Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Antonín Pleskot

O jistém theoremu vztahujícím se k problému normál křivek algebraických

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 60 (1931), No. 2, 57--71

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121427

# O jistém theoremu vztahujícím se k problému normál křivek algebraických.

Dr. *Ant. Pleskot*, profesor v Plzni.

(Došlo 1. října 1930.)

Budiž dána křivka $K$ $n$-tého stupně o rovnici

$$F(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots = 0, \tag{1}$$

k níž bodem $A$ v její rovině ležícím veďme normály; označíme-li paty normál na křivce $B_1$, $B_2$, ... $B_i$ atd. a poloměry křivosti křivky v patách těch $\varrho_1$, $\varrho_2$, ... $\varrho_i$ atd., tu lze dokázati theorem:

$$\sum \frac{\varrho_i}{\varrho_i - n_i} = \frac{\varrho_1}{\varrho_1 - n_1} + \frac{\varrho_2}{\varrho_2 - n_2} + \ldots = n, \tag{$\alpha$}$$

značí-li $n_i$ délku normály $B_iA$ a vztahuje-li se součet $\Sigma$ na všechny paty normál.

Rovnice tato jest zajímavá tím, že hodnota výrazu $\Sigma \frac{\varrho_i}{\varrho_i - n_i}$ nezáleží na ničem jiném než na stupni křivky a jest právě rovna stupni křivky.

Abychom theorem tento dokázali, označme $(a, b)$ souřadnice bodu $A$, souřadnice bodu $B_i$ buďtež $(x_i, y_i)$ a souřadnice středu křivosti $S_i$ křivky v bodě $B_i$ nechť jsou $(\xi_i, \eta_i)$.

Výraz $\frac{\varrho_i}{\varrho_i - n_i}$ označme $\lambda_i$; pak platí:

$$\lambda_i = \frac{\varrho_i}{\varrho_i - n_i} = \frac{1}{1 - \frac{n_i}{\varrho_i}},$$

kdež

$$\frac{n_i}{\varrho_i} = \frac{B_iA}{B_iS_i} = \frac{a - x_i}{\xi_i - x_i} = \frac{b - y_i}{\eta_i - y_i}.$$

Jest tedy dokázati, že platí vztah:

$$\sum \lambda_i = \sum \frac{\eta_i - y_i}{\eta_i - b} = \sum \frac{\xi_i - x_i}{\xi_i - a_i} = n.$$

Píšeme-li místo $x_i$ a $y_i$ zkrátka $x$ a $y$ a místo $\xi_i$ a $\eta_i$, $\xi$ a $\eta$, pak souřadnice pat normál jsou dány jako společné kořeny rovnic:

$$F(x, y) = 0,$$
$$(y - b)F_1 - (x - a)F_2 = 0, \tag{2}$$

značí-li

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Veličina $\eta$ jest stanovena rovnicí:

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''},$$

kdež

$$y' = -\frac{F_1}{F_2}$$

a

$$y'' = -\frac{F_2^2 F_{11} + F_1^2 F_{22} - 2F_1 F_2 F_{12}}{F_2^3},$$

značí-li

$$F_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad F_{12} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad F_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

Výraz pro $\lambda$ nabývá pak hodnoty:

$$\lambda = \frac{1 + y'^2}{(y - b)\, y'' + 1 + y'^2}.$$

Dosadíme-li za $y'$ a $y''$ hodnoty z rovnic předchozích, dospějeme k rovnici:

$$\lambda = \frac{F_2(F_1^2 + F_2^2)}{F_2(F_1^2 + F_2^2) + (y - b)\,(2F_1F_2F_{12} - F_{11}F_2^2 - F_{22}F_1^2)}.$$

Výrazu tomu lze dáti formu jednodušší, zavedeme-li označení

$$(y - b)F_1 - (x - a)F_2 = \Phi(x, y);$$

tu

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (y - b)\, F_{11} - (x - a)\, F_{12} - F_2,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = (y - b)\, F_{12} - (x - a)\, F_{22} + F_1.$$

Znásobíme-li druhou z těchto rovnic $F_1$ a prvou $F_2$ a pak prvou od druhé odečteme, dostaneme rovnici:

$$F_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y} - F_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} =$$
$$= (y - b)\,(F_1F_{12} - F_2F_{11}) + (x - a)\,(F_2F_{12} - F_1F_{22}) + F_1^2 + F_2^2.$$

