Drobné zprávy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 14 (1885), No. 2, 76--82

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121431

stroj nabyl maxima svého působení, takže zařízení řečené nabývá i jakés důležitosti praktické.

d) Velice zajímavý pokus jest pak ten, že se návodné proudy induktoru, nejsou-li jeho poly vnějším vodičem spojeny, vzájemně porušují. K tomu cíli postaví se vsouvadlo na některou stranu induktoru, vnější spojení polů se přeruší a na to uvede se induktor v točivý pohyb. Jehla galvanoměru zůstane při tom v klidu, nechť jakkoli rychle induktor se otáčí.

K přesnějšímu určení polohy vsouvadla nalezati se může u přístroje kruhová stupnice, dle níž šine se index se vsouvadlem spojený. *)

Drobné zprávy.

Z theorie čísel. Známo jest, že desetinné číslo tvaru *abcabc* jest dělitelno 7mi, 11ti a 13ti; číslo tvaru *ababab* má dělitele 3, 7, 13, 37. Podobných příkladů o dělitelnosti uvádí více *Kessler* (Schlömilch, Zeitschrift. XXVIII. Jahrg. 60) a ukazuje zároveň, kterak lze stanoviti násobky libovolného čísla kmenného mající podobu periodickou. Tak ku př. obdržíme čísla dělitelná 73ti, napíšeme-li vedle sebe dvě libovolná čísla čtyrciferná, 12ticiferná nebo 20ticiferná.

Téhož druhu jest vlastnost čísel, kterou vyslovil *Plateau*: Každé číslo nesoudělné s 10ti, má násobky podoby *aaa . . . a*. Ku př. 487 . 231 = 111111, 487 . 462 = 222222 atd.

Všechny tyto případy zahrnuty jsou *větou Crelleovou*: Každé číslo jest dělitelem čísla jiného psaného libovolným skupením číslic několikrát periodicky se opakujícím s připojeným určitým počtem nul. Dáno-li ku př. číslo 523, jest kterékoli číslo dělitelem čísla tvaru 523523 . . . . 523000 . . . . 000.

---

*) Elektrodynamické stroje, kteréž v novější době již pro pohodlné a effektní experimentování zajisté ve fysikalných kabinetech nebudou scházeti — a sice opatřené mým svrchu udaným zařízením ku zkoumání návodných proudů v induktoru — zhotovovati vyhradila si firma dr. Houdek a Hervert v Praze, která za exaktní jich provedení úplně ručí.

Tato poučka téměř zapomenutá dochází v novější době zasloužené pozornosti; nedávno podal *Glaisher* jednoduchý důkaz její (Mansion-Neuberg, Mathesis. Tome III. 196.).

Nový důkaz věty: „Každá algebraická rovnice má aspoň jeden kořen“ podal *Dutordoir* v Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1883. pp. 437—449. Princip, na němž důkaz ten spočívá, jest asi tento:

Dána-li rovnice algebraická $f(z) = 0$ a položíme-li

$$z = x + iy,$$

bude

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y);$$

i možno pak dokázati, že jest

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Pomocí této vlastnosti lze sledovati změny funkcí φ a ψ závislé na změně hodnot x, y — a v tom jest hlavní myšlenka důkazu. Můžeme totiž hodnoty x, y dle vůle tak měniti, aby hodnoty funkcí φ a ψ současně přibývalo neb ubývalo aneb aby jedné přibývalo a druhé ubývalo. Z toho konečně následuje, že jest možno, aby φ a ψ konvergovaly současně k nulle, kdežto zároveň x a y konvergují k určitým hodnotám konečným $x = a$, $y = b$. Pak jest $z = a + ib$ kořenem rovnice dané. — Dle úsudku Mansionova (ve zprávě k citovanému pojednání připojené) jest důkaz páně Dutordoirův jednodušší než všechny, které pro onu základní větu algebraickou dosud podány byly; jsouť to, jak známo tři důkazy Gaussovy a důkaz Cauchyův, z doby novější pak důkazy od Lipschitze, Clifforda a Waleckiho.

