Antonín Pleskot

O jistém integrálu omezeném

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 4, 427--434

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121458`

$(n-h+2)$., nikoli už všechny stupně $(n-h+1)$.; pak z hořejších rovnic zbude pouze h nezávislých, existuje ∞^{h-1} samodružných bodů, jež vyplňují t. zv. základní prostor bodový $(h-1)$. rozměru S_{h-1}; h, jak patrno, musí býti ≥ 1. Obdobně z transformačních rovnic pro rovinu plyne existence základních prostorů rovinových; zákl. prostor bodový a rovinový, příslušné k témuž kořenu, slují konjugované. (Dokončení.)

O jistém integrálu omezeném.

Dr. **Ant. Pleskot**, prof. v Plzni.

V XVI. ročníku časopisu „Monatshefte f. Mathematik u. Physik" (str. 141—160) zabýval se p. G. Huber vyčíslením integrálu:

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin \varphi}{a-b \sin^2 \varphi}\, d\varphi, \tag{1}$$

v němž a i b realná čísla značí; při tom se vyslovil, že integrál tento nelze vyčístiti obvyklými methodami, nýbrž jen použitím volné integrační cesty.

Ukážeme, že možno bez pomoci volné integrace obvyklými methodami předložený integrál vyčísliti a k závěrku pak jiným způsobem spočívajícím na volné integraci předložený integrál vyčíslíme.

V integrálu hořejším, který lze patrně též psáti ve tvaru:

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin^2 \varphi}{a-b \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

zaveďme substituci:

$$t=\cot \varphi;$$

tím promění se v integrál;

$$J=-\frac{1}{2}\int_\infty^0 \frac{\log \frac{1}{1+t^2}\, dt}{a(t^2+1)-b}=\frac{1}{2}\int_\infty^0 \frac{\log(1+t^2)\, dt}{a(1+t^2)-b}.$$

Je-li $a = 0$, pak ovšem integrál nemá významu, nabývaje tvaru

$$J = -\frac{1}{2b}\int_{\infty}^{0} \log(1 + t^2)\, dt.$$

Předpokládejme tedy a různé od nully a zaveďme kratší označení α pro konstantu:

$$\frac{b}{a} = \alpha.$$

Tím nabývá tvaru:

$$J = \frac{1}{2a}\int_{\infty}^{0} \frac{\log(1 + t^2)\, dt}{1 + t^2 - \alpha}.$$

Pro $\alpha = 1$ možno integrál přímo vyčísliti; označíme-li jeho hodnotu J_1, pak

$$J_1 = \frac{1}{2a}\int_{\infty}^{0} \frac{\log(1 + t^2)\, dt}{t^2} = \frac{1}{2a}\Big/_{\infty}^{0} - \frac{\log(1 + t^2)}{t}$$

$$+ \frac{1}{2a}\int_{\infty}^{0} \frac{2dt}{1 + t^2};$$

ježto $\lim \dfrac{\log(1 + t^2)}{t^2}$ pro $t = 0$, i pro $t = \infty$ jest rovna nulle, a

$$\frac{1}{2a}\int_{\infty}^{0} \frac{2dt}{1 + t^2} = -\frac{\pi}{2a},$$

jest:

$$J_1 = -\frac{\pi}{2a}. \tag{2}$$

Je-li $\alpha < 1$, pak

$$\frac{\log(1 + t^2)}{1 + t^2 - \alpha} < \frac{\log(1 + t^2)}{t^2}$$

a proto konverguje předložený integrál i pro každé $\alpha < 1$. Pro $\alpha > 1$ stává se jmenovatel v mezích integračních dvakráte lineárně nullou a proto v tomto případě nemá významu.

Tím tedy stanovena podmínka, kdy integrál existuje; nutná a dostačující podmínka jest, aby

$$\frac{b}{a} = \alpha \leq 1.$$

Přistupme k jeho vyčíslení za podmínky $\alpha < 1$.

Poněvadž funkce pod integračním znamením jest sudou, možno dáti integrálu tvar:

$$J = \frac{1}{4a}\int_{\infty}^{-\infty} \frac{\log(1+t^2)}{1+t^2-\alpha}\,dt. \tag{3}$$

Derivováním dle α, což patrně v daných mezích pro $\alpha < 1$ jest dovoleno, obdržíme:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{1}{4a}\int_{\infty}^{-\infty} \frac{\log(1+t^2)\,dt}{(1+t^2-\alpha)^2}. \tag{4}$$

Částečnou integrací integrálu (3) však obdržíme:

$$J = \frac{1}{4a}\left[\frac{t\log(1+t^2)}{1+t^2-\alpha}\right]_{\infty}^{-\infty} - \frac{1}{4a}\int_{\infty}^{-\infty} t\,\frac{d}{dt}\,\frac{\log(1+t^2)}{1+t^2-\alpha}\,dt.$$

Poněvadž

$$\lim_{t=\pm\infty} \frac{t\log(1+t^2)}{1+t^2-\alpha} = 0,$$

jest

$$J = -\frac{1}{4a}\int_{\infty}^{-\infty} t\,\frac{d}{dt}\,\frac{\log(1+t^2)}{1+t^2-\alpha}\,dt.$$

Stanovíme-li differenciální poměr za integračním znamením, obdržíme:

$$J = -\frac{1}{2a}\int_{\infty}^{-\infty} \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)(1+t^2-\alpha)} + \frac{1}{2a}\int_{\infty}^{-\infty} \frac{t^2\log(1+t^2)}{(1+t^2-\alpha)^2}\,dt. \tag{5}$$

Integrál prvý na straně pravé možno vyčísliti rozkladem:

$$\frac{t^2}{(1+t^2)(1+t^2-\alpha)} = \frac{1}{\alpha(1+t^2)} + \frac{\alpha-1}{\alpha}\,\frac{1}{1+t^2-\alpha},$$

a proto

$$-\frac{1}{2a}\int_{\infty}^{-\infty} \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)(1+t^2-\alpha)} = -\frac{1}{2a\alpha}\int_{\infty}^{-\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$+\frac{1-\alpha}{2a\alpha}\int_{\infty}^{-\infty} \frac{dt}{1+t^2-\alpha} = \frac{\pi}{2a\alpha} + \frac{1-\alpha}{2a\alpha}\,.$$

$$\cdot\,\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{1-\alpha}}\right]_{\infty}^{-\infty} = \frac{\pi}{2a\alpha}\left(1-\sqrt{1-\alpha}\right). \tag{6}$$

Integrál druhý v rovnici (5) možno psáti ve tvaru:

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{\infty}^{-\infty}\frac{t^2\, log\,(1+t^2)\,dt}{(1+t^2-\alpha)^2}$$

$$=\frac{1}{2a}\int\limits_{\infty}^{-\infty}\frac{\{(1+t^2-\alpha)-(1-\alpha)\}\, log\,(1+t^2)\,dt}{(1+t^2-\alpha)^2}$$

$$=\frac{1}{2a}\int\limits_{\infty}^{-\infty}\frac{log\,(1+t^2)\,dt}{1+t^2-\alpha}-\frac{1-\alpha}{2a}\int\limits_{\infty}^{-\infty}\frac{log\,(1+t^2)\,dt}{(1+t^2-\alpha)^2}.$$

Přihlížíme-li k rovnici (4) možno proto psáti:

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{\infty}^{-\infty}\frac{t^2\, log\,(1+t^2)\,dt}{(1+t^2-\alpha)^2}=2J-2(1-\alpha)\frac{\partial J}{\partial \alpha}.$$

Vzhledem k této rovnici a rovnici (6) přechází rovnice (5) v differenciální rovnici:

$$J=\frac{\pi}{2a\alpha}(1-\sqrt{1-\alpha})+2J-2(1-\alpha)\frac{\partial J}{\partial \alpha}$$

čili v rovnici:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}-\frac{J}{2(1-\alpha)}-\frac{\pi}{4a\alpha}\,\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{1-\alpha}=0. \tag{7}$$

Integrál této lineární rovnice differenciální jest:

$$J=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\left(c-\frac{\pi}{2a}\, log\,(1+\sqrt{1-\alpha})\right).$$

Zbývá určiti konstantu c. Položme $\alpha=0$, pak

$$J=c-\frac{\pi}{2a}\, log\, 2.$$

Položíme-li však v rovnici (1) $\alpha=0$, t. j. $b=0$, pak integrál přechází ve známý jednoduchý integrál

$$J=\frac{1}{a}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} log\, sin\,\varphi\, d\varphi=-\frac{\pi}{2a}\, log\, 2.$$

z čehož plyne:

$$c=0,$$

a proto

$$J=-\frac{\pi}{2a\sqrt{1-\alpha}}\, log\,(1+\sqrt{1-\alpha}).$$

Stanovíme-li limitu J pro $\lim \alpha = 1$, pak obdržíme:

$$J = -\frac{\pi}{2a} \lim_{\alpha=1} \frac{\log(1+\sqrt{1-\alpha})}{\sqrt{1-\alpha}} = -\frac{\pi}{2a},$$

čímž dospíváme k téže hodnotě, kterouž jsme obdrželi v rovnici (2), když v integrálu předloženém položili jsme $\alpha = 1$.

Platí tedy obecně:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi \sin\varphi}{a - b\sin^2\varphi} = -\frac{\pi}{2a\sqrt{1-\frac{b}{a}}} \log\left(1+\sqrt{1-\frac{b}{a}}\right)$$

a sice pro $\frac{b}{a} \leqq 1$.

Stanovme ještě integrál daný

$$J = \frac{1}{4a}\int_{\infty}^{-\infty} \frac{\log(1+t^2)\,dt}{1+t^2-\alpha}$$

užitím volné integrační cesty a sice pro případ, že $\alpha < 1$.

Výpočet vypadne jednodušší, vezmeme-li v úvahu integrál

$$J_1 = \frac{1}{4a}\int_{\infty}^{-\infty} \frac{\log(t+i)}{1+t^2-\alpha}\,dt,$$

který s daným souvisí vztahem:

$$\frac{1}{4a}\int_{\infty}^{-\infty} \frac{\log(t+i)}{1+t^2-\alpha}\,dt = \frac{1}{8a}\int_{\infty}^{-\infty} \frac{\log(1+t^2)}{1+t^2-\alpha}\,dt$$

$$+\frac{i}{4a}\int_{\infty}^{-\infty} \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{t}\,\frac{dt}{1+t^2-\alpha}, \tag{I}$$

t. j.:

$$J_1 = \frac{1}{2}J + \frac{i}{4a}\int_{\infty}^{-\infty} \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{t}\,\frac{dt}{1+t^2-\alpha}.$$

Integrál $\int_{\infty}^{-\infty} \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{t}\,\frac{dt}{1+t^2-\alpha}$ lze snadno vyčísliti.

$\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{t}$ v mezích integračních roste nepřetržitě od 0 do π. Vezmeme-li dva elementy integrálu tohoto a sice pro hodnotu t a $-t$, pak

$$arc\,tg\,\frac{1}{t} + arc\,tg\left(-\frac{1}{t}\right) = \pi,$$

a ježto funkce $\frac{1}{1+t^2-\alpha}$ jest funkcí sudou, obdržíme sloučením těchto dvou elementů:

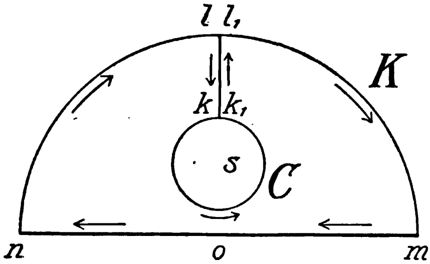
$$arc\,tg\,\frac{1}{t}\,\frac{dt}{1+t^2-\alpha} + arc\,tg\left(-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{1+t^2-\alpha}$$

$$= \frac{\pi}{1+t^2-\alpha}\,dt$$

a proto:

$$\frac{i}{4a}\int_{\infty}^{-\infty} arc\,tg\,\frac{1}{t}\,\frac{dt}{1+t^2-\alpha} = \frac{i\pi}{4a}\int_{\infty}^{0}\frac{dt}{1+t^2-\alpha}$$

$$= \frac{i\pi}{4a}\int_{\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\,arc\,tg\,\frac{t}{\sqrt{1-\alpha}} = -\frac{i\pi^2}{8a\sqrt{1-\alpha}}.$$



Obr. 1.

Rovnice (I) tedy nabude tvaru:

$$J = \frac{i\pi^2}{4a}\,\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} + \frac{1}{2a}\int_{\infty}^{-\infty}\frac{log\,(t+i)}{1+t^2-\alpha}\,dt. \qquad \text{(II)}$$

Integrál $\int_{\infty}^{-\infty}\frac{log\,(t+i)}{1+t^2-\alpha}$ možno snadno určiti, volíme-li za obor integrační půlkruh K nad osou X se středem v počátku o průměru mn (obr. 1.), jehož poloměr roste k nekonečnu.

V půlkruhu tom $log(i + t)$ nevymizí a proto funkce

$$\frac{log(i + t)}{1 + t^2 - \alpha}$$

má v oboru daném jen jeden singulární bod s, pro nějž

$$t = i\sqrt{1 - \alpha},$$

a v němž stává se lineárně nekonečnou.

Kol bodu s opišme kružnici C a od jejího nejvyššího bodu k veďme řez rovnoběžný s osou Y, až protne polokruh K v bodě l. Označíme-li k_1 a l_1 protější body k bodům k a l, pak integrál vzatý dle křivky $mnlkCk_1l_1m$ jest roven nulle.

Argument φ funkce $log(i + t) = log\sqrt{1 + t^2} + i\varphi$ má v bodě m hodnotu 0, roste-li poloměr kružnice K do nekonečna, nabývá hodnoty π v bodě n, v bodě l pak hodnoty $\frac{\pi}{2}$, kteroužto hodnotu podrží na řezu lk. Funkce $log(i + t)$ blíží se tedy k hodnotě

$$log(1 + \sqrt{1 - \alpha}) + i\frac{\pi}{2},$$

jestli bod k limituje k bodu s; na dráze zbylé mění se ovšem φ opět tak, že v bodu m nabývá opět hodnoty nully.

Roste-li poloměr kružnice K do nekonečna, pak integrál

$$\int \frac{dt\, log(i + t)}{1 + t^2 - \alpha},$$

vzatý podél kruhového oblouku k, jak snadno se nahlédne, blíží se k nulle a tudíž

$$\int_{\infty}^{-\infty} \frac{log(t + i)\, dt}{1 + t^2 - \alpha} + \int_{C} \frac{log(i + t)\, dt}{1 + t^2 - \alpha} = 0,$$

ježto integrály vzaté podél lk a k_1l_1 navzájem se ruší.

Integrál kol kružnice C vzat jest ve směru kladném; blíží-li se poloměr kružnice C k nulle, pak

$$\int_C \frac{log(i+t)\,dt}{1+t^2-\alpha}$$

$$= \left(log(1+\sqrt{1-\alpha}) + i\frac{\pi}{2}\right) . 2\pi i \lim_{t=i\sqrt{1-\alpha}} \frac{t-i\sqrt{1-\alpha}}{t^2+1-\alpha}$$

$$= 2\pi i \frac{1}{2i\sqrt{1-\alpha}}\left(log(1+\sqrt{1-\alpha}) + i\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha}}\left(log(1+\sqrt{1-\alpha}) + i\frac{\pi}{2}\right);$$

t. j.

$$\int_{\infty}^{-\infty} \frac{log(t+i)\,dt}{1+t^2-\alpha} = -\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha}} log(1+\sqrt{1-\alpha}) - \frac{i\pi^2}{2\sqrt{1-\alpha}},$$

tedy:

$$\frac{1}{2a}\int_{\infty}^{-\infty} \frac{dt\, log(i+t)}{t^2+1-\alpha}$$

$$= -\frac{\pi}{2a\sqrt{1-\alpha}} log(1+\sqrt{1-\alpha}) - \frac{i\pi^2}{4a\sqrt{1-\alpha}}.$$

Dosadíme-li hodnotu tuto do rovnice (II), obdržíme opět:

$$J = -\frac{\pi}{2a\sqrt{1-\alpha}} log(1+\sqrt{1-\alpha}),$$

t. j.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{log\, sin\, \varphi}{a - b\, sin^2 \varphi} d\varphi = -\frac{\pi}{2a\sqrt{1-\frac{b}{a}}} log\left(1+\sqrt{1-\frac{b}{a}}\right).$$

Poznámka ku předcházejícímu článku.

Od r.

Věty o residuech, jež na druhém místě v článku předcházejícím bylo použito, lze použíti ku výpočtu toho integrálu ještě jiným jednodušším způsobem.