Píšeme-li v této rovnici podle druhé rovnice v soustavě (2) za $x - a$

$$x - a = \frac{(y-b)\,F_1}{F_2},$$

pak obdržíme:

$$F_2\left(F_1\frac{\partial \Phi}{\partial y} - F_2\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) =$$

$$= (y-b)\,(2F_1F_2F_{12} - F_2^2F_{11} - F_1^2F_{22}) + F_2(F_1^2 + F_2^2).$$

Výraz na pravé straně této rovnice jest však jmenovatelem v předchozí rovnici pro $\lambda$ a tudíž

$$\lambda = \frac{F_1^2 + F_2^2}{F_1\frac{\partial \Phi}{\partial y} - F_2\frac{\partial \Phi}{\partial x}}, \qquad (3)$$

kterýžto výraz pišme ve tvaru:

$$\lambda = \frac{F_1^2 + F_2^2}{D}, \qquad (3)$$

klademe-li

$$D = F_1\frac{\partial \Phi}{\partial y} - F_2\frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Jest tedy dokázati větu:

Je-li dána čára $n$-tého stupně

$$F(x, y) = 0$$

a křivka $\Phi$ téhož stupně

$$\Phi(x, y) = (y-b)F_1 - (x-a)\,F_2 = 0 \qquad (2')$$

a jsou-li $x$ a $y$ společné kořeny obou rovnic, pak výraz:

$$\sum \lambda = \sum \frac{F_1^2 + F_2^2}{D} = n,$$

vztahuje-li se součet na $n^2$ společných kořenů rovnic (2'). K důkazu použijeme známé věty Jacobiho, která zní:

Jsou-li dány dvě rovnice algebraické

$$F(x, y) = 0,$$
$$\Psi(x, y) = 0,$$

a značí-li $\omega(x, y)$ libovolný polynom, jehož stupeň jest nižší než stupeň výrazu:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

pak

$$\sum \frac{\omega(x, y)}{F_1 \frac{\partial \Psi}{\partial y} - F_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x}} = 0,$$

vztahuje-li se součet na všechny společné kořeny hořejších obou rovnic. O rovnici (1) předpokládejme, že koeficienty $a_0$, $a_k, \ldots$ jednotlivých členů ve výrazu $F(x, y)$ jsou naprosto čísla obecná, taktéž o bodu $A$ předpokládejme, že jeho poloha jest obecná, pak jest obecně stupeň rovnice $\Phi(x, y) = 0$ roven $n$, žádné kořeny ze společných kořenů rovnic (2) nejsou nekonečně velké a i jmenovatel $D$ ve výrazu pro $\lambda$ jest obecně různý od nuly.

Utvořme výraz:

$$\lambda - 1 = -\frac{(y-b)(F_1F_{12} - F_2F_{11}) + (x-a)(F_2F_{12} - F_1F_{22})}{D} =$$

$$= -\frac{y(F_1F_{12} - F_{11}F_2)}{D} +$$

$$+ \frac{x(F_2F_{12} - F_1F_{22}) - b(F_1F_{12} - F_{11}F_2) - a(F_2F_{12} - F_1F_{22})}{D}.$$

Tu pak, poněvadž všech společných kořenů jest $n^2$, platí:

$$\sum(\lambda - 1) = \sum \lambda - n^2 =$$

$$= -\sum \frac{y(F_1F_{12} - F_{11}F_2) + x(F_2F_{12} - F_1F_{22})}{D} +$$

$$+ \sum \frac{b(F_1F_{12} - F_{11}F_2) + a(F_2F_{12} - F_{22}F_1)}{D}.$$

Druhý součet na pravé straně předchozí rovnice jest roven nule, ježto stupeň jeho čitatele jest obecně $2n - 3$, kdežto $D$ jest obecně stupně $2n - 2$ a proto

$$\sum \lambda = n^2 - \sum \frac{x(F_2F_{12} - F_1F_{22}) + y(F_1F_{12} - F_{11}F_2)}{D}.$$

Funkci $F(x, y)$ rozložme na dvě části:

$$F(x, y) = f(x, y) + \varphi(x, y),$$

kdež $f(x, y)$ značí souhrn členů z funkce $F(x, y)$, jejichž rozměr jest $n$, kdežto zbytek $\varphi(x, y)$ jest stupně nižšího.