Úloha o rozkladu mnohoúhelníka v trojúhelníky. Již slavný *Euler* položil úlohu: Určiti, kolikerým spůsobem lze mnohoúhelník daný (úhlů vesměs dutých) rozložiti úhlopříčnami v trojúhelníky. *Segner* řešil úlohu tu vzorcem

$$P_{n+1} = P_n + P_3 P_{n-1} + P_4 P_{n-2} + \ldots + P_{n-1} P_3 + P_n,$$

Euler sám pak podal bez důkazu vzorec

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n.$$

Později zabývali se úlohou tou *Liouville, Lamé, Binet* a jiní geometrové francouzští, v nejnovější době pak *Gelin*, kterýž podav důkaz obou vzorců uvedených připojil k nim ještě tento třetí:

$$P_n = 2^{n-2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots . (2n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots . (n-1)} .$$

(Mansion-Neuberg, Mathesis. Tome III. 108, tome IV. 37.)

Zvláštní případy homologie trojúhelníků a čtyrstěnů. *Rosanes* a *Schröter* shledali již r. 1870 (Clebsch, Annalen. II. Bd. 549, 553.), že dva trojúhelníky v rovině mohou býti přidruženy k sobě několikerým spůsobem jakožto homologické. Mezi jinými odvozena věta: Přísluší-li bodům a, b, c tři jiné body 1, 2, 3 homologicky ve dvou seřaděních, z nichž jedno ze druhého vzniká cyklickou permutací, jsou body tyto též dle třetí permutace homologické k oněm. Jinak řečeno: protínají-li se tři přímky téže roviny $a1$, $b2$, $c3$ v jednom bodu a přímky $a2$, $b3$, $c1$ též v jednom bodu, protínají se také přímky $a3$, $b1$, $c2$ v jediném bodu. Spůsobem velmi jednoduchým vyšetřil *Valyi* (Grunert-Hoppe, Archiv. LXX. 105) možné zde případy; jsouť tyto: homologie dvojnásobná, ku př. $a_1 b_2 c_3$, $a_1 b_3 c_2$; trojnásobná (souhlasící s hořejší poučkou) $a_1 b_2 c_3$, $a_2 b_3 c_1$, $a_3 b_1 c_2$; čtyrnásobná, ku př. $a_1 b_2 c_3$, $a_1 b_3 c_2$, $a_3 b_2 c_1$, $a_2 b_1 c_3$ a šestinásobná, která jest však pomyslná. —

K obdobné čtyrnásob homologické poloze dvou čtyrstěnů poukázal *Cyparissos Stephanos* (Bulletin des Sciences mathématiques 1879) a shledal: Jsou-li dva čtyrstěny čtverým pořádkem homologické, tvoří příslušné středy homologie vrcholy třetího čtyrstěnu, který jest s každým z daných čtyrstěnů též čtvernásob homologický, a sice vzhledem k vrcholům druhého jakožto středům homologie. Takováto poloha vzájemná tří čtyrstěnů nazvána „*desmickou*" a lze ji upotřebiti při různých vyšetřováních geometrie prostorové. Tak ku př. udal *Schur* (Schlömilch, Zeitschrift. XXVIII. Jahrg. 182.) větu následující, týkající se obecné plochy třetího stupně, která — jak známo — obsahuje 27 přímek ležících po třech v 45ti rovinách: Zvolíme-li v ploše 3. stupně tři přímky ležící v jedné rovině, lze každou z nich položiti další 4 roviny stanovící v ploše po dvou různoběžkách, jichž průsečíky tvoří vrcholy čtyrstěnu. Tři čtyrstěny příslušné takto oněm třem přímkám jsou v desmické poloze.

Nový druh zvláštních bodů křivek. Budiž $y = \varphi(x)$ rovnice křivky, mající v bodu $x = a$ bod mezný (point d' arrêt), tak že pro $x < a$ jest y pomyslné, pro $x > a$ pak realné; dále buď $y = \psi(x)$ rovnice křivky mající v bodu $x = a$ bod dvojnásobný, jehož jedna tečna jest rovnoběžna s osou Y, tak že pro $x < a$ obdrží y nejméně tři realné hodnoty. Odvoďme z obou křivek takto daných křivku novou, jejíž rovnice jest

$$y = \varphi(x) + \psi(x);$$

i bude křivka tato míti v bodu $x = a$ bod zvláštního druhu, ku kterému r. 1877 poprvé poukázal *Plateau* *), nazvav jej *point de dédoublement* (bod rozdvojení).

Zvolíme-li ku př. křivky

$$y = xlx, \quad y^3 + x^2 - 2xy = 0,$$

bude míti křivka odvozená z nich spůsobem naznačeným v počátku souřadnic bod rozdvojení. (Mansion, Mathesis. Tome III. p. 193.)

