_2).$$



Obr. 9.

Body A_1, B_1, C_1, D_1, . . . přiřazeny jsou jednoznačně resp. bodům A_2, B_2, C_2, D_2, . . . a tedy obě bodové řady jsou projektivní.

Kružnici možno tedy pokládati za křivku vytvořenou dvěma projektivními řadami. Kružnice dotýká se obou řad, tečny kružnice jsou spojnice sdružených bodů obou projektivních řad.

9. Než přistoupíme ke kuželosečkám, všimněme si vlastnosti dvojpoměru prvků bodové řady nebo svazku paprskového a jich průmětů.

V obr. 9. promítněme svazek paprskový a, b, c, d, . . . o vrcholu N ze středu C na libovolnou rovinu do svazku a',

b', c', d', . . . o středu N'; A_0, B_0, C_0, D_0, . . . jsou stopy paprsků na průmětně. Ježto oba svazky N i N' jsou zory téže bodové řady A_0, B_0, C_0, D_0, . . ., jest $(abcd) = (a'b'c'd')$.

Dvojpoměr čtyř paprsků svazku rovná se dvojpoměru libovolného jich průmětu.

Že platí tato vlastnost i pro průmět bodové řady, jest zřejmo; řada i její průmět jsou řezy téhož svazku promítajících paprsků.

Hodnota dvojpoměru čtveřiny bodové řady nebo paprskového svazku se promítáním neruší.

Vlastnosti takové zovou se projektivní.

10. Promítneme-li obr. 7. a 8. do libovolné roviny, jest průmětem kružnice kuželosečka. Shodné svazky nemají sice již shodných průmětů, avšak rovnost dvojpoměrů se neruší a projektivní vztahy podržují svou platnost. I možno vysloviti věty:

I. *Kuželosečku možno sestrojiti dvěma projektivními svazky paprskovými. Kuželosečka prochází vrcholy svazků, body kuželosečky jsou průsečíky sdružených paprskův obou svazků.*

II. *Kuželosečku možno sestrojiti dvěma projektivními řadami. Kuželosečka dotýká se obou řad, tečny kuželosečky jsou spojnice sdružených bodů obou projektivních řad.*

Z toho ihned plyne, že kuželosečka jest určena pěti body nebo pěti tečnami. Jest možno vždy sestrojiti kružnici, jejímž průmětem daná kuželosečka jest. *) Příslušné body neb tečny na kružnici určují projektivní svazky resp. řady, i určuje též daných pět prvků kuželosečky projektivitu, jejímž použitím možno kuželosečku *lineárně* rýsovati.

Sestrojiti kuželosečku z daných pěti bodů. Spojnice libovolných dvou bodů kuželosečky s body ostatními určují projektivní svazky. Označme kterékoli dva z daných bodů jako vrcholy N_1 a N_2 projektivních svazků, zbývající body A, B, C stanoví

---

*) Z deskriptivní geometrie jest známo, že každou kuželosečkou možno proložiti celou soustavu rotačních kuželů. To stačí již k odůvodnění konstrukcí kuželoseček z projektivních svazků nebo řad.

tři dvojiny jich sdružených prvků. Dle obr. 6. možno pak k libovolnému paprsku d_1 rýsovati sdružený d_2 a průsečík obou jest dalším bodem D dané kuželosečky.

Snadná úvaha vysvětlí, že spojnice vrcholů svazků s perspektivním středem N_0 jsou tečnami dané kuželosečky.

Sestrojiti kuželosečku z daných pěti tečen. Průsečíky tečen kuželosečky na libovolných jejích dvou tečnách určují projektivní řady bodové. Označme kterékoli dvě z daných tečen jako nositelky n_1 a n_2 projektivních řad, zbývající tečny a, b, c stanoví tři dvojiny jich sdružených prvků A_1, B_1, C_1 a A_2, B_2, C_2. Dle obr. 5. možno k libovolnému bodu D_1 řady n_1 rýsovati na n_2 sdružený D_2, spojnice $D_1 D_2$ jest další tečnou dané kuželosečky.

Snadná úvaha vysvětlí, že perspektivní osa protíná řady v bodech dotyčných kuželosečky.

11. Sestrojování projektivních řad jest obdobno se sestrojováním projektivních svazků. Toto sdružení konstrukcí jest zvláštním případem *zákona reciprocity* či *duality* obecně v projektivní geometrii platného. *Bodům útvaru sdruženy jsou v útvaru duálním přímky a obráceně.* Na př. v obr. 5. leží průsečík B_0 spojnic $A_1 B_2 \equiv b_2$ a $A_2 B_1 \equiv b_1$ na perspektivní ose n_0 a v obr. 6. prochází spojnice b_0 průsečíků $a_1 . b_2 \equiv B_2$ a $a_2 . b_1 \equiv B_1$ perspektivním středem N_0. Pěkným použitím zákona duality jest duálné odvození důležitých dvou vět z projektivní geometrie kuželoseček, které určují vztah mezi libovolnými jejich šesti body resp. šesti tečnami.

Věta Pascalova.

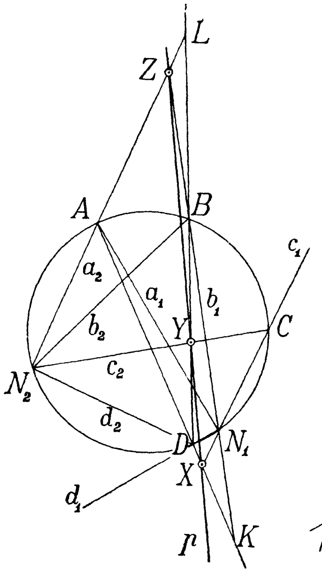
Šest bodů kuželosečky tvoří v libovolném seřazení šestiúhelník, jehož protější strany určují průsečíky ležící na téže přímce.

Označme šest bodů kuželosečky (obr. 10.) libovolně N_1, N_2, A, B, C, D. Spojíme-li body N_1 a N_2 s A, B, C, D

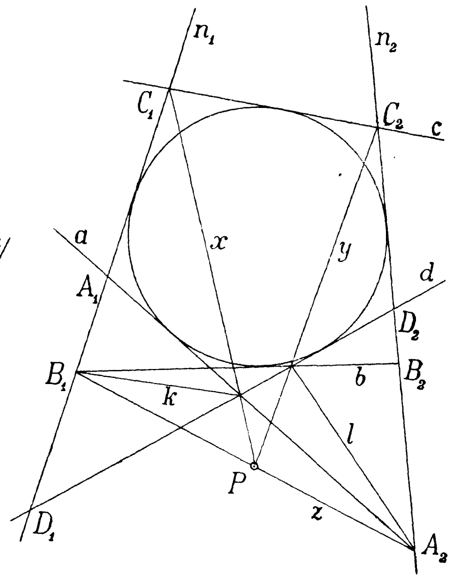
Věta Brianchonova.

Šest tečen kuželosečky tvoří v libovolném seřazení šestistran, jehož protější vrcholy určují spojnice procházející týmž bodem.

Označme šest tečen kuželosečky (obr. 11.) libovolně n_1, n_2, a, b, c, d. Průsečíky tečen n_1 a n_2 s tečnami a, b, c, d



Obr. 10.



Obr. 11.

paprsky a_1, b_1, c_1, d_1 resp. a_2, b_2, c_2, d_2, jest

$$(a_1 b_1 c_1 d_1) = (a_2 b_2 c_2 d_2).$$

Svazek a_1, b_1, c_1, d_1 stanoví na AD průsečíky A, K, X, D, svazek a_2, b_2, c_2, d_2 stanoví na BD průsečíky L, B, Y, D. Pak

$$(AKXD) = (LBYD).$$

Ježto v projektivních řadách A, K, X, D a L, B, Y, D jest jich průsečík samodružným bodem, jsou řady ty specielně perspektivní, tedy řezy téhož paprskového svazku, což znamená, že spojnice $AL \equiv a_2$,

buďtež A_1, B_1, C_1, D_1 resp. A_2, B_2, C_2, D_2; i jest

$$(A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_2 B_2 C_2 D_2).$$

Spojnice průsečíku tečen a a d s body A_1, B_1, C_1, D_1 stanoví svazek a, k, x, d, spojnice průsečíku tečen b a d s body A_2, B_2, C_2, D_2 stanoví svazek l, b, y, d. Pak

$$(akxd) = (lbyd).$$

Ježto v projektivních svazcích a, k, x, d a l, b, y, d jest spojnice vrcholů paprskem samodružným, jsou svazky ty specielně perspektivní, tedy zory téže bodové řady, což znamená, že průsečíky $a \,.\, l \equiv A_2$,

$KB \equiv b$, a $XY \equiv p$ protínají se v témž bodě Z. Jinak řečeno, leží body X, Y a Z na přímce p (Pascalově).

V šestiúhelníku N_1, B, D, A, N_2; C skutečně mají protější strany

N_1B a AN_2 průsečík Z,
BD a N_2C „ Y,
DA a CN_1 „ X.

V uvažovaném šestiúhelníku (seřazení šesti bodů) zove se d *přímka Pascalova.*

$k \,.\, b \equiv B_1$ a $x \,.\, y \equiv P$ leží na téže přímce z. Jinak řečeno, procházejí přímky x, y a z bodem P (Brianchonovým).

V šestistranu $n_1 . b$, d, a, n_2, c skutečně mají protější rohy

$n_1 . b$ a $a . n_2$ spojnici z,
$b . d$ a $n_2 . c$ „ y,
$d . a$ a $c . n_1$ „ x.

V uvažovaném šestistranu (seřazení šesti tečen) zove se P *bod Brianchonův.*

12. Obou vět možno při sestrojování kuželoseček s výhodou užíti.

Dáno pět bodů kuželosečky. Sestrojiti bod další. Označme body 1, 2, 3. 4, 5 a nový bod 6 pokládejme za průsečík přímky 16, která bodem 1 libovolně jest sestrojena, s kuželosečkou. Dle věty Pascalovy určují spojnice

12 a 45 bod III,
23 a 56 „ I,
34 a 61 „ II.

Body III a II možno sestrojiti, jich spojnice jest Pascalova přímka p. na té určuje spojnice 23 bod I a 15 určí na 16 bod 6.

Dáno pět bodů kuželosečky 1—5. Sestrojiti v bodě 5 tečnu. Označme bod s 5 soumezný 6. Tečna jeví se jako spojnice soumezných bodů 56. Pascalova přímka dá její sestrojení jako v případě předešlém.

Dáno pět tečen kuželosečky. Sestrojiti tečnu další. Označme tečny 1, 2, 3, 4, 5 a vytkněme na 1 bod, jímž procházeti má další tečna 6, t. j. zvolíme libovolně průsečík tečen 1 a 6.

Dle věty Brianchonovy určují průsečíky

1 . 2 a 4 . 5 spojnici III,
2 . 3 a 5 . 6 „ I,
3 . 4 a 6 . 1 „ II.

Přímky III a II možno sestrojiti, jich průsečík jest Brianchonův bod *B*, jeho spojnice I s průsečíkem 2 . 3 určuje na 5 průsečík 5 . 6, čímž tečna 6 stanovena.

Dáno pět tečen kuželosečky 1—5. Sestrojiti na 5 bod dotyčný. Označme 6 tečnu soumeznou s 5. Bod dotyčný jeví se jako průsečík soumezných tečen 5 . 6. Brianchonův bod dá jeho sestrojení jako v případě předešlém.

Podobně možno vět užíti, vchází-li do podmínek určovacích jedna nebo dvě tečny s bodem dotyčným, což zastupuje dva resp. čtyři prvky. Konstrukce ty, jakož i mnohé zvláštní, na př. strojení paraboly ze čtyř tečen (a páté nekonečně vzdálené), hyperboly, v jejímž určení jest bod asymptotický nebo asymptota a pod., ponechávají se již laskavým čtenářům.

Astronomická zpráva na červen, červenec a srpen 1913.

Veškerá časová udání vztahují se na meridián a čas středoevropský.

Slunce přechází v červnu ze souhvězdí Býka do souhvězdí Blíženců, v červenci do souhvězdí Raka a v srpnu do souhvězdí Lva.

Datum		Z	V	δ	Rovnice času
1913. VI.	1.	7^h58^m	15^h57^m	$+22^\circ01'$	$-\ 2^m28^s$
	6.	8 03	15 54	+ 22 37	— 1 39
	11.	8 07	15 51	+ 23 04	— 0 42
	16.	8 10	15 51	+ 23 21	+ 0 20
	21.	8 12	15 51	+ 23 27	+ 1 24
	26.	8 12	15 53	+ 23 23	+ 2 29