I jest:

$$\begin{aligned} F_1 &= f_1 + \varphi_1 \\ F_2 &= f_2 + \varphi_2 \\ F_{12} &= f_{12} + \varphi_{12} \\ &\vdots \qquad \vdots \end{aligned}$$

Výraz pro $\Sigma\lambda$ možno psáti ve tvaru.

$$\sum \lambda = n^2 - \sum \frac{x(f_2 f_{12} - f_1 f_{22}) + y(f_1 f_{12} - f_{11} f_2)}{D} =$$

$$= n^2 - \sum \frac{f_{12}(x f_2 + y f_1)}{D} + \sum \frac{x f_1 f_{22} + y f_{11} f_2}{D},$$

neboť členy, které jsme oproti dřívějšímu součtu vynechali, jsou stupně nižšího, než jest stupeň jmenovatele $D$ a jejich součet tedy roven nule. Výraz na pravé straně předchozí rovnice lze ještě psáti ve formě jiné; použitím věty o homogenních funkcích lze psáti:

$$(n-1)f_1 = x f_{11} + y f_{12},$$
$$(n-1)f_2 = x f_{12} + y f_{22}.$$

Znásobíme-li prvou z těchto rovnic $f_1$ a druhou $f_2$ a pak je sečteme, obdržíme:

$$(n-1)(f_1^2 + f_2^2) = f_{12}(y f_1 + x f_2) + x f_1 f_{11} + y f_2 f_{22};$$

hodnotu $f_{12}(y f_1 + x f_2)$ plynoucí z této rovnice dosaďme do hořejší rovnice pro $\Sigma\lambda$, čímž obdržíme:

$$\sum \lambda = n^2 - (n-1)\sum \frac{f_1^2 + f_2^2}{D} + \sum \frac{(x f_1 + y f_2)(f_{11} + f_{22})}{D}.$$

V rovnici této výraz

$$x f_1 + y f_2 = n f$$

a výraz

$$\sum \frac{f_1^2 + f_2^2}{D} = \sum \lambda,$$

neboť ve výrazu

$$\sum \frac{F_1^2 + F_2^2}{D} = \frac{(f_1 + \varphi_1)^2 + (f_2 + \varphi_2)^2}{D}$$

členy $f_1^2 + f_2^2$ v čitateli zlomku na pravé straně rovnice jsou stupně $2n-2$, stupně to jmenovatele $D$, kdežto souhrn ostatních v čitateli jest stupně nižšího a tedy součet na ně se vztahující jest roven nule. Za těchto zjednodušení lze hořejší rovnici pro $\Sigma\lambda$ psáti ve tvaru:

$$\sum \lambda = n^2 - (n-1)\sum \lambda + \sum \frac{n f(f_{11} + f_{22})}{D},$$

t. j.

$$n\sum \lambda = n^2 + \sum \frac{n f(f_{11} + f_{22})}{D},$$

čili

$$\sum \lambda = n + \sum \frac{f(f_{11} + f_{22})}{D}.$$

Položíme-li konečně v této rovnici za $f$

$$f = F - \varphi,$$

pak

$$\sum \lambda = n + \sum \frac{F(f_{11} + f_{22})}{D} - \sum \frac{\varphi(f_{11} + f_{22})}{D}.$$

Poněvadž pro společné kořeny rovnic $F(x, y) = 0$ a $\Phi(x, y) = 0$ jest

$$F = 0,$$

tedy

$$\sum \frac{F(f_{11} + f_{22})}{D} = 0$$

a poněvadž stupeň výrazu $\varphi(f_{11} + f_{22})$ jest nejvýše stupně $2n - 3$ a tedy stupně nižšího jmenovatele $D$, jenž jest stupně $2n - 2$, jest i

$$\sum \frac{\varphi(f_{11} + f_{22})}{D} = 0$$

a proto

$$\sum \lambda = n,$$

čímž věta dokázána.

Theorem právě dokázaný byl dokázán pro případ, že koeficienty v rovnici křivky $F = 0$ jsou čísla docela libovolná. Pochybnosti o správnosti věty mohly by vzniknouti tehdy, kdy některé průsečíky křivek $F = 0$ a $\Phi = 0$ padnou do vzdálenosti nekonečně velké a kdy jmenovatel výrazu

$$\lambda = \frac{F_1^2 + F_2^2}{F_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y} - F_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x}}$$

t. j. výraz

$$F_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y} - F_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} = D = 0.$$

Vezměme v úvahu nejprve případ druhý. Předpokládejme zprvu, že křivka daná nemá bodů vícenásobných a že obě křivky $F = 0$ a $\Phi = 0$ nemají společných bodů v nekonečnu. Ze vzorce

$$\sum \lambda = \sum \frac{1}{1 - \frac{n_i}{\varrho_i}}$$

vidíme, že jen v případě, kdy $1 - \frac{n_i}{\varrho_i} = 0$, t. j.

$$\varrho_i = n_i,$$

příslušný výraz pro $\lambda$ pozbývá významu. V případě tom bod $A$

jest středem křivosti pro příslušnou patu normály. Křivky $F$ a $\Phi$ v tomto případě v průsečném bodě se dotýkají; podmínka však, aby se dotýkaly, jest právě

$$F_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y} - F_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0.$$

Theorem neztrácí v případu tomto svoji platnost, neboť stačí posunouti bod $A$ velmi málo a výraz $D$ nevymizí; blíží-li se nyní zpětně bod $A$ k své původní poloze, platí stále $\Sigma\lambda = n$ a my přisoudíme tuto limitu $n$ hodnotě součtu $\Sigma\lambda$ pro bod $A$. Zbývá proto dokázati, že theorem náš jest platný v případě, že křivka daná má body vícenásobné a v případě, že mají křivky $F = 0$ a $\Phi = 0$ v nekonečnu body společné, neboť v obou těchto případech nejsou body ty obecně patami normál, ačkoliv obě křivky jimi procházejí. Jest proto nutno tyto body v součtu $\Sigma\lambda$ vyloučiti pokud nejsou náhodou patami.

Že i v tomto případě theorem platí, dokážeme v následujícím.

Předpokládejme prozatím, že daná křivka $K$ má jen jeden bod vícenásobný k. p. $k$ násobný a že tečny v něm jsou vesměs od sebe různy; předpokládejme taktéž, že křivky $F = 0$ a $\Phi = 0$ nemají v nekonečnu bodů společných.

Vícenásobný bod $O$ položme do počátku souřadnic, takže rovnice křivky $F = 0$ možno psáti ve tvaru:

$$f_k(x, y) + f_{k+1}(x, y) + \ldots + f_n(x, y) = 0,$$

kdež $f_k(x, y)$, $f_{k+1}(x, y)$ atd. značí homogenní funkce proměnných $x$, $y$ stupně $k$, $k + 1$, atd.

Osy $X$ a $Y$, k nimž rovnice křivky jest vztažena, možno voliti tak, že žádná z tečen v bodě singulárním neztotožní se s osou $Y$.

Rovnici křivky pišme ve tvaru:

$$x^k f_k\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^{k+1} f_{k+1}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \ldots + x^n f_n\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0$$

a položme v ní

$$\frac{y}{x} = t;$$

píšeme-li zkrátka místo $f_m\left(1, \frac{y}{x}\right)$, $f_m(t)$, pak rovnice křivky nabývá tvaru:

$$F(x, y) = x^k f_k(t) + x^{k+1} f_{k+1}(t) + \ldots + x^n f_n(t) = 0, \text{ kdež}$$

$f_k(t)$ jest racionální funkce celistvá veličiny $t$ stupně $k$-tého a rovnice

$$f_k(t) = 0$$

nemá kořenů vícenásobných.

Změňme danou křivku $K$ nekonečně málo v křivku $K'$, aby bod singulární vymizel; to učiníme tak, že rovnici křivky změníme v rovnici:

$$F' = -\varepsilon + x^k f_k(t) + x^{k+1} f_{k+1}(t) + \ldots + x^n f_n(t) = 0,$$

kdež $\varepsilon$ značí veličinu libovolně malou od nuly různou.

Příslušnou křivku $\Phi$ ke křivce $F'$ označme $\Phi'$; patrně $\Phi'$ se ztotožňuje s $\Phi$. Pro křivku $K'$ platí theorem náš, poněvadž nemá vícenásobného bodu.

Budiž nyní bod $A$ tak položen, že neleží na žádné normále bodu singulárního.

Platnost theoremu pro křivku $K$ bude zajisté dokázána, dokáže-li se, že součet $\Sigma\lambda'$ vztahující se na ty průsečíky křivek $F'$ a $\Phi'$, jež konvergují k bodu singulárnímu $O$, konverguje k nule při $\varepsilon \to 0$.

Tu vypočteme:

$$F'_1 = F_1 = x^{k-1}(kf_k - tf'_k) + x^k A_1 + x^{k+1} A_2 + \ldots,$$
$$F'_2 = F_2 = x^{k-1} f'_k + x^k B_1 + x^{k+1} B_2 + \ldots,$$

kdež $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ atd., znamenají racionální celistvé funkce veličiny $t$.

Poněvadž jedná se o průsečíky křivek $F'$ a $\Phi'$, jež konvergují k bodu $O(0, 0)$, určeme nejprve rovnici přibližnou pro $\Phi'$, jež bude patrně značiti souhrn tečen vedených k ní v bodě $O$; ta zní:

$$-bF_1 + aF_2 = 0;$$

rovnice tato nevymizí identicky, poněvadž $a$ a $b$ nemohou současně rovnati se nule, ježto by bod $A$ ležel na normále bodu vícenásobného.

Zavedeme-li v této rovnici veličinu $t$, pak obdržíme:

$$-bF_1 + aF_2 = x^{k-1}[(a + bt) f'_k - kbf_k] = 0.$$

Rovnice:

$$-kbf_k(t) + (a + bt) f'_k(t) = 0 \tag{4}$$

stanoví směrnice tečen, jež v bodě $O$ ke křivce $\Phi' \equiv \Phi$ jsou vedeny. Tečny ty mají rovnice:

$$y = t_1 x, \quad y = t_2 x, \ldots \quad y = t_{k-1} x,$$

kdež $t_1, t_2, \ldots t_{k-1}$ jsou kořeny rovnice (4).

Kdyby některá z těchto tečen ztotožňovala se s osou $y$ a tedy příslušné $t$ bylo nekonečně veliké, stačí, aby tento případ vymizel, otočiti osy o nějaký malý úhel.

Rovnice křivky $\Phi'$ pak zní:

$$\Phi' = [-kbf_k + (a + bt) f'_k] x^{k-1} + x^k C_1 + x^{k+1} C_2 + \ldots = 0.$$

Stanovíme-li nyní průsečíky přímek $y = tx$ s křivkou $K'$:

$$-\varepsilon + x^k f_k(t) + \ldots = 0,$$

pak dostaneme úsečky průsečíků křivek $\Phi'$ a $F'$, které s $\varepsilon \to 0$ konvergují k bodu $O$.

Tu pak obdržíme, omezíce se na nejnižší mocniny veličiny $\varepsilon$,

$$x = \frac{\varepsilon^{1/k}}{\sqrt[k]{f_k(t)}} \quad \text{a} \quad y = \frac{t\varepsilon^{1/k}}{\sqrt[k]{f_k(t)}},$$

kdež $t$ značí kterýkoli kořen rovnice (4).

Hodnota $f_k(t)$ nemůže vymizeti, neboť kdyby $f_k(t) = 0$, pak z rovnice (4) by plynulo, že buď $a + bt = 0$ aneb $f'_k(t) = 0$. Oba případy jsou vyloučeny, neboť v prvém případě musil by bod $A$ ležeti na normále v bodě $O$ ke křivce $K$ vedené, a v případě druhém musila by míti rovnice $f_k(t) = 0$ kořeny vícenásobné.

Dosadíme-li hodnoty $(x, t)$ do výrazu pro $\lambda$,

$$\lambda = \frac{F_1^2 + F_2^2}{F_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y} - F_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x}},$$

a vynecháme-li veličiny nekonečně malé podle $\varepsilon$ stupňů vyšších proti stupňům nižším, obdržíme po krátkém výpočtu, jejž nebudeme do detailů prováděti:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon^{1/k}}{\sqrt[k]{f_k}} \; \frac{(kf_k - tf'_k)^2 + f'^2_k}{(a + bt)\,[kf_k f''_k - (k-1)\, f'^2_k]}.$$

Hodnota této limity jest obecně nula; neboť podle našich předpokladů mohl by jmenovatel vymizeti jen tehdy pro kořen $t$ rovnice (4), kdyby současně hověl rovnici:

$$kf_k(t)\, f''_k(t) + (1 - k)\, f'^2_k(t) = 0; \tag{5}$$

kdyby ale tento výraz vymizel, pak posuneme bod $A$ nekonečně málo do polohy $A_1$. Tím se změní kořeny rovnice (4), kdežto kořeny rovnice (5) se nezmění, neboť ta na $a$ a $b$ nezávisí. Theorem jest tedy platný pro bod $A_1$. Paty skutečné normál bodem $A$ a $A_1$ vedených jsou navzájem nekonečně blízko u sebe a proto příslušné součty $\Sigma\lambda$ a $\Sigma\lambda_1$ liší se od sebe nekonečně málo, je-li součet $\Sigma\lambda$ konečný; ten ale jest, až na výjimku, že by bod $A$ ležel ve středu křivosti některé paty. Poněvadž pak $\Sigma\lambda' = n$, ať jakkoli se zpětně přiblíží bod $A_1$ k $A$, jest proto $\Sigma\lambda = n$.

Zbývá dokázati, že theorem platí i pro křivky, jež mají některé tečny v singulárním bodě splývající.

Snadno se nahlédne, že výraz $\Sigma\lambda$ vztahující se na všechny paty skutečné jest vyjádřen též racionální funkcí koeficientů rovnice $F = 0$. Jestliže jistá tečna u křivky $K$ jest mnohonásobná, pak libovolně nekonečně málo změňme koeficienty ve $f_k(t)$, aby kořeny rovnice $f_k(t) = 0$ byly různé. Tím rozpadne se tečna vícenásobná v soustavu tečen jednoduchých vesměs od sebe různých a těsně k tečně vícenásobné přiléhajících.

Pro křivku $K'$ takto vzniklou jest součet $\Sigma\lambda'$ vztahující se na všechny paty skutečné identicky roven $n$. I bude také identicky roven $n$ součet $\Sigma\lambda$ vztahující se na paty skutečné křivky $K$, jest-li součet ten jest konečný; to ale jest, až na výjimku, že by náhodně ležel bod $A$ ve středu křivosti některé paty, kterýžto případ byl již dříve vyložen. Tím dokázána platnost theoremu pro jakýkoli singulární bod.

Má-li křivka singulárních bodů více, platí ovšem výsledek týž.

Zbývá pouze dokázati, že theorem neztrácí svou platnost v případě, kdy křivky $F = 0$ a $\Phi = 0$ mají společné body v nekonečnu. Úběžné body křivky $K$ určíme ze členů $n$-tého stupně rovnice $F(x, y/x = 0$. Souhrn členů těch buď dán výrazem:

$$\overline{F}(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_ny^n;$$

směrnice $y/x=t$ úběžných bodů křivky $K$ jsou stanoveny rovnicí:

$$f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_nt^n = 0.$$

Směrnice úběžných bodů křivky $\Phi(x, y) = 0$ určíme z rovnice

$$y\overline{F}_1 - x\overline{F}_2 = 0,$$

kdež $\overline{F}_1$ a $\overline{F}_2$ značí parciální derivace funkce $\overline{F}(x, y)$. Tu pak obdržíme:

$$\overline{F}_1 = x^{n-1}(nf(t) - tf'(t)),$$
$$\overline{F}_2 = x^{n-1}f'(t)$$

a směrnice úběžných bodů křivky $\Phi = 0$ jsou pak stanoveny rovnicí:

$$ntf(t) - (1 + t^2)f'(t) = 0.$$

Rovnice tato má s rovnicí $f(t) = 0$ společné kořeny, platí-li buď $f'(t) = 0$, aneb $1 + t^2 = 0$, t. j. $t = \pm i$.

Křivky $F$ a $\Phi$ mají proto v nekonečnu body společné, jestliže úběžné body dané křivky $K$ nejsou vesměs různy, aneb má-li daná křivka v nekonečnu body cirkulární.

Předpokládejme nejprve, že křivky $F$ a $\Phi$ mají v nekonečnu společné body, jež nejsou cirkulární. Tyto body nepokládejme za vlastní paty normál a proto jest nutno v součtu $\Sigma\lambda$ je vypustiti. Abychom dokázali, že i v tomto případě theorem neztrácí svou platnost, změňme nekonečně málo rovnici $f(t) = 0$, aby tato neměla kořenů vícenásobných. Křivka daná $K$ přemění se v křivku $K'$, pro kterou theorem náš platí stále, jestliže zpětně $K'$ blíží se ku $K$.

I jest možno dokázati stejným postupem, jehož jsme použili při vyšetřování vícenásobných bodů, že platí věta: Blíží-li se zpětně křivka $K'$ ke křivce $K$, pak pro ona $\lambda'_1$, která vztahují se na ty paty křivky $K'$, jež blíží se k témuž úběžnému bodu (jenž není cirkulárním pro křivku $K$), příslušný součet $\Sigma\lambda'_1$ konverguje k nule. Z toho plyne docela stejným postupem, jehož jsme užili při vyšetřování singulárních bodů, že platí theorem náš i v případě, kdy křivky $F = 0$ a $\Phi = 0$ mají v nekonečnu body společné, jež nejsou cirkulární. Body ty prostě vypustíme v součtu $\Sigma\lambda$, jako jsme vypustili body vícenásobné, neležely-li ty náhodou na normále bodu singulárního.

Mají-li však křivky $F = 0$ a $\Phi = 0$ v nekonečnu body společné, jež jsou body kruhovými, pak jest nutno body ty v součtu $\Sigma\lambda$ jako paty v počet vzíti, aby theorem zůstal v platnosti.

Jedná-li se o to, abychom stanovili součet $\Sigma\lambda_2$, který vztahuje se na body kruhové křivky $K$, pak změňme křivku tu v $K'$, měníce nekonečně málo koeficienty členů nejvyššího stupně výrazu $F(x, y)$, aby kruhové body vymizely a pak určíme limitu $\Sigma\lambda'_2$ vztahující se na ony body průsečné křivek $F'(x, y) = 0$ a $\Phi'(x, y) = 0$, které vzdalují se do nekonečna ke kruhovým bodům, když necháme v transformované rovnici $F' = 0$ konvergovati změněné koeficienty k hodnotám původním. Kdybychom opominuli v součtu $\Sigma\lambda$ členy vztahující se na kruhové body křivky, pak součet pro paty normál vlastních by byl

$$\sum \lambda = n - \sum \lambda_2.$$

Možno tedy vysloviti větu:

Theorem na začátku naší úvahy uvedený jest platný pro všecky křivky algebraické; má-li křivka daná kruhové body v nekonečnu, jest nutno tyto body přičísti k patám normál, aby theorem zůstal v platnosti.

Připojme ještě k předchozímu poznámku týkající se kružnice.

Budiž dána kružnice o rovnici:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Je-li k ní vésti bodem $A(a, b)$ normály, tu paty normál jsou stanoveny rovnicemi:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$
$$-2bx + 2ay = 0.$$

Rovnice druhá v soustavě předchozí jest lineární, kdežto podle úvahy základní má býti kvadratická. Řešením soustavy předchozí obdržíme dvě paty a tu snadným výpočtem obdržíme pro paty ty

$$\sum \lambda = 0$$

a nikoli 2, jak teorie žádá. Příčina vězí v tom, že opominuty byly společné body křivek $\Phi = 0$ a $F = 0$, jež padnou do vzdálenosti nekonečně velké a jsou body kruhovými. Lineární rovnice

$$-2bx + 2ay = 0$$

jest jen částí křivky $\Phi = 0$, druhá část její jest nekonečně vzdálená přímka, jakž bychom se přesvědčili zavedením homogenních souřadnic. Ukažme ještě, že pro body kruhové kružnice součet $\Sigma\lambda_1$ vztahující se na ně, jest roven 2. To ovšem plyne přímo z theoremu obecného, poněvadž pro paty padnoucí do konečna příslušný součet roven jest nule; nicméně pro zajímavost řešme úlohu tu přímo. Změňme tedy v rovnici kruhu koeficienty nekonečně málo, aby kruhové body vymizely. Nejjednodušší bude, že kružnici budeme pokládati za limitu elipsy:

$$x^2(1+\varepsilon) + y^2 - 1 = 0,$$

limituje-li $\varepsilon$ k nule.

Tu

$$F_1 = 2x(1+\varepsilon),\ F_2 = 2y$$

$$\Phi = 2(y-b)(1+\varepsilon)x - 2y(x-a) = 0$$

$$= 2xy\varepsilon - 2bx(1+\varepsilon) + 2ay = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2y\varepsilon - 2b(1+\varepsilon),$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 2x\varepsilon + 2a$$

a

$$\lambda = \frac{4y^2 + 4x^2(1+\varepsilon)^2}{4x^2\varepsilon(1+\varepsilon) + 4ax(1+\varepsilon) - 4\varepsilon y^2 + 4by(1+\varepsilon)}.$$

Z rovnice $\Phi = 0$ určíme:

$$y = \frac{bx(1+\varepsilon)}{a+\varepsilon x}.$$

Dosadíme-li hodnotu $y$ do rovnice elipsy, určíme pro úsečku pat normál rovnici:

$$x^2(1+\varepsilon)(a+\varepsilon x)^2 + b^2x^2(1+\varepsilon)^2 - (a+\varepsilon x)^2 = 0.$$

Z rovnice předchozí, která jest stupně 4., jest patrno, že, klademe-li v ní $\varepsilon = 0$, přechází v rovnici stupně druhého, t. j. dva její kořeny s $\varepsilon \to 0$ vzdalují se do nekonečna. Abychom určili vztah mezi $\varepsilon$ a úsečkou bodů blížících se do nekonečna, zaveďme substituci:

$$x = \frac{1}{x_1};$$

blíží-li se $x$ k hodnotě nekonečně velké, konverguje $x_1$ k nule. Zavedením hodnoty této místo $x$ obdržíme rovnici:

$$(ax_1 + \varepsilon)^2(1+\varepsilon) + b^2x_1^2(1+\varepsilon)^2 - (ax_1+\varepsilon)^2x_1^2 = 0.$$

Jestliže v této rovnici $\varepsilon \to 0$, pak existují dvě hodnoty pro $x_1$ limitující taktéž k nule. Ty obdržíme známým způsobem ze zkrácené rovnice:

$$(ax_1 + \varepsilon)^2 + b^2 x_1^2 = 0,$$

z níž plyne:

$$ax_1 + \varepsilon = \pm bxi,$$

t. j.

$$x_1 = -\frac{\varepsilon}{a - bi},$$

$$x_2 = -\frac{\varepsilon}{a + bi}.$$

Položíme-li pro krátkost

$$\beta_1 = -\frac{1}{a - bi}, \quad \beta_2 = -\frac{1}{a + bi},$$

pak

$$x_1 = \beta_1 \varepsilon, \quad x_2 = \beta_2 \varepsilon.$$

Vezměme nejprve v úvahu hodnotu $x_1 = \beta_1 \varepsilon$; tu bude nutno postoupiti k dalšímu rozvoji; položíme-li

$$x_1 = \beta_1 \varepsilon (1 + \alpha \varepsilon),$$

pak známým způsobem obdržíme:

$$\alpha = -\frac{b\beta_1 i}{2},$$

a tedy

$$x_1 = \beta_1 \varepsilon \left(1 - \frac{b\beta_1}{2} \varepsilon i\right).$$

Položíme-li ještě

$$y = \frac{1}{y_1},$$

tu roste-li $x$ do nekonečna, pak z rovnice elipsy patrno, že roste $y$ taktéž do nekonečna, tedy $y_1 \to 0$. Hodnotu

$$\frac{y}{x} = \frac{x_1}{y_1}$$

určíme z rovnice $y = \frac{bx(1+\varepsilon)}{a + \varepsilon x}$, z níž plyne:

$$\frac{y}{x} = \frac{b(1+\varepsilon)}{a + \varepsilon x} = \frac{b(1+\varepsilon)}{a + \frac{\varepsilon}{x_1}} = \frac{bx_1(1+\varepsilon)}{ax_1 + \varepsilon}.$$

Dosadíme-li do této rovnice za $x_1$ hodnotu hořejší, tu obdržíme:

$$\frac{y}{x} = -i(1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon),$$

k níž připojme rovnici:

$$\frac{1}{x} = \beta_1\varepsilon(1 - \tfrac{1}{2}b\beta_1 i\varepsilon).$$

Tyto hodnoty dosaďme do rovnice pro $\lambda$, kterou upravíme na tvar:

$$\lambda_1 = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + (1+\varepsilon)^2}{\varepsilon(1+\varepsilon) + a\frac{1+\varepsilon}{x} - \varepsilon\left(\frac{y}{x}\right)^2 + b\frac{y}{x}\frac{1+\varepsilon}{x}}.$$

Ponecháme-li v tomto výrazu po dosazení jen veličiny nekonečně malé podle $\varepsilon$ stupně prvého, obdržíme

$$\lambda_1 = \frac{-1 - \varepsilon + 1 + 2\varepsilon}{\varepsilon + a\beta_1\varepsilon + \varepsilon - b\beta_1 i\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2\varepsilon + \beta_1(a - bi)\varepsilon};$$

avšak

$$\beta_1 = -\frac{1}{a - bi} \text{ a tedy } \beta_1(a - bi) = -1$$

a proto

$$\lambda_1 = \lim \lambda_1 = \lim \frac{\varepsilon}{2\varepsilon - \varepsilon} = 1.$$

Provedeme-li nyní týž výpočet s kořenem $x_2$, pak obdržíme docela stejným způsobem:

$$\lambda'_1 = 1$$

a tudíž

$$\lambda_1 + \lambda'_1 = 2,$$

jakž bylo dokázati.

Poznámka. Podnět k nalezení tohoto theoremu obecného byl mi dán článkem, který uveřejnil Dr. Werner Gaedecke v časopise „Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft“ Band 15, kde autor dokázal, že pro elipsu a hyperbolu platí vztah

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_1 - n_1} + \frac{\varrho_2}{\varrho_2 - n_2} + \frac{\varrho_3}{\varrho_3 - n_3} + \frac{\varrho_4}{\varrho_4 - n_4} = 2,$$

a pro parabolu:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_1 - n_1} + \frac{\varrho_2}{\varrho_2 - n_2} + \frac{\varrho_3}{\varrho_3 - n_3} = 2,$$

kterýžto vztah vyslovil dříve Barisien v „Nouvelles annales de mathématiques“, Tome 7.

## Sur un théorème concernant le problème des normales des courbes algébriques.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur démontre le théorème suivant:

Étant donnée une courbe algébrique de l'ordre $n$, menons par un point $A$ de son plan les normales à cette courbe et soient $B_i$ les pieds de ces normales sur la courbe; soient de plus $S_i$ les centres de courbure de la courbe en ces points. Si l'on pose $n_i = B_iA$, $\varrho_i = S_iA$, on a la relation

$$\sum_i \frac{\varrho_i}{\varrho_i - n_i} = n$$

la somme s'étendant à toutes les normales.

Le théorème est démontré tout d'abord pour les courbes sans points singuliers, ensuite pour les courbes possédant des points singuliers. Le théorème reste valable aussi pour le cas où la courbe donnée et la courbe qui la coupe aux pieds des normales cherchées ont des points à l'infini communs. Si, cependant, ces points sont les points circulaires, il faut les considérer comme pieds de normales pour que le théorème reste vrai.

Ce dernier cas est mis en évidence par la considération du cas d'un cercle.