Rovinná křivka 6. stupně určena jest, jak známo, 27ti podmínkami a může míti nanejvýš 10 bodů dvojných. Jelikož bod dvojný tři podmínky vyžaduje, zdálo by se, že jest možno stanoviti křivku 6. stupně s 9ti body dvojnými libovolně danými. *Halphen* ukázal však, že 9 dvojných bodů pravé křivky 6. stupně jest v následující souvislosti:

Body těmito $a_1, a_2, \ldots, a_9$ prochází toliko jediná křivka A 3. stupně; kterýchkoli 8 z těchto bodů $a_1, a_2, \ldots, a_8$ určuje svazek křivek 3. stupně protínajících se ještě ve společném bodě 9tém a'_9, který též křivce A náleží; body a_9 a a'_9 musí míti vzhledem k této křivce společný bod tangenciálný.

Takovými 9ti body lze pak položiti nekonečně mnoho křivek 6. stupně, které je jakožto dvojné body obsahují.

Dáno-li 8 bodů dvojných křivky 6. stupně a má-li tato míti ještě 9tý bod dvojný, jest geometrickým místem bodu tohoto křivka 9. stupně, které jest každý z 8mi bodů daných bodem trojným. Mezi těmito křivkami 6. stupně jest 12 racionálných majících po 10ti bodech dvojných.

---

*) Výtečný tento fysik belgický narodil se v Bruselu r. 1801 a zemřel v Gentu r. 1883. Od r. 1842 byl slepým.

Výsledky tyto lze zobecniti pro křivky stupně $3m$ s 9ti body m-násobnými.

(Bulletin de la société math. de France; t. X., p. 162.)

Přibližné hodnoty druhých odmocnin. Otázka, kterým spůsobem vypočítávali staří geometrové řečtí přibližné hodnoty neracionálných druhých odmocnin, zaměstknává již po delší dobu mathematické historiky, aniž došla dosud platného a konečného rozřešení. *Alexejev, Cantor, Favaro, Heiberg, Heilermann, Henry, Tannery* a j. snažili se pomocí hodnot zachovaných ve spisech *Archimedových* a *Heronových* dopíditi se cesty, která k výpočtu čísel těch vedla. Jedná se hlavně o to, byl-li starým znám algorithmus podobný stanovení druhých odmocnin užitím zlomků řetězových. *Günther*, který o věci té velmi mnoho pracoval (viz ku př. jeho „Antike Näherungsmethoden im Lichte moderner Mathematik“ v pojednáních král. české společnosti nauk z roku 1878) ukazuje, že i methody, které zdánlivě na jiném spočívají základě, obsahují skrytě methodu řetězových zlomků. Tak ku př. methoda Alexejeva: Ustanovíme-li řadu hodnot tak, že jest

$$a_0 = \mathrm{N}, \quad b_0 = 1,$$
$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \frac{\mathrm{N}}{a_n},$$

jest vždy

$$a_n > \sqrt{\mathrm{N}} > b_n.$$

S tím v podstatě totožný jest spůsob tento:

Jest-li $\sqrt{\mathrm{N}} = \sqrt{a^2 + b}$, a určíme-li

$$c_n = \tfrac{1}{2}\left(c_{n-1} + \frac{\mathrm{N}}{c_{n-1}}\right),$$

vycházejíce od hodnoty $c_1 = a$, tvoří c_1, c_2, c_3 ... řadu přibližných hodnot odmocniny $\sqrt{\mathrm{N}}$.

Günther dokázal, že jest $a_n = c_{n+1}$, a že tato hodnota rovna jest (2^n)té přibližné hodnotě příslušného řetězového zlomku. (Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Tome V. p. 91.)

Rozšíření pojmu homografie. Českému mathematickému obecenstvu chvalně známý prof. dr. *Le Paige* uveřejnil v posledních letech řadu prací, jichž předmětem jsou homografie a involuce vyšších stupňů.

Vyšší homografie definuje takto:

Je-li n útvarů prvořadých (řad, svazků) v takové souvislosti, že zvolíme-li v $(n-1)$ z útvarů těch po jednom prvku, určen tím jediný prvek zbývajícího n-ho útvaru, tvoří tyto útvary homografii n-ho stupně (ordre) a $(n-1)$ní třídy (rang). Souhrn všech takových skupin n-prvkových značí H^n_{n-1}. Skupiny společné dvěma, třem, ... obecně $(n-k)$ homografiím H^n_{n-1} tvoří homografie n-ho stupně a třídy $(n-2)$hé, $(n-3)$tí,..., k-té čili H^n_{n-2}, H^n_{n-3}, ..., H^n_k.

Jsou-li ku př. dány v prostoru 4 mimoběžné přímky L, M, N, P, stanoví na nich každá rovina po jednom bodu. Každá taková čtveřina bodová určena jest třemi body, pročež souhrn všech těchto čtveřin tvoří H^4_3.

Zvolíme-li v jedné z těch přímek, ku př. L, bod l, určují roviny bodem tím procházející na ostatních třech přímkách H^3_2. Zvolíme-li na přímce L bod l, a v M bod m, prochází body těmi svazek rovin určujících na přímkách N, P dvě řady homografické v obyčejném smyslu čili H^2_1.

Mějme v přímce L dva body l, l'; každému z nich přísluší na ostatních třech přímkách určitá homografie. Obě tyto homografie H^3_2 a H'^3_2 budou míti jisté společné skupiny trojbodové, jichž souhrn jest H^3_1. Skupiny ty budou dvojí; jedny obdržíme, kladouce přímkou L roviny protínající přímky M, N, P, druhé pak určeny jsou přímkami protínajícími tyto tři mimoběžky. —

Předpokládáme-li, že každý prvek určen jest v prvořadém útvaru, jemuž náleží, jedním parametrem aneb, užijeme-li souřadnic homogenních, dvěma parametry, lze homografii H^n_{n-1} algebraicky vyjádřiti symbolickou rovnicí

$$f \equiv a_x a'_y a''_z \dots a^{(n-1)}_u = 0.$$

Zde značí a_x, a'_y, ... binární lineárné formy

$$\begin{aligned} a_x &= a_1 x_1 + a_2 x_2 \\ a'_y &= a'_1 y_1 + a'_2 y_2 \\ &\vdots \\ a_u^{(n-1)} &= a_1^{(n-1)} u_1 + a_2^{(n-2)} u_2\,; \end{aligned}$$

vyvineme-li naznačený součin a položíme-li pak

$$a_i a'_k a''_l \ldots a_m^{(n-1)} = a_{ikl\ldots m},$$

obdržíme funkci f ve tvaru

$$f \equiv \Sigma\, a_{ikl\ldots m}\, x_i\, y_k\, z_l \ldots u_m,$$

kdež ukazatelé $ikl \ldots m$ mají hodnoty 1 a 2. (Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas. Publicado pelo F. G. Teixeira. Vol. V. p. 27.)

Tak ku př. pro homografii stupně třetího jest

$$\begin{aligned} f \equiv a_{111} x_1 y_1 z_1 + a_{112} x_1 y_1 z_2 + a_{121} x_1 y_2 z_1 + a_{211} x_2 y_1 z_1 \\ + a_{122} x_1 y_2 z_2 + a_{212} x_2 y_1 z_2 + a_{221} x_2 y_2 z_1 + a_{222} x_2 y_2 z_2 = 0, \end{aligned}$$

odkud patrno, že H_2^3 určena jest 7mi trojinami.

Specielní vyšetřování této homografie souvisí velmi úzce s theorií ploch 2ho a 3ho stupně neb třídy. Dány-li tři rovinové svazky tvořící H_2^3, vyplňují body trojinami příslušných rovin určené plochu 3ho stupně.

Dány-li v prostoru tři přímé řady, tvořící H_2^3, obalují roviny určené trojinami příslušných bodů plochu 3tí třídy. (Essais de géométrie supérieure dú 3ième ordre; par M. C. Le Paige. Bruxelles 1882. — Bulletins de l'académie royale de Belgique. 1883. p. 85.)

Úlohy.

Řešení úlohy 8. z ročníku XIII.

(Zaslal p. *Leo Schedlbauer*, stud. VII. tř. gymn. v Klatovech.)

a) Zrychlení $\gamma = \frac{2s}{t^2} = 1{\cdot}5m.$

b) Rychlosť konečná $v = \gamma t = 9m.$

c) Značí-li m hmotnosť tělesa a n koëfficient tření, jest svahová váha $= mg \sin\alpha$, velikosť tření $= n\,.\,mg\cos\alpha$ a síla, která tělu uděluje zrychlení γ rovna $m\gamma$, tedy