František Josef Studnička

O novém neodvislém vyjádření čísel Bernujských a o vlastnostech příslušného determinantu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 3, 97--102

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121438`

O novém neodvislém vyjádření čísel Bernujských a o vlastnostech příslušného determinantu.

Napsal

dr. F. J. Studnička.

Dvojím způsobem se vyjadřují tak zvaná čísla *Bernujská**), a sice *neodvislým* čili independentním a *odvislým* čili rekurrentním; obojí tento způsob má své vady i přednosti, což však jest lhostejným, jelikož se o vyčíslení nové nejednává. Jen stránka methodická, jak se odvozují a vyjadřují, poskytuje tedy pozoruhodné okolnosti některé, tak že každý nový obrat, jaký se tu vytkne, může býti vítaným tomu, kdo k této stránce přihlížeti jest zvyklým. I nebude tedy na škodu, ukážeme-li zde nový způsob, jakým lze independentně čísla jmenovaná vyjádřiti, a vytkneme-li zároveň vlastnosti příslušného determinantu.

Značí-li B_k, jak obyčejně, k-té číslo Bernujské, platí**)

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+B_1\frac{x^2}{2!}-B_2\frac{x^4}{4!}+B_3\frac{x^6}{6!}-\ldots; \quad (1)$$

a položíme-li pak

$$u=\frac{x}{e^x-1}, \quad (2)$$

z čehož přímo plyne

$$x=e^x u-u, \quad (3)$$

obdržíme, n-kráte tu po sobě derivujíce,

$$o=e^x\left[u^{(n)}+(n)_1 u^{(n-1)}+\ldots+u\right]-u^{(n)},$$

*) Vyskytují se poprvé ve spise *Bernoulliho* „Ars conjectandi“, pag. 97, odkudž jejich pojmenování.

**) Viz na př. *Bertrand* „Traité de Calcul différentiel“, pag. 306. —

kdež k-tá derivace funkce u krátce vyjádřena jest symbolem $u^{(k)}$; máme-li pak na zřeteli Maclaurinův řadový vzorec a zavedeme-li kratší označení

$$ {}^{x}/{}^{0}\, u^{(k)} = u_0^{(k)}, \tag{4}$$

obdržíme konečně z posledního vzorce podmínku

$$u_0 + (n)_1 u_0' + (n)_2 u_0'' + \ldots + (n)_{n-1} u^{(n-1)} = 0, \tag{5}$$

jíž vyhovuje naše funkce pro $x = 0$, dosahujíc tu zároveň, jak ze vzorce (2) patrno, neurčitého výrazu $\frac{0}{0}$.

Zvolíme-li tedy pro n postupně hodnoty

$$2,\ 3,\ 4.\ \ldots,\ m,\ m+1,$$

poskytne nám vzorec (5) soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
&u_0 + 2u_0' = 0,\\
&u_0 + 3u_0' + 3u_0'' = 0,\\
&u_0 + 4u_0' + 6u_0'' + 4u_0''' = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_0 + (m)_1 u_0' + (m)_2 u_0'' + (m)_3 u_0''' + \ldots + (m)_{m-1} u_0^{(m-1)} = 0,\\
&u_0 + (m+1)_1 u_0' + (m+1)_2 u_0'' + \ldots + (m+1)_m u_0^{(m)} = 0.
\end{aligned}$$

V soustavě této, čítající m rovnic, obsaženo patrně vedlé u_0 též m derivací rozličných a sice

$$u_0',\ u_0'',\ u_0''',\ \ldots,\ u_0^{(m)};$$

možná tedy z ní, jelikož jest stejnoměrnou, vyloučiti m veličin a sice vedlé u_0 též ostatní derivace, vyjmouc poslední. Výsledek této eliminace bude, spojíme-li poslední člen poslední rovnice s prvním a užijeme-li nully co doplňku,

$$\begin{vmatrix}
1+0, & 2, & 0, & \ldots, & 0\\
1+0, & 3, & 3, & \ldots, & 0\\
1+0, & 4, & 6, & \ldots, & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
1+0, & (m)_1, & (m)_2, & \ldots, & (m)_{m-1}\\
1+(m+1)u_0^{(m)}, & (m+1)_1, & (m+1)_2, & \ldots, & (m+1)_{m-1}
\end{vmatrix} = 0.$$

Tento determinant možná rozložiti v součet determinantů dvou, z nichž první má v prvním sloupci sčítance první, druhý pak sčítance druhé složených tam prvků; výsledek dřívější obdrží tu pak tvar

