Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Bohuslav Hostinský

# O základních úlohách počtu pravděpodobnosti

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 57 (1928), No. 3-4, 267--275

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121381

# O základních úlohách počtu pravděpodobnosti.

Napsal *Bohuslav Hostinský.*

Výpočet pravděpodobnosti v elementárních úlohách (vrh kostkou nebo penízem a pod.) převádí se obvykle na úlohy kombinatorické; pravděpodobnost se při tom definuje jakožto poměr, ve kterém je počet všech „případů příznivých„ k počtu všech případů vůbec možných. Tato definice zavdala podnět k různým námitkám. H. Poincaré[1]) učinil zde důležitý krok kupředu tím, že některé problémy rozřešil novým způsobem, s obecnějšího hlediska. Mám na mysli jednak několik úloh, jichž typem je problém rulety, jednak úlohu o míchání karet. V práci uveřejněné r. 1917[2]) jsem ukázal, že metody, které užil Poincaré k řešení úloh prvého druhu, může býti užito též k úplnějšímu řešení Buffonovy úlohy o jehle. Když pak jsem se věcí podrobněji zabýval, shledal jsem, že metoda ta je všeobecná a že se hodí nejen k řešení takřka každé úlohy o geometrických pravděpodobnostech, nýbrž i k výpočtu pravděpodobností, které se obyčejně za „geometrické" nepovažují a které se odhadují metodami kombinatorickými na základě klasické definice.[3]) Poincaréova metoda použitá v úloze o míchání karet dá se zobecniti a rozšířiti pro případ spojitě proměnných veličin[4]) a vede k důsledkům významným pro statistickou mechaniku[5]); tak do-

[1]) *H. Poincaré:* Calcul des probabilités, 2ième édition, Paris 1912. Introduction; No. 91—93; chap. XVI. V některých věcech vyslovil názory zcela podobné již *J. V Kries* ve spise Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsechnun g, Freiburg i. B. 1882. Poincaréovy myšlenky ocenil u nás *K. Vorovka* v zajímavé práci: Filosofický dosah počtu pravděpodobnosti (Česká mysl, 1913).

[2]) *B. Hostinský:* Nové řešení Buffonovy úlohy o jehle (Rozpravy České Akademie, II. tř. XXVI. č. 13; 1917); Sur une nouvelle solution du probléme de l'aiguille (Bulletin des sciences mathématiques (2) t. 44, p. 126—136; 1920).

[3]) *B. Hostinský:* Geometrické pravděpodobnosti (Praha 1926), kap. VI.; Sur la méthode des fonctions arbitraires dans le Calcul des probabilités (Acta Mathematica, t. 49, p. 95—113; 1926); Sur une méthode générale du Calcul des probabilités (Association Française pour l'avancement des Sciences, Congrès de Lyon, 1926, p. 194—196).

[4]) *B. Hostinský*: Sur les probabilités relatives aux transformations répétées (Comptes Rendus, t. 186, p. 59—61, 487—489; 9. I. 1928, 20. II. 1928); Sur les transformations itérées des variables aléatoires (Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university č. 93; Brno 1928.)

[5]) *J. Hadamard:* Sur les opérations itérées en Calcul des probabilités (Comptes Rendus, t. 186; p. 189—192; 23. I. 1928); Sur le principe ergodique (tamtéž p. 275—276; 30. I. 1928).

cházíme ke druhé obecné metodě počtu pravděpodobnosti. Pojednávám zde o obou metodách, které slouží k řešení základního problému počtu pravděpodobnosti: nalézti vztahy mezi pravděpodobnostmi.

*1. Matematický základ první metody.* — V některých speciálních případech vyložil jsem podrobně, jak se této metody užívá, v šesté kapitole své knihy.[3]) Zde zmíním se jen o případě, kdy integrační obor je dvojrozměrný a o problému kostky.

Rozdělme rovinu $Oxy$ dvěma řadami rovnoběžek k osám $Ox$ a $Oy$ na čtverce; délka strany čtverce budiž $n^{-1}$. Čtverce označme jako na šachovnici, střídavě jákožto „bílé" a „černé". Ze dvou čtverců, které mají jednu stranu společnou, je vždy jeden bílý a druhý černý. Budiž pak $C$ uzavřená křivka, která obsahuje uvnitř jednak celé čtverce, jednak neúplné čtverce na kraji. Dělme součet všech bílých ploch, obsažených uvnitř $C$, celým plošným obsahem křivky $C$; poměr má za limitu $^1/_2$, když $n$ roste do nekonečna. Označme pak znakem $\varphi(x, y)$ spojitou a nezápornou funkci, jejíž integrál, vztažený k „bílé" části vnitřku $C$, rovná se $I_1$, kdežto integrál $I$ vztažený k celému vnitřku $C$ rovná se 1. Liší-li se $\varphi\,(x, y)$ málo od konstanty, jest $I_1$ přibližně rovno $^1/_2$, když $n$ je veliké číslo, neboť pak je součet bílých ploch uvnitř $C$ přibližně roven polovině celého plošného obsahu. Roste-li $n$ do nekonečna, konverguje $I_1$ k limitě $^1/_2$ a to pro jakoukoli spojitou funkci; neboť, zkrátka řečeno, v okolí $A$ libovolného bodu $M$ je $\varphi$ přibližně konstantní a poněvadž $A$ se skládá z nekonečně velikého počtu čