Jan Vojtěch

Úvod do rozboru nejjednodušších křivek užitím differenciálního počtu. [IV.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 4, 465--491

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121453`

Úvod do rozboru nejjednodušších křivek užitím differenciálního počtu.

Dr. Jan Vojtěch v Brně.

(Pokračování.)

Třetí podmínka je rovnost druhých derivací; druhá derivace pro křivku danou (2) je $y''_1 = f''(x_1)$, pro kruh ji nalezneme z rovnice $(x - a) + (y - b) \,.\, y' = 0$:

$$1 - 0 + (y' - 0) \,.\, y' + (y - b) \,.\, y'' = 0$$

čili

$$y'' (y - b) + y'^2 + 1 = 0;$$

sem dosadíme za y' výraz dříve nalezený, i dostaneme

$$y'' (y - b) + \frac{(x - a)^2}{(y - b)^2} + 1 = 0$$

a odtud

$$y'' = - \frac{(x - a)^2 + (y - b)^2}{(y - b)^3}.$$

I jest třetí podmínka

$$- \frac{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2}{(y_1 - b)^3} = f''(x_1),$$

poněvadž však pro (x_1, y_1) jest čitatel na levé straně $= r^2$ (z rovnice kruhu), jest stručněji

$$\text{III.}: \; - \frac{r^2}{(y_1 - b)^3} = f''(x_1).$$

Vynecháme-li index 1 a píšeme místo $f'(x)$, $f''(x)$ krátce y', y'', majíce na mysli derivace z rovnice křivky (2) (ne kruhu), máme konečně podmínky

$$\text{I.}: \; (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$$

$$\text{II.}: \quad - \frac{x - a}{y - b} = y'$$

$$\text{III.}: \quad - \frac{r^2}{(y - b)^3} = y''.$$

Z těchto tří rovnic lze řešením nalézti hodnoty tří veličin a, b, r; řešíme je na př. tím způsobem, že z II. určíme $(x-a)^2$, z III. r^2 a dosadíme oboje do I.
Bude

$$y'^2 (y-b)^2 + (y-b)^2 + y'' (y-b)^3 = 0$$

čili

$$y'^2 + 1 + y'' (y-b) = 0,$$

odtud

$$y - b = -\frac{1+y'^2}{y''} \text{ a tedy } b = y + \frac{1+y'^2}{y''};$$

z II. potom dostaneme

$$x - a = y' \frac{1+y'^2}{y''} \text{ a tedy } a = x - y' \frac{1+y'^2}{y''};$$

a konečně třebas z III.

$$r^2 = -y'' (y-b)^3 = y'' \left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)^3 = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}$$

$$\text{a } r = \sqrt{\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}} = \frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{y''}.$$

Kružnice tato sluje *kružnice křivosti*; souřadnice jejího středu pro bod křivky (x, y) jsou

$$a = x - y' \frac{1+y'^2}{y''}, \quad b = y + \frac{1+y'^2}{y''},$$

poloměr její

$$r = \frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{y''}.$$

Zvratná hodnota poloměru kružnice křivosti jest *měrou zakřivení* (křivosti) křivky v bodě dotyku, i jest

$$\frac{1}{r} = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}.$$

Druhá odmocnina v jmenovateli může míti znaménko + nebo —; volíme je tak, aby hodnota $\frac{1}{r}$ měla znaménko + nebo — dle toho, je-li křivka v uvažovaném bodě vypuklá (jejíž zakřivení jsme nazvali v odst. 19. positivní) nebo dutá (se zakřivením negativním). Protože křivka vypuklá má y'' kladné, dutá záporné, nutno voliti znaménko druhé odmocniny vždy kladné.

Stanovme střed kruhu křivosti a zakřivení u paraboly $y = x^2$. K tomu cíli určíme postupně $y' = 2x$, $y'^2 = 4x^2$, $1 + y'^2 = 1 + 4x^2$, $y'' = 2$; potom

$$a = x - 2x \frac{1 + 4x^2}{2} = -4x^3,$$

$$b = x^2 + \frac{1 + 4x^2}{2} = \frac{1 + 6x^2}{2},$$

$$r = \frac{\sqrt{(1 + 4x^2)^3}}{2}$$

a ovšem

$$\frac{1}{r} = \frac{2}{\sqrt{(1 + 4x^2)^3}}.$$

Sledujme hodnoty těchto veličin v několika bodech křivky:

pro $x = 0$ jest	$a =$ 0,	$b =$ 0·5,	$r =$ 0·5,	$\frac{1}{r} =$ 2,
„ $x = 1$ „	$-$ 4,	3·5,	5·6,	0·179,
„ $x = 2$ „	$-$ 32,	12·5,	35·0,	0·029,
„ $x = 3$ „	$-$ 108,	27·5,	112·5,	0·009.

Podobně u hyperboly $y = \frac{1}{x}$ jest

$$y' = -\frac{1}{x^2},\ y'^2 = \frac{1}{x^4},\ 1 + y'^2 = \frac{1 + x^4}{x^4},\ y'' = \frac{2}{x^3},$$

tedy

$$a = x + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1 + x^4}{x^4} \cdot \frac{x^3}{2} = \frac{1 + 3x^4}{2x^3},$$

$$b = \frac{1}{x} + \frac{1 + x^4}{x^4} \cdot \frac{x^3}{2} = \frac{3 + x^4}{2x},$$

$$r = \frac{\sqrt{(1 + x^4)^3}}{2x^3},\quad \frac{1}{r} = \frac{2x^3}{\sqrt{(1 + x^4)^3}}.$$

V bodě na př. (1, 1) jest tu $a = 2$, $b = 2$, $r = 1·4$, $\frac{1}{r} = 0·7$, v $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ jest $\frac{1}{r} = 0·23$, v $\left(3, \frac{1}{3}\right)$ je $\frac{1}{r} = 0·07$, ... v (10, 0·1) jest $\frac{1}{r} = 0·002$ atd.

Výraz pro r můžeme upraviti na tvar

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+x^2\right)^3}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{y^2+x^2}\right)^3;$$

$\sqrt{x^2+y^2}$ je vzdálenost bodu hyperboly (x, y) od počátku souřadnic, i vychází, že poloměr křivosti jest u hyperboly $y=\frac{1}{x}$ úměrný třetí mocnině t. zv. průvodiče.

Průběh zvl. hodnot r, $\frac{1}{r}$ můžeme si s výhodou znázorniti též graficky.

Křivka $y^2=x$ je táž jako $y=x^2$, jenže má jinou polohu. Určeme zakřivení její $\frac{1}{r}$; platí $2yy'=1$, tedy $y'=\frac{1}{2y}$, dále $2y'^2+2yy''=0$, odtud $y''=-\frac{y'^2}{y}=-\frac{1}{4y^3}$, proto

$$\frac{1}{r}=\frac{-\frac{1}{4y^3}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{4y^2}\right)^3}}=-\frac{2}{\sqrt{(1+4x)^3}}.$$

V bodě na př. (4, 2) má býti zakřivení této křivky takové jako v bodě (2, 4) u křivky $y=x^2$ a pod., což se počtem vskutku potvrzuje, pouze znaménko je ovšem různé.

Křivka $y=x^3$ má $y'=3x^2$, $y''=6x$, tedy

$$\frac{1}{r}=\frac{6x}{\sqrt{(1+9x^4)^3}};$$

hodnota zakřivení je pro $-x$ taková jako pro $+x$, lišíc se jen označením, v počátku jest $=0$, pro $x=1, 2, 3\ldots$ jest $\frac{1}{r}=0{\cdot}1897, 0{\cdot}0069, 0{\cdot}0009, \ldots$

23. Viděli jsme, že parabola $y=x^2$ (obr. 12.) má v bodě (0, 0) vrchol, podobně parabola v obecné poloze

$$y=ax^2+bx+c,$$

jejíž osa souměrnosti je rovnoběžná s osou Y, má vrchol v bodě

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right);$$

definovali jsme *vrchol* křivky vůbec jako bod, v němž stoupání její mění znaménko, a nalezli jsme, že křivka má vrchol v bodě, pro jehož souřadnice platí $\frac{dy}{dx} = 0$ a zároveň $\frac{d^2y}{dx^2} \neq 0$. Vyšetřme na základě toho, zda křivka $y = x + \frac{1}{x}$ (obr. 18.) má vrchol; pro jeho souřadnice musí býti $y' = 1 - \frac{1}{x^2} = 0$, tedy $x^2 = 1$ čili $x = \pm 1$ a tedy $y = \pm 2$. V bodech (1, 2) a (— 1, — 2) má křivka $y = x + \frac{1}{x}$ vskutku vrcholy, neboť $y'' = -\frac{2}{x^3}$ jest tam $= \mp 2$.

Dále jsme shledali, že křivka $y = x^3$ (obr. 22.) má v bodě (0, 0) bod inflekční. *Bod inflekční* u křivky vůbec jsme definovali jako bod, v němž její zakřivení mění znaménko; nutnou podmínkou pro bod inflekční jest, aby platilo pro jeho souřadnice $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, není to však podmínka dostatečná. Pokládáme-li na okamžik $\frac{d^2y}{dx^2}$ za první derivaci, ovšem funkce $\frac{dy}{dx} = \varphi$, smíme tvrditi dle hořejšího pravidla o vrcholu, že tato první derivace $\frac{d\varphi}{dx}$ čili u grafického znázornění směrnice mění znaménko, jestliže sama stává se nullovou, ale $\frac{d^2\varphi}{dx^2} \neq 0$; vrátíme-li se k významu $\varphi = \frac{dy}{dx}$, dostáváme tedy podmínky

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ a } \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d^2\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx^2} \neq 0.$$

Druhá derivace první derivace sluje však přirozeně třetí derivací původní funkce a označuje se $\frac{d^3y}{dx^3} = y'''$; proto píšeme zde $y''' \neq 0$. I shrnujeme: křivka má v (x, y) bod inflekční, platí-li pro něj jednak $y'' = 0$, spolu pak $y''' \neq 0$. V našem případě jest skutečně $y'' = 6x = 0$, kdežto

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d^2y'}{dx^2} = 6 \neq 0.$$

Výklad předešlý pak žádá zde pokládati na chvíli $y' = 3x^2$ za původní křivku (pořadnice označeny y'); je to známá parabola, jejíž směrnice mění v (0,0) své znaménko, čehož početní výraz jest

$$\frac{dy'}{dx} = 0 \text{ a } \frac{d^2y'}{dx^2} \neq 0;$$

dosadíme-li za $y' = \frac{dy}{dx}$, máme zase

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^3} \neq 0.$$

Zkusme, zdali křivka $y = \frac{4x}{x^2 + 3}$ má nějaký bod inflekční a který. Z rovnice

$$y\,(x^2 + 3) - 4x = 0$$

derivujeme

$$y'\,(x^2 + 3) + y\,.\,(2x + 0) - 4 = 0,$$

dosadíme za y, i dostaneme

$$y'\,(x^2 + 3) + \frac{4x}{x^2 + 3}\,.\,2x - 4 = 0$$

čili

$$y'\,(x^2 + 3)^2 + 4x^2 - 12 = 0$$

a odtud

$$y' = 4\,.\,\frac{3 - x^2}{(x^2 + 3)^2};$$

derivujeme-li předcházející rovnici po druhé, obdržíme

$$y''\,(x^2 + 3)^2 + y'\,.\,2\,(x^2 + 3)^1\,.\,(2x + 0) + 8x = 0,$$

sem dosadíme za y', i bude

$$y'' = \frac{8x\,(x^2 - 9)}{(x^2 + 3)^3};$$

$$\text{z } y''\,(x^2 + 3)^3 - 8x\,(x^2 - 9) = 0$$

dostaneme, derivujíce po třetí,

$$y''' = -24\,.\,\frac{x^4 - 18x^2 + 9}{(x^2 + 3)^4}.$$

Položíme-li $y'' = 0$, dojdeme rovnice $x(x^2 - 9) = 0$, z které vycházejí tři kořeny $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -3$; z rovnice křivky pak pro tyto hodnoty úsečky nalezneme $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = -1$; pro bod (0, 0) jest

$$y''' = \frac{-24 \cdot 9}{3^4} \neq 0,$$

pro bod (3, 1) je také $y''' \neq 0$, rovněž pro bod $(-3, -1)$. I má křivka ta tři body inflekční: (0, 0), (3, 1), $(-3, -1)$. Směrnice tečen v nalezených bodech obratu jsou

$$y'_1 = \frac{4 \cdot 3}{3^2} = \frac{4}{3}, \; y'_2 = -\frac{1}{6}, \; y'_3 = -\frac{1}{6},$$

rovnice tečen v bodech těch tedy $\eta - 0 = \frac{4}{3}(\xi - 0)$, t. j. $\eta = \frac{4}{3}\xi$, potom $\eta - 1 = -\frac{1}{6}(\xi - 3)$ a konečně

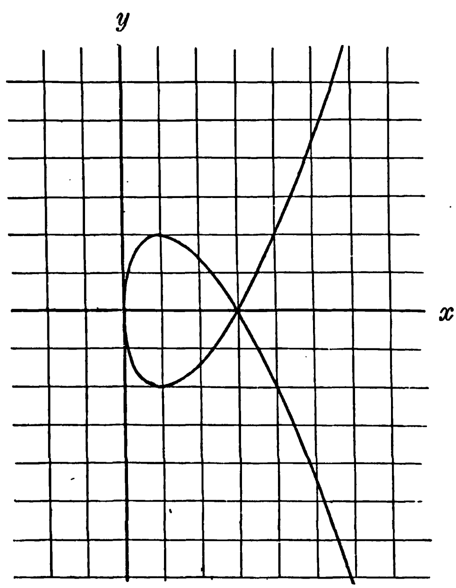
$$\eta + 1 = -\frac{1}{6}(\xi + 3).$$

Jak je z tohoto příkladu a ostatně samo sebou patrno, není pro bod inflekční obecně $\frac{dy}{dx}$ rovno nulle; může se to vyskytnouti ovšem, jako na př. u křivky $y = x^3$, jest to však pouze zvláštní případ bodu obratu (bod inflekční s tečnou rovnoběžnou k ose X).

Vrcholem (vedlejším) nazvali jsme také bod, kde $\frac{1}{y'} = 0$; obdobně (s případem $y' = 0$) může v takovém bodě býti místo vrcholu bod inflekční, jestliže současně $\frac{1}{y''} = 0$ (na př. u křivky $x = y^3$ bod (0, 0), u křivky $x - 5 = (y + 1)^3$ bod $(5, -1)$ je bodem obratu).

Konečně byla zmínka o vrcholu vyšším u křivky $y = x^4$ v (0, 0); tu totiž jest $y' = 4x^3 = 0$, $y'' = 12x^2 = 0$, $y''' = 24x = 0$, ale derivace třetí derivace $\frac{dy'''}{dx} = 24$ není rovna nulle (obdobně jako u vrcholu obyčejného jest $y' = 0$, ale derivace první derivace $\frac{dy'}{dx} \neq 0$).

Vrchol a *bod obratu* mají mezi body křivky zvláštní významné postavení; první existuje v bodě, pro nějž platí $\frac{dy}{dx} = 0$ a $\frac{d^2y}{dx^2} \neq 0$, druhý v bodě, pro nějž jest $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ a $\frac{d^3x}{dy} \neq 0$, mají tedy ony body (první pro stoupání křivky, druhý pro zakřivení) geometrický význam, obdobný významu nully mezi čísly řady číselné. Jsou však u některých křivek ještě jiné body zvláštní, jak seznáme z následujících příkladů.

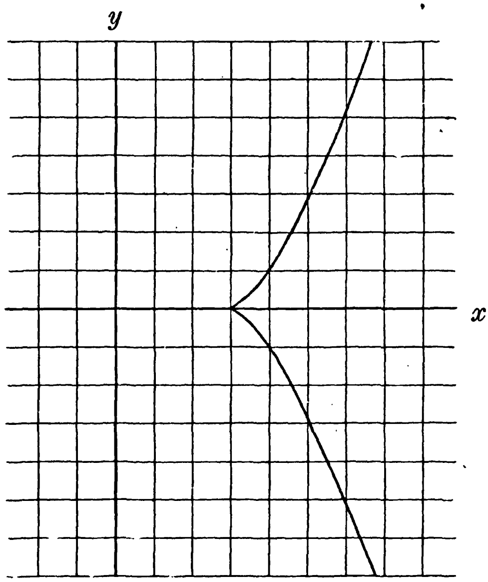


Obr. 24. $y^2 = x(x - 3)^2$.

Zobrazme křivku $y^2 = x(x - 3)^2$ (obr. 24.); k tomu cíli určeme si tabulku hodnot pro souřadnice bodů, jest

pro	$x = 0$,	$y^2 = 0$ a	$y = 0$
	1	4	± 2
	2	2	$\pm \sqrt{2} = \pm 1{\cdot}4$
	3	0	0
	4	4	± 2
	5	20	$\pm 2\sqrt{5} = \pm 4{\cdot}5$
	6	54	$\pm 3\sqrt{6} = \pm 7{\cdot}3$.

V intervalu $x = 0$ až $x = 3$ je potřebno určiti více bodů; i jest pro $x = \frac{1}{2}$ $y = \pm \frac{5}{4} \sqrt{2} = \pm 1{\cdot}8$, pro $x = \frac{3}{2}$ je $y = \pm \frac{3}{4} \sqrt{6} = \pm 1{\cdot}8$, pro $x = \frac{5}{2}$ jest $y = \pm \frac{1}{4} \sqrt{10} = \pm 0{\cdot}8$.



Obr. 25. $y^2 = (x - 3)^3$.

Vidíme, že křivka je souměrná k ose X; má dvě větve, jež se protínají v bodě (3, 0). Směrnici tečny určíme z

$$2yy' = (x - 3)^2 + x \,.\, 2\,(x - 3) \,.\, 1,$$

dosadíce tam $y = \pm (x - 3) \sqrt{x}$; jest

$$y' = \frac{3\,(x - 3)\,(x - 1)}{\pm\, 2\,(x - 3) \sqrt{x}}.$$

Pro bod (3, 0) vychází tato směrnice ve tvaru neurčitém $y' = \frac{0}{0}$, teprve krátíme-li činitelem $(x - 3)$, dostaneme pro bod ten $y' = \pm \sqrt{3}$, tedy dvě různé hodnoty.

Vyšetřme dále křivku $y^2 = (x - 3)^3$ (obr. 25.); jest zase souměrná k ose X, vychází totiž pro každé x dvojí

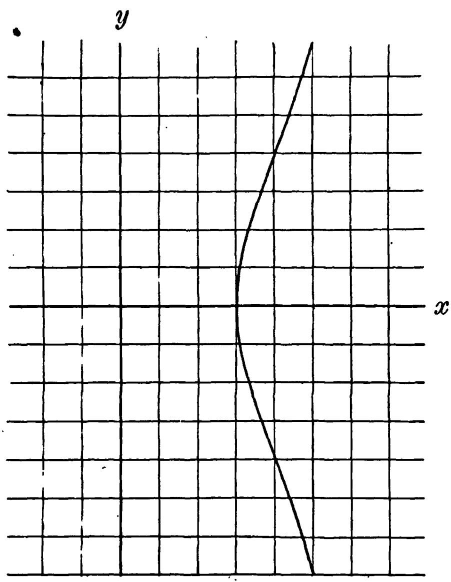
$$y = \pm \sqrt{(x-3)^3},$$

jen znaménkem se lišící. Směrnice tečny plyne z rovnice

$$2yy' = 3\,(x-3)^2 \,.\, 1,$$

jest

$$y' = \frac{3\,(x-3)^2}{\pm 2\sqrt{(x-3)^3}}.$$



Obr. 26. $y^2 = x^2\,(x-3)$.

Pro $x_1 = 3$ ($y_1 = 0$) objevuje se opět $y'_1 = \frac{0}{0}$; krátíme-li zlomek faktorem $\sqrt{(x-3)^3}$, dostaneme pro bod ten pravou hodnotu $y'_1 = \pm 0$, tedy jednu (dvě splývající).

Konečně křivka $y^2 = x^2\,(x-3)$, na obr. 26. podaná, souměrná k ose X, má směrnici tečny

$$y' = \frac{3x\,(x-2)}{\pm 2x\sqrt{x-3}};$$

pro bod (0, 0) obdržíme $y' = \frac{0}{0}$, zase v tvaru neurčitém, jehož pravá hodnota jest (po zkrácení) $y' = \frac{-6}{\pm 2\sqrt{-3}}$, má tedy směrnice dvě hodnoty, obě imaginární.

Pro bod (3, 0) u křivky prvé a druhé a pro bod (0, 0) u křivky třetí objevuje se směrnice tečny (první derivace) ve tvaru neurčitém $\frac{0}{0}$; po úpravě dostaneme ve všech třech případech dvojí hodnotu derivace pro bod příslušný. Ono je důvodem, že body ty nazýváme zvláštními v užším smyslu, singulárními; toto pak odůvodňuje název dvojné body. *Singulární body* slují obecně ty, v nichž má derivace (směrnice tečny) tvar neurčitý. *Dvojný bod* je ten, v němž má derivace (po úpravě) dvojí hodnotu; jsou-li tyto dvě hodnoty různé, sluje dvojný bod *uzlem*, jsou-li stejné, sluje *hrotem* (bodem vratu), konečně jsou-li imaginární, sluje *bodem isolovaným* (osamoceným). Názvy tyto odůvodňuje tvar křivky v okolí bodu; v uzlu protínají se dvě větve křivky, můžeme jej už z pohledu pokládati za dva body, v hrotu se stýkají dvě větve, bod osamocený oddělen je od křivky intervalem, v našem případě od $x = 0$ do $x = 3$, v němž neleží žádný bod křivky.

Má-li nějaká křivka bod singulární, musí výraz pro y' (bez úpravy) nabýti tvaru neurčitého pro bod ten; musí patrně býti tento výraz zlomkem, jehož čitatel i jmenovatel se stane $= 0$. Abychom tedy nalezli singulární bod křivky dané, položme čitatel i jmenovatel výrazu pro y (neupraveného) rovným nulle; mají-li obě tyto rovnice společné řešení a leží-li bod takto nalezený na křivce dané, jest to hledaný bod singulární. Podle hodnot derivace (po úpravě) pro bod nalezený rozhodneme, jaký jest určitěji singulární tento bod.

Vyšetřme, zdali křivka $y^2 = \frac{(x-1)^2}{x}$ má bod singulární. Její y' nalezneme z rovnice

$$xy^2 - (x-1)^2 = 0;$$

platí

$$y^2 + 2xyy' - 2(x-1) = 0$$

a odtud

$$y' = \frac{2(x-1) - y^2}{2xy}$$

Pro souřadnice sing. bodu platí $2(x-1) - y^2 = 0$ a $2xy = 0$; jednodušší rovnice druhá dává buď $x = 0$ nebo $y = 0$, první pro $x = 0$ poskytuje $y^2 = -2$, nehodí se, pro $y = 0$ poskytuje $x = 1$. Bod $(1, 0)$ je — jak ukazuje rovnice křivky — vskutku na křivce a jest bodem singulárním. Dosadíme-li do výrazu pro y' za y hodnotu jeho z rovnice křivky, totiž $\frac{x-1}{\pm\sqrt{x}}$, dostaneme $y' = \pm \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$, pro bod $x = 1$, tedy $y' = \pm 1$. Křivka má v bodě $(1, 0)$ dvě různé tečny, jest proto bod ten uzlem; tečny křivky v něm mají rovnice $\eta = \xi - 1$ a $\eta = -\xi + 1$.

24. Na základě předcházejících úvah můžeme přistoupiti k *rozboru* čili *diskussi* křivky, jež dána jest rovnicí rozvinutou nebo nerozvinutou, platnou o souřadnicích každého bodu jejího. Podati rozbor křivky značí udati tvar a polohu její v celku a důležitých jednotlivostech. Z příkladů ve výkladu dosud uvedených, třebas nejjednodušších, poznáváme že rozbor lze podati po částech, jednak přímo na základě rovnice křivky, jednak dle první derivace, konečně dle druhé derivace.

A) Z dané rovnice křivky seznáme, v kterých částech roviny osami souřadnými rozdělené křivka leží, zdali je souměrná vzhledem k ose úseček nebo k ose pořadnic nebo k přímce půlící I. (neb II.) čtvrt nebo k počátku souřadnic, zdali má body na osách souřadnic a které, zdali prochází počátkem, zdali má body v nekonečnu a které.

1. Řešíme-li rovnici křivky dle y, dostaneme $y = f(x)$ a z tvaru této $f(x)$ poznáme, pro které intervaly úsečky je pořadnice reální; řešíme-li dle x, nalezneme $x = \varphi(y)$ a vidíme pro které hodnoty pořadnice je úsečka reální.

2. Obsahuje-li rovnice křivky jen sudé mocniny proměnné x, leží na křivce bod $(-x, y)$ vždy, leží-li tam bod (x, y); neboť $(-x)^{2n} = (+x)^{2n}$ pro jakékoli n. Křivka je souměrná k ose Y.

Obsahuje-li rovnice křivky jenom sudé mocniny proměnné y, leží na křivce bod $(x, -y)$, kdykoli tam leží bod (x, y): křivka je souměrná k ose X.

Nemění-li se rovnice křivky, když místo (x, y) dosadíme $(-x, -y)$, leží na křivce bod $(-x, -y)$, leží-li na ní bod (x, y). Křivka je souměrná k počátku (středu souměrnosti).

Lze-li v rovnici křivky zaměniti x a y, aniž by se rovnice změnila, jest křivka souměrná k přímce $y = x$, t. j. k přímce půlící I. a III. kvadrant.

Křivka je souměrná k přímce $y = -x$, jež půlí II. a IV. kvadrant, jestliže rovnice její zůstane v platnosti, když x nahradíme veličinou $-y$, y pak veličinou $-x$.

3. Průsečíky křivky s osou X obdržíme, položíme-li v rovnici křivky $y = 0$; hodnoty proměnné x udávají pak úsečky bodů těch. Podobně průsečíky křivky s osou Y dostaneme pro $x = 0$.

Nemá-li rovnice křivky absolutního členu, vyhovuje jí dvojice $x = 0$, $y = 0$; počátek soustavy souřadnic leží na křivce.

Také průsečíky křivky s přímkami jdoucími počátkem, tedy s přímkami $y = ax$, mohou přispěti k utvoření představy o křivce; zejména průsečíky se symmetrálami čtvrtí $y = x$ a $y = -x$ (dosadíme do rovnice křivky $y = x$, resp. $y = -x$ a řešíme dle x).

4. Zdali má křivka body v nekonečnu určíme z rovnice její, hledajíce y pro $x = \infty$ neboli $\frac{1}{x} = 0$, potom x pro $y = \infty$ čili $\frac{1}{y} = 0$. Bod takový má buď obě souřadnice nekonečně veliké nebo jen jednu, druhou pak konečnou.

B) Z výrazu ustanoveného pro první derivaci $y' = \frac{dy}{dx}$ poznáme stoupání křivky v jednotlivých bodech.

1. Pro kterýkoli bod křivky určíme hodnotu směrnice tečny v něm, když dosadíme souřadnice bodu do výrazu pro y': činíme tak zvláště pro význačné body některé, na př. pro průsečíky s osami. Pro $y' > 0$ křivka stoupá, pro $y' < 0$ klesá.

2. Rovnice tečny $\eta - y = y'(\xi - x)$ i normály

$$\eta - y = -\frac{1}{y'}(\xi - x)$$

v obecném bodě křivky (x, y) můžeme specifikovati pro některé body; tečna může nahraditi i oblouk křivky v místě, kde je málo zakřivena. Snadno určíme také průsečíky tečny a normály s osami. Subtangenta a subnormála svojí délkou $St = \frac{y}{y'}$, $Sn = yy'$ přispějí k posouzení stoupání křivky.

3. Pro body v nekonečnu hledáme asymptoty udanými způsoby; rovnice jich jsou velmi významné.

4. Pro $y' = 0$ má křivka vrchol horní, je-li v bodě tom $y'' < 0$, dolní v případě $y'' > 0$. Při nullové hodnotě druhé derivace nemá křivka obyčejného vrcholu v bodě, kde $y' = 0$. Vrcholy vedlejší vyskytují se v bodech, pro které $\frac{1}{y'} = 0$.

5. Pro $y' = \frac{0}{0}$ má křivka bod singulární; jest to dvojný bod s dvěma reálními tečnami čili uzel nebo bod s dvěma splývajícími tečnami čili hrot nebo konečně bod isolovaný, v němž y' má dvojí hodnotu imaginární.

C) Výraz pro druhou derivaci $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ je podstatný pro stanovení křivosti, jejího smyslu i velikosti.

1. V bodech, pro jichž souřadnice jest $y'' > 0$, jest křivka konvexní, při $y'' < 0$ konkávní, zdola pozorována.

2. Bod, pro který platí $y'' = 0$, jest inflekční bod křivky, jestliže současně derivace výrazu pro y'' není rovna nulle; důležitá je rovnice tečny v tomto bodě, dovolujíc lépe posouditi proměnu smyslu zakřivení. (Také pro $\frac{1}{y''} = 0$ může býti bod takový.) Zvláštní případ inflekčního bodu je ten, v němž i $y' = 0$; tečna v něm je rovnoběžná s osou X.

3. Zvratná hodnota poloměru křivosti

$$\frac{1}{r} = \frac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}$$

udává velikost zakřivení v kterémkoli bodě křivky; ve významných bodech je zvláště poučná.

4. Poloha středu křivosti, t. j. středu kružnice křivosti pro některý bod činí představu o zakřivení v něm ještě určitější; souřadnice jeho jsou

$$x - y' \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

25. Provedeme diskussi křivky v hlavních částech na několika příkladech. Rovnice křivky jest buď přímo dána nebo ji napřed odvozujeme z daného zákona výtvarného.

a) Pohybuje-li se bod v rovině tak, že součet jeho vzdáleností od dvou pevných bodů zůstává stálý, vzniká *ellipsa*. Bod na ellipse budiž (x, y); pevné body zvolme ve vzdálenosti v na ose X tak, aby počátek půlil jich spojnici, souřadnice jejich jsou tedy $\left(\frac{v}{2}, 0\right)$ a $\left(-\frac{v}{2}, 0\right)$; konstantní součet vzdáleností bodu (x, y) od nich budiž s. I platí pro každý bod (x, y)

$$\sqrt{\left(x - \frac{v}{2}\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(x + \frac{v}{2}\right)^2 + y^2} = s.$$

Přeložíme jeden kořen na pravou stranu, rovnici umocníme dvěma, sloučíme, osamotíme zbývající kořen, umocníme podruhé a uspořádáme; tím obdržíme

$$4\,(s^2 - v^2)\,x^2 + 4s^2 \,.\, y^2 = s^2\,(s^2 - v^2),$$

kamž dosadíme $s^2 = 4a^2$, $s^2 - v^2 = 4b^2$, i máme rovnici ellipsy ve tvaru nejjednodušším

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{(nebo také } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\text{)}.$$

Rovnici tuto diskutujeme. Řešením plyne

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

jest tedy y reální, dokud $a^2 - x^2 \geqq 0$, čili $x^2 \leqq a^2$, čili dokud absolutní hodnota úsečky je $\leqq a$ $\left(\text{t. j. } \frac{s}{2}\right)$; obdobně

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2},$$

jest tedy x reální, dokud abs. hodnota pořadnice je $\leqq b$ (t. j. $\frac{1}{2}\sqrt{s^2 - v^2}$). Leží proto křivka v obdélníku o stranách $2a$, $2b$, jehož středem je počátek a jehož strany jsou $\|$ resp. s osou X a Y. Křivka je souměrná dle osy X i dle osy Y; je souměrná (už proto) dle počátku. Průsečíky její s osou X mají souřadnice $x_1 = + a$, $x_2 = - a$, průsečíky s osou Y pak souřadnice $y_3 = + b$, $y_4 = - b$. — Derivace y' vychází z rovnice

$$b^2 . 2x + a^2 . 2y . y' = 0$$

ve tvaru

$$y' = - \frac{b^2 x}{a^2 y},$$

tečna křivky v bodě (x, y) má rovnici

$$\eta - y = - \frac{b^2 x}{a^2 y} (\xi - x);$$

subtangenta $= \frac{x^2 - a^2}{x}$, subnormála $= - \frac{b^2}{a^2} x$. Křivka má vrchol pro $- \frac{b^2 x}{a^2 y} = 0$, tedy pro $x = 0$; z rovnice její nalezneme, že vrcholy jsou v bodech $(0, + b)$ a $(0, - b)$. Druhou derivaci y'' určíme z rovnice

$$b^2 + a^2 y'^2 + a^2 y . y'' = 0,$$

když do ní dosadíme za y', nejprve ve tvaru

$$\frac{- b^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2)}{a^4 y^3};$$

dosadíme-li sem za dvojčlen v čitateli dle rovnice křivky $a^2 b^2$ a krátíme, jest

$$y'' = - \frac{b^4}{a^2 y^3}, \quad \text{čili} \quad y'' = - \frac{ab}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}.$$

Vrchol $(0, b)$ je tudíž horní, poněvadž y'' v něm má hodnotu $- \frac{b}{a^2}$, vrchol $(0, - b)$ je dolní $\left(y'' = + \frac{b}{a^2}\right)$. Vrcholy vedlejší jsou v bodech, pro které $\frac{1}{y'} = - \frac{a^2 y}{b^2 x} = 0$, t. j. pro $y = 0$, v bodech totiž $(a, 0)$ a $(- a, 0)$. Čtyři vrcholy křivky leží tedy v čtyřech průsečících křivky s osami. Pro bod singulární platilo by $b^2 x = 0$, $a^2 y = 0$, avšak bod $(0, 0)$ neleží na křivce, nemá proto ellipsa sing. bodu. Na základě výrazu

$$y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$$

soudíme, že křivka je konvexní v bodech se zápornou pořadnicí, konkávní pro kladná y. Inflekčního bodu nemá. Poloměr křivosti

$$r = \frac{\sqrt{(a^4y^2 + b^4x^2)^3}}{a^4b^4},$$

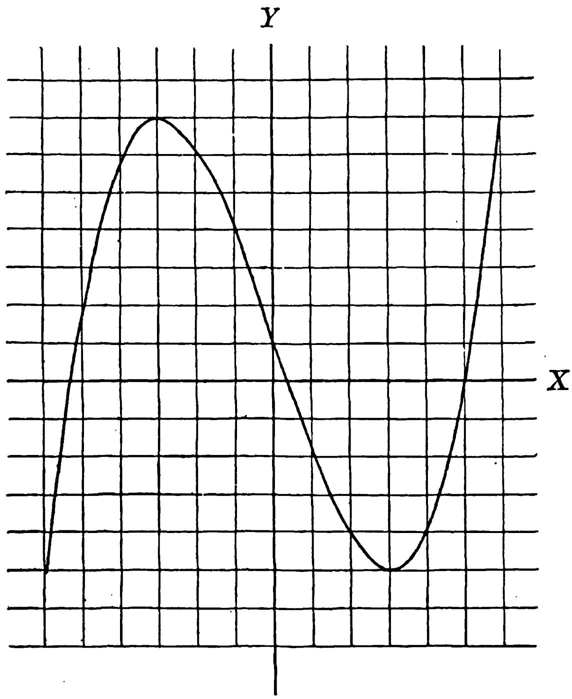
z výrazu pro $\frac{1}{r}$ dostáváme pro vrcholy na ose Y hodnotu zakřivení $\frac{b}{a^2}$, pro vrcholy na ose X hodnotu $\frac{a}{b^2}$ (ve vrcholech pro $y' = 0$ jest ovšem $\frac{1}{r} = \frac{y''}{\sqrt{(1+0)^3}} = y''$); poloměry křivosti v bodech těch $r_b = \frac{a^2}{b}$, $r_a = \frac{b^2}{a}$ snadno sestrojíme jako třetí geom. úměrné. Střed kružnice křivosti má souřadnice

$$\xi = \frac{(a^2 - b^2)\, x^3}{a^4}, \quad \eta = -\frac{(a^2 - b^2)\, y^3}{b^4}.$$

b) Křivka $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se snadno prozkoumá i sestrojí. Pro každou hodnotu úsečky x dostaneme jednu pořadnici y; pro $x = 0$ jest $y = d$, průsečík s osou Y. Průsečíky s osou X dostali bychom řešením rovnice 3. stupně, které však nebývá obecně známo a není krátké; ve zvláštních případech (pro některé zvláštní hodnoty součinitelů a, b, c, d) jest kratší a známější. Grafické sestrojení může sloužiti přímo jako pohodlný způsob řešení rovnice 3. stupně, ovšem přibližného (pro nedokonalost konstrukce).

Platí $y' = 3ax^2 + 2bx + c$; proto rovnice tečny v bodě (x, y) jest $\eta - y = (3ax^2 + 2bx + c)(\xi - x)$. Souřadnice vrcholů dostaneme z rovnice $3ax^2 + 2bx + c = 0$ a rovnice křivky; jsou obecně dva. Křivka nemá asymptoty a sing. bodu. Dále platí $y'' = 6ax + 2b$; bod inflekční má úsečku $x = -\frac{b}{3a}$ (pořadnice plyne z rovnice křivky), pro $x > -\frac{b}{3a}$ je křivka konvexní, pro $x < -\frac{b}{3a}$ je konkávní. Stanoviti výjimečné případy není obtížné.

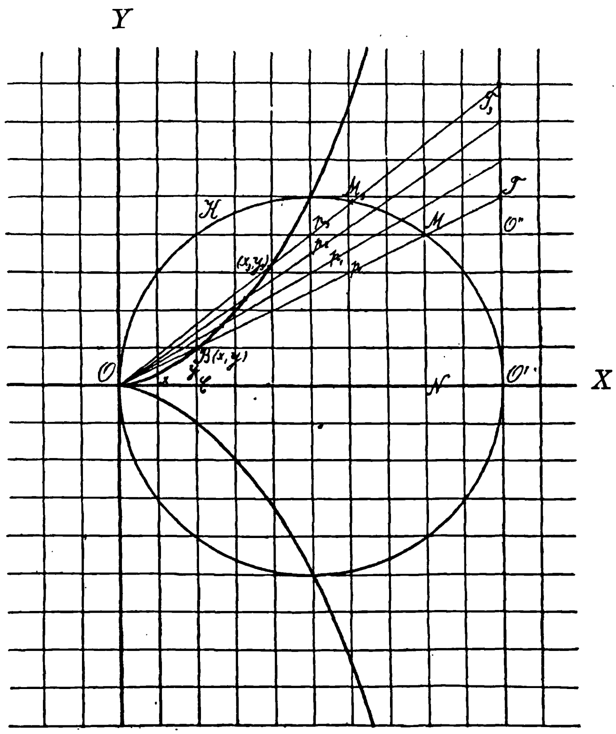
Na př. křivka $y = \frac{x^3}{9} - 3x + 1$ má (obr. 27.) $y' = \frac{3x^2}{9} - 3$, pro vrcholy její tedy platí $x^2 - 9 = 0$ čili $x_{1,2} = \pm 3$, potom $y_1 = -5$ a $y_2 = 7$, i jsou vrcholy body (3, — 5) a (— 3, 7). Inflekčním je bod (0, 1), neboť pro něj platí $y'' = \frac{6x}{9} = 0$.



Obr. 27. $y = \frac{x^3}{9} - 3x + 1$.

V intervalu úseček $(-\infty, -3)$ křivka stoupá $\left(\frac{x^2}{9} - 1\right.$ kladné), má v bodě (— 3, 7) horní vrchol ($y'' = -2$), odtud v intervalu (— 3, + 3) klesá $\left(\frac{x^2}{9} - 1 \text{ záporné}\right)$, má v bodě (3, — 5) dolní vrchol ($y'' = +2$), od bodu toho zase stoupá $\left(\frac{x^2}{9} - 1 \text{ opět kladné}\right)$; v intervalu $(-\infty, 0)$ je dutá, na pravo od osy Y vypuklá. Průběh křivky z nekonečna $(-\infty, -\infty)$ do nekonečna $(+\infty, +\infty)$ jest tak objasněn. Poloměr křivosti ve vrcholu horním i dolním jest $r = \frac{1}{2}$.

c) Budiž dán pevný kruh K, v něm pevný průměr délky a a jeho jeden koncový bod O (obr. 28.). Druhým koncovým bodem



Obr. 28. Cissoida $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$, $a = 10$.

průměru veďme tečnu ke kruhu, jež je ovšem kolmá na tento průměr. Bodem O veďme svazek přímek $p, p_1, p_2, \dots$; p na př. protne kruh po druhé v bodě M, tečnu zmíněnou v T; nanesme úsečku MT od bodu O na přímku p, tím dostaneme bod křivky (x, y), na jednotlivých přímkách svazku obdržíme jednotlivé body křivky $f(x, y) = 0$.

Křivka tato sluje *cissoida* (kissoida) od slova kissos, řeckého názvu pro břečťan, protože část křivky ležící v pevném kruhu (starými z celé křivky jedině pozorovaná) uzavírá s obloukem kruhovým u tečny ležícím plochu podobnou listu břečťanovému. Její rovnici odvodíme, zvolíce O za počátek, pevný průměr za část osy X (osu Y tedy kolmo v O na průměr), z úměry $BC : OC = MN : ON$ čili $y : x = MN : (OO' - NO')$; $NO' = OC = x$, ježto $\triangle MO''T \cong OCB$ a $MO'' = NO'$, dále $\overline{MN}^2 = ON \cdot NO' = (a - x) \cdot x$, takže jest $y : x = \sqrt{(a - x)x} : (a - x)$, umocněno

$$y^2 : x^2 = (a - x) \cdot x : (a - x)^2,$$

odtud $y^2 = \dfrac{x^3}{a - x}$ jako rovnice cissoidy (v obr. 28. jest $a = 10$).

Dokud x je záporné, jest y^2 záporné (neboť x^3 je záp., $a - x$ kladné, podíl tedy záp.) a proto y imaginární, t. j. v levo od osy Y neleží žádný bod křivky. Pro $x = 0$ jest $y = 0$, počátek je na křivce. Zlomek na pravé straně zůstává kladným, dokud x je menší než a, pro x mezi 0 a a leží body křivky, pro $x > a$ neexistují zase žádné body její. Křivka leží tedy v pásu omezeném osou Y a přímkou $x = a$. Křivka je souměrná k ose X (pro každé x v intervalu $(0, a)$ dvojí y lišící se pouze znaménkem). Pro $x = \dfrac{a}{2}$ jest $y = \pm \dfrac{a}{2}$; bod ten je na pevné kružnici. Pro $x = a$ ubíhá křivka do nekonečna. — Derivujeme-li

$$y^2 (a - x) - x^3 = 0,$$

obdržíme

$$2yy' (a - x) + y^2 (-1) - 3x^2 = 0,$$

odtud

$$y' = \frac{3x^2 + y^2}{2y (a - x)} = \frac{x^2 (3a - 2x)}{2y (a - x)^2} = \pm \frac{\sqrt{x} (3a - 2x)}{2 \sqrt{(a - x)^3}}.$$

Pro bod $(0, 0)$ jest (z 1. nebo 2. výrazu pro y') $y' = \dfrac{0}{0}$, počátek tedy bodem singulárním; z 3. výrazu pro y' (po zkrácení faktorem $\sqrt{x^3}$) vychází $y' = 0$, počátek je hrotem, v němž tečnou ke křivce je osa X (rovnice tečny je $y = 0$). Pro x v intervalu $(0, a)$ jest y' kladné při kladném y, záporné při záp. y; křivka stoupá v I. čtvrti a (také ze souměrnosti) klesá v IV. čtvrti. V bodě $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ jest stoupání křivky $= 2$, tečna tam má rovnici

$$\eta - \frac{a}{2} = 2\left(\xi - \frac{a}{2}\right)$$

čili $\eta = 2\xi - \frac{a}{2}$. Jako asymptotu nalezneme obojím způsobem $x = a$. Mohlo by se zdáti, že křivka má vrchol v bodě, jehož $x = \frac{3}{2}a$ (neboť pro tuto hodnotu jest $y' = 0$); bod ten však neexistuje na křivce (y imag.). Pro druhou derivaci po delší redukci dostaneme

$$y'' = \frac{3a^2 y}{4x^2(a-x)^2} = \pm \frac{3a^2}{4\sqrt{x(a-x)^5}}.$$

Z výrazu toho poznáváme, že pro kladná y jest křivka konvexní, pro záporná konkávní. Zakřivení je dáno výrazem

$$\frac{1}{r} = \frac{6(a-x)^2}{a\sqrt{x(4a-3x)^3}},$$

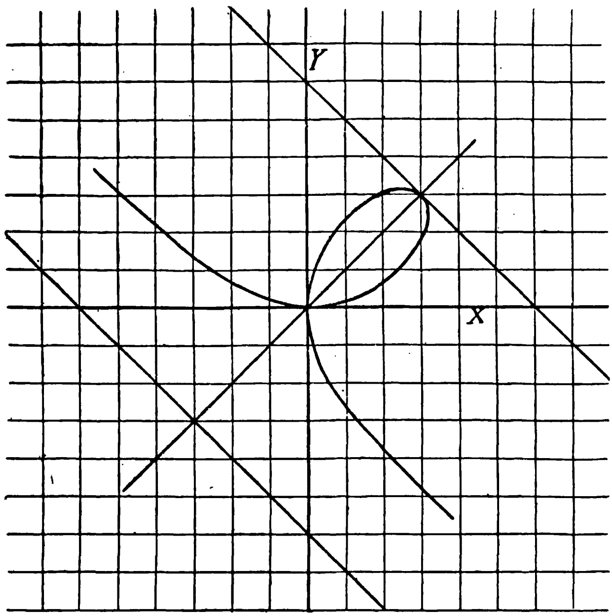
v bodě $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ jest $\frac{1}{r} = \frac{6\sqrt{5}}{25a}$.

d) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ jest rovnice t. zv. listu Descartesova (obr. 29., kde $a = 2$). Pro $x = 0$ vychází $y = 0$ a naopak; křivka má s osami společný pouze počátek. Není souměrná k ose X ani Y. za to je souměrná k přímce $y = x$, půlící I. a III. kvadrant; neboť lze v rovnici zaměniti x a y. Souřadnice jednotlivých bodů křivky není výhodno (vlastně není možno při skrovných pomůckách našich) určovati pro různé zvolené hodnoty x nebo y. Budeme sledovati (při počtu i pro konstrukci) přímky jdoucí počátkem $y = mx$, kde m nabývá všech kladných hodnot od 0 do nekonečna a potom opačným směrem všech záporných hodnot od 0 do nekonečna.

Hned pro $y = x$ dostaneme důležitý (protože na ose křivky) bod z rovnice $2x^3 - 3ax^2 = 0$; odstraníme-li dvojí x, máme $x = \frac{3}{2}a$ a bod má tedy souřadnice $\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$. Obecně pro $y = mx$ redukuje se rovnice křivky na tvar

$$(m^3 + 1)x^3 - 3amx^2 = 0,$$

odtud $x = \frac{3am}{1+m^3}$, příslušné $y = \frac{3am^2}{1+m^3}$. Pokaždé odpadá x^2, mají tedy přímky $y = mx$ s křivkou dva průsečíky v počátku, jenž jest proto, jak se ještě ukáže, bodem dvojným. Pro m kladné jest x i y kladné, jak svědčí výrazy příslušné: křivka leží v I. čtvrti; pro m záporné od 0 do -1 jest x záporné, y kladné: křivka leží z části v II. čtvrti (2. polovici, počítáno



Obr. 29. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a = 2$.

kladným směrem); pro m záporné od -1 do nekonečna jest x kladné, y záporné: křivka má větev v IV. kvadrantu (1. polovici). V III. čtvrti neleží tedy žádný bod křivky, rovněž v II. čtvrti 1. polovici, v IV. čtvrti 2. polovici.

Derivace nerozvinuté funkce, jež $= 0$ jest rovnicí křivky, dává $y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$; jest tedy rovnice tečny

$$\eta - y = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}(\xi - x);$$

bod $\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$ má tečnu $(\eta + \xi - 3a = 0,$ jejíž směrnice jest -1 (tečna kolmá na osu křivky) a úseky na osách $= 3a$. Vrchol křivky má souřadnice vyhovující rovnici $ay - x^2 = 0$ (vyjímaje hodnoty, pro které také jmenovatel výrazu pro y' je $= 0$); dosadíme-li do rovnice křivky odtud $y = \frac{x^2}{a}$, obdržíme $x^3 = 2a^3$ a tedy $x = a\sqrt[3]{2}$, příslušné $y = a\sqrt[3]{4}$. Kořen $x = 0$, dávající spolu $y = 0$, činí $y' = \frac{0}{0}$; i jest počátek bodem singulárním. Vzhledem k souměrnosti křivky nalezli jsme takto nejen vrchol $(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$, ale spolu i vedlejší vrchol křivky $(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2})$, v němž $\frac{1}{y'} = 0$ a tečna kolmá k ose X. Abychom nalezli asymptotu křivky, existuje-li, dosaďme do rovnice křivky $y = px + q$ a položme součinitele u x^3 a u x^2 rovnými nulle, t. j. $1 + p^3 = 0$, $3p^2q - 3ap = 0$; odtud vychází $p = -1$, $q = -3a$. Rovnice asymptoty $y = x - 3a$; asymptota jest rovnoběžná s tečnou křivky v bodě na ose křivky, a majíc na osách souřadnic stejně dlouhé úseky jako ona, jest od počátku stejně vzdálena opačným směrem; obě utínají na ose křivky délku $\frac{3}{2}a\sqrt{2}$. Abychom mohli sledovati hodnotu směrnice y' v různých bodech křivky, dosaďme sem $y = mx$; i jest

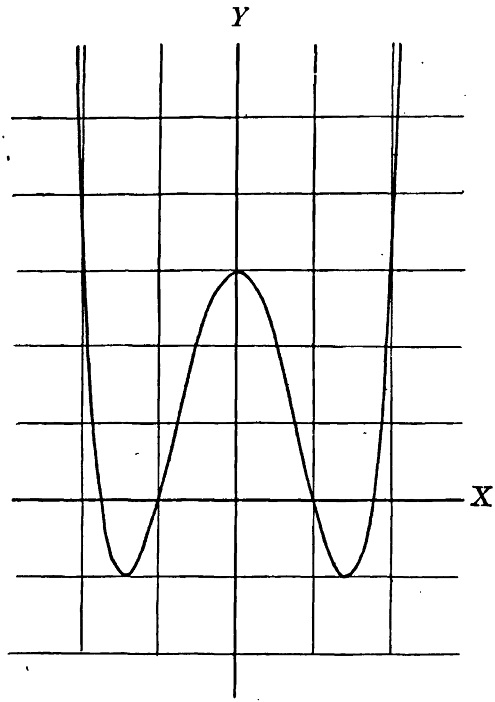
$$y' = \frac{am - x}{m^2x - a}$$

a dosadíme-li za $x = \frac{3am}{1 + m^3}$ konečně $y' = \frac{m(m^3 - 2)}{2m^3 - 1}$. Pro m záporné jest y záporné; křivka klesá v II. a IV. čtvrti. Pro m kladné jest y' kladné, dokud $m^3 > 2$ (pak ovšem také $2m^3 > 1$), t. j. pro $m > \sqrt[3]{2}$, křivka stoupá; pro $m = \sqrt[3]{2}$ má vrchol už nalezený o souřadnicích $(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$; pro $m < \sqrt[3]{2}$ jest y' záporné, dokud jest $2m^3 > 1$, t. j. $m > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, křivka klesá až do bodu $(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2})$. Pro m kladné $< \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ jsou dvojčleny $(m^3 - 2)$ i $(2m^3 - 1)$ záporné, tedy y' kladné, křivka stoupá (s rostoucím x) k vedlejšímu vrcholu uvedenému.

Druhá derivace stačí ve tvaru

$$y'' = -2\,\frac{yy'^2 - ay' + x}{y^2 - ax};$$

v II. čtvrti jest křivka konvexní, neboť pro kterýkoli bod je y' kladné $\left(\text{na př. pro } m = -\frac{1}{2} \text{ jest } y'' = \frac{7^4}{12000a}\right)$; v I. čtvrti



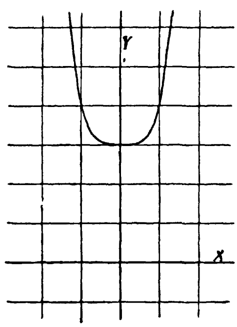
Obr. 30. $y = x^4 - 4x^2 + 3$.

2. polovici je konkávní (pro vrchol $(a\sqrt[3]{2},\ a\sqrt[3]{4})$ je totiž $y'' = \frac{-2x}{y^2 - ax} = -\frac{2}{a}\Big)$ atd. Poloměr křivosti ve vrcholu křivky jest $\frac{a}{2}$.

e) Křivka daná rovnicí $y = x^4 + ax^2 + b$ jest souměrná k ose Y. Pro dosti veliké x má na pravé straně převahu člen x^4, vždy kladný; proto leží na křivce body $(-\infty, +\infty)$ a $(+\infty, +\infty)$. Platí $y' = 4x^3 + 2ax$, $y'' = 12x^2 + 2a$. Z výrazu pro y' vidíme, že křivka má vrcholy pro $x = 0$ a pro

$$x = \pm \sqrt{-\frac{a}{2}},$$

tedy jeden, jestliže a je kladné, tři pro a záporné; v prvém případě je onen jediný vrcholem dolním ($y'' = + 2a$), v druhém



Obr. 31. $y = x^4 + 3$.

je však horním ($y'' = 2a$ je záporné), ostatní dva dolní ($y'' = -4a$ je kladné). Z výrazu pro y'' nalézáme body inflekční pro $x = \pm \sqrt{-\frac{a}{6}}$, tedy buď žádný ($a$ kladné) nebo dva (a záporné). Podle znaménka konstanty a máme dva typy křivky s uvedenou rovnicí; jejich mezní případ je pro $a = 0$, totiž křivka $y = x^4 + b$ nebo $y = x^4$, už jednou uvedená ($y = x^4 + b$ jest proti $y = x^4$ posunuta o b jednotek délkových směrem osy Y). Na obr. 30. jest v měřítku dvojnásobném zobrazena křivka $y = x^4 - 4x^2 + 3$, na obr. 31. křivka $y = x^4 + 3$ v měřítku obyčejném.

f) Pohybuje-li se bod v rovině tak, že součin jeho vzdáleností od dvou pevných bodů zůstává stálý, vytvoří křivku Cassiniho; je-li tento součin roven čtverci poloviční vzdálenosti daných bodů, leží půlící bod spojnice obou pevných bodů na křivce a křivka sluje *lemniskata*. Zvolme opět oba pevné body na ose X (jako u ellipsy) ve vzdálenosti $2l$, souměrně položené vzhledem k počátku; souřadnice jednoho jsou $(l, 0)$, druhého $(-l, 0)$; součin v definici jest l^2. I platí pro každý bod lemniskaty

$$\sqrt{(x-l)^2+y^2}\,.\,\sqrt{(x+l)^2+y^2}=l^2;$$

odtud umocněním

$$(x^2+l^2+y^2-2lx)(x^2+l^2+y^2+2lx)=l^4,$$

na levé straně dostaneme rozdíl čtverců

$$(x^2+l^2+y^2)^2-4l^2x^2=l^4,$$

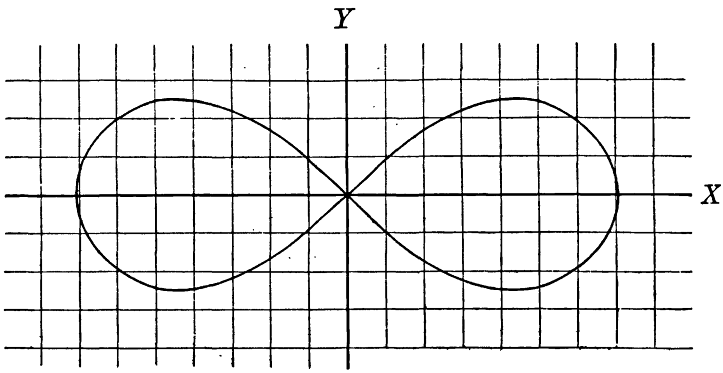
dále

$$(x^2+y^2)^2+2l^2(x^2+y^2)+l^4-4l^2x^2=l^4,$$

čili konečně

$$(x^2+y^2)^2=2l^2(x^2-y^2).$$

Viz obr. 32., kde $l=5$.



Obr. 32. Lemniskata $(x^2+y^2)^2=2l^2(x^2-y^2)$, $l=5$.

Rovnice nalezená je dosti složitá, proto diskusse obtížnější. Křivka je souměrná dle osy X (obsahuje jen y^2), souměrná také dle osy Y (obsahujíc jen x^2), proto souměrná dle počátku souřadnic. Průsečíky křivky s osou X dostaneme pro $y=0$; pro tuto hodnotu pořadnice redukuje se rovnice na tvar $x^4=2l^2x^2$ čili $x^2(x^2-2l^2)=0$, kořeny její jsou $x_{1,2}=0$, $x_{3,4}=\pm l\sqrt{2}$. Má tedy křivka s osou úseček společné body $(0, 0)$ [dvakrát], $(l\sqrt{2}, 0)$, $(-l\sqrt{2}, 0)$. Průsečíků s osou Y mimo počátek nemá; neboť pro $x = 0$ vychází $y^4 = -2l^2y^2$ čili $y^2(y^2 + 2l^2) = 0$; tedy buď $y = 0$ nebo $y = \pm l\sqrt{-2}$. Řešíme-li rovnici křivky dle y^2, nalézáme

$$y^2 = -(x^2 + l^2) \pm l\sqrt{4x^2 + l^2};$$

aby y bylo reální, musí býti y^2 kladné, tedy může platiti jen znaménko $+$ v druhém členu a vedle toho musí býti

$$x^2 + l^2 \leqq l\sqrt{4x^2 + l^2}$$

čili — umocníme-li a upravíme — $x^2 \leqq 2l^2$, tedy abs. hodnota úsečky $x \leqq l\sqrt{2}$. — První derivace určí se třeba z rovnice

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2l^2x^2 + 2l^2y^2 = 0,$$

jež derivováním přechází v rovnici

$$4x^3 + 4xy^2 + 4x^2y \,.\, y' + 4y^3 \,.\, y' - 4l^2x + 4l^2yy' = 0,$$

odtud

$$y' = -\frac{x(x^2 + y^2 - l^2)}{y(x^2 + y^2 + l^2)}.$$

Vrcholy dostaneme pro $x(x^2 + y^2 - l^2) = 0$; vychází jednak $x = 0$, jednak $x^2 + y^2 = l^2$. Pro $x = 0$ jest však také $y = 0$ a $y' = \frac{0}{0}$, bod tedy singulární. Pro $x^2 + y^2 = l^2$ ve spojení s rovnicí křivky dostaneme $l^4 = 2l^2(2x^2 - l^2)$, tedy $x^2 = \frac{3l^2}{4}$ a $x = \pm \frac{l}{2}\sqrt{3}$, $y = \pm \frac{l}{2}$; i má křivka 4 vrcholy souměrně položené dle obou os. Pro $(l\sqrt{2}, 0)$ jest $y' = \infty$, rovněž pro $(-l\sqrt{2}, 0)$; v průsečících těchto s osou X má křivka vedlejší vrcholy. (Dokonč.)

Lom světla v čočkách a centrických systémech.

Napsal prof. **J. Najman** z Rakovníka.

(Pokračování.)

3. Lom světla v čočkách.

Výsledky, ku kterým jsme dospěli v úvahách předešlých, mají obecnou platnost a dají se pohodlně applikovati na čočky. Čočkou rozumíme optický systém centrovaný o dvou sférických