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & 0, & \ldots, & 0 \\ 1, & 3, & 0, & \ldots, & 0 \\ 1, & 4, & 0, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & (m)_1, & (m)_2, & \ldots, & (m)_{m-1} \\ 1, & (m+1)_1, & (m+1)_2, & \ldots, & (m+1)_{m-1} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 0, & 2, & 0, \ldots, & 0 \\ 0, & 3, & 3, \ldots, & 0 \\ 0, & 4, & 6, \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & (m)_1, & \ldots & (m)_{m-1} \\ (m+1)\,u_0^{(m)}, & (m+1)_1, & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

Druhý tento determinant obsahuje však v prvním sloupci samé nully až na prvek poslední, rovná se tedy součinu tohoto prvku s příslušným subdeterminantem, což se zde vyjadřuje výrazem

$$(-1)^{m-1}(m+1)\,u_0^{(m)} \begin{vmatrix} 2, & 0, & 0, & 0 \\ 3, & 3, & 0, & 0 \\ 4, & 6, & 4, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (m)_1, & (m)_2, & (m)_3, & (m)_1 \end{vmatrix};$$

subdeterminant tento, mající na pravé straně příčky hlavní samé nully, vyjadřuje se, jakož známo, součinem těchto příčkových prvků, takže předcházející výraz se promění v jednoduchý součin

$$(-1)^{m-1}(m+1)!\,u_0^{(m)}.$$

Z poslední podmínky obdrží se pak, zavedeme-li pro determinant na prvním místě postavený kratší označení

$$\varDelta_m = \begin{vmatrix} 1, & 2, & 0, & \ldots, & 0 \\ 1, & 3, & 3, & \ldots, & 0 \\ 1, & 4, & 6, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & (m)_1, & (m)_2, & \ldots, & 0 \\ 1, & (m+1)_1, & (m+1)_2, & \ldots, & (m+1)_{m-1} \end{vmatrix}, \tag{6}$$

napřed rovnice

$$\varDelta_m + (-1)^{m-1}(m+1)!\,u_0^{(m)} = 0,$$

a řešíme-li podlé $u_0^{(m)}$, konečně vzorec

$$u_0^{(m)} = (-1)^m \frac{\Delta_m}{(m+1)!}. \tag{7}$$

Porovnáme-li tedy známou řadu (1)

$$u = 1 - \frac{x}{2} + B_1 \frac{x^2}{2!} - B_2 \frac{x^4}{4!} + \dots$$

s obecným vzorcem řadovým, jak Maclaurin jej podal,

$$u = u_0 + u_0' \frac{x}{1!} + u_0'' \frac{x^2}{2!} + u_0''' \frac{x^3}{3!} + u_0'''' \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

obdržíme, porovnávajíce součinitele stejně vysokých mocnin x, napřed dvě hodnoty určité

$$u_0 = 1,$$

$$u_0' = -\frac{1}{2},$$

a pak řadu hodnot čísly Bernujskými vyjádřených, jež zahrnuty jsou vesměs vzorcem

$$u_0^{(2k)} = (-1)^{k-1} B_k;$$

spojením tohoto vzorce s předcházejícím (7) možná pak si zjednati

$$B_k = (-1)^{k+1} \frac{\Delta_{2k}}{(2k+1)!}. \tag{8}$$

Zároveň pak jde z téhož porovnání obou řad na jevo, že pro $k > 0$ všeobecně platí

$$u_0^{(2k+1)} = 0,$$

takže podle vzorce (7) též

$$\Delta_{2k+1} = 0. \tag{9}$$

Vzorcem (6) vyjádřený determinant rovná se tedy *nulle*, jestli přípona m, značící jeho stupeň, číslo *liché*, vyjadřuje však *multiplum čísla Bernujského*, představuje-li m číslo *sudé*.

První vlastnost determinantu tohoto možná i neodvisle z jakosti jeho poznati, jelikož tu

$$\Delta_{2k+1} = \begin{vmatrix} 1, & 2, & 0, & \dots, & 0 \\ 1, & 3, & 3, & \dots, & 0 \\ 1, & 4, & 6, & \dots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & (2k+1)_1, & (2k+1)_2, & \dots, & (2k+1)_{2k} \\ 1, & (2k+2)_1, & (2k+2)_2, & \dots, & (2k+2)_{2k} \end{vmatrix}$$

v posledním sloupci obsahuje pouze dva prvky, z nichž druhý jest multiplum prvního, jelikož

$$(2k+2)_{2k} = (k+1)(2k+1)_{2k}, \qquad (10)$$

takže odečítáním prvků řádku předcházejícího od soulehlých prvků řádku následujícího se tu konečně obdrží, když k-kráte se tento postup provedl, dva stejné prvky nad sebou, totiž $2k+1$, kdežto ve sloupcích ostatních, představujících arithmetické řady stupňů nižších, současně se přijde k nullám a stejným prvkům, čímž se determinant co do stupně sníží a konečně uvede na tvar

$$\begin{vmatrix} 1, & 2k+1 \\ 1, & 2k+1 \end{vmatrix} = 0.$$

Této transformace subtraktivní možná však užiti s prospěchem i v případě druhém, hledá-li se podlé vzorce (8) nějaké B_k. Jestiť na př.

$$B_1 = \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6},$$

jakož známo; pro $k=2$ jest pak podobně

$$B_2 = -\frac{1}{5!}\begin{vmatrix} 1, & 2, & 0, & 0 \\ 1, & 3, & 3, & 0 \\ 1, & 4, & 6, & 4 \\ 1, & 5, & 10, & 10 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5!}\begin{vmatrix} 1, & 3, & 0 \\ 1, & 3, & 4 \\ 1, & 4, & 6 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5!}\begin{vmatrix} 0, & 4 \\ 1, & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{30}$$

Ostatně možná užiti k snižování stupně determinantu i známé poučky*), vyjádřené vzorcem

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \ldots \\ a_2, & b_2, & c_2 \ldots \\ a_3, & b_3, & c_3 \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \frac{1}{a_1^{\,n-2}}\begin{vmatrix} (a_1b_2), & (a_1c_2), \ldots \\ (a_1b_3), & (a_1c_3), \ldots \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Obdrželo by se tu na př.

$$B_2 = -\frac{1}{5!}\begin{vmatrix} 1, & 2, & 0, & 0 \\ 1, & 3, & 3, & 0 \\ 1, & 4, & 6, & 4 \\ 1, & 5, & 10, & 10 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5!}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 10 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5!}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 10 \end{vmatrix}.$$

Konečně budiž ještě poznamenáno, že dle vzorce (8) nejlépe se poznává podstata čísel *Bernujských*, jelikož se tu vyja-

*) Viz „Sitzungsb. der k. b. Ges. d. Wiss." Jahrg. 1879 pag. 489.

dřuje jednoduchým zlomkem, jehož čitatele představuje determinant, mající za prvky součinitele binomické, a jmenovatelem jest číslo faktorialní.*)

Historický rozvoj problemu tří těles.

Podává

A. Seydler.

(Dokončení.)

Co se předně prací souborných týče, budiž uveden obšírný spis *Pontécoulantův*: Théorie analytique du systême du monde; 4 sv. (1829—46). Jest to ať tak díme parafrase díla Laplaceova, podávajíc tutéž látku, spracovanou však způsobem modernějším, na základě novějších a částečně elegantnějších method analytické mechaniky. Studium všeobecné části (prvních dvou dílů) odporučuje se z té příčiny pro začátečníky lépe nežli pracné studium Laplaceovy mechaniky nebeské, jejíž genialný autor co pravý pionér vědy si takřka sekerou klestí dráhu skrze prales mathematických obtíží téměř nepřekonatelných.

Stručnější a při tom přece (alespoň v hlavních rysech) úplný jest *Resalův* spis: Traité élémentaire de mécanique céleste (I. vyd. 1865, II. vyd. 1884), jenž tudíž poskytuje nejlepší úvod pro začátečníka. Zejmena druhé vydání, valně rozšířené, vyniká upotřebením method nejnovějších, předpokládajíc ovšem u čtenáře nenepatrné vědomosti mathematické a mechanické.**) Rovněž zasluhují zmínky *Airy-ho*: Mathematical tracts on physical Astronomy (1826; 1831; 1842). Kdo hledá pro poučení své cestu ještě pohodlnější, sáhne ke spisu *Möbiusově*: Die Elemente der Mechanik des Himmels auf neuem Wege, ohne Hülfe höherer Rechnungsarten, abgeleitet (1843).

Uvedené zde spisy — vyjma Pontécoulantův, jenž však není prost různých výtek — neposkytují však celkem nic nového, neznamenají pokrok ve vědě, nýbrž jen více méně zdařilý výklad

*) O jiných výrazech determinantních viz *Studnička* „O počtu differencialním" II. vyd. pag. 121, kdež: vzorec (6) bez důkazu jest uveden.

**) Obšírnější posouzení téhož spisu podáno v Athenaeum, r. III. str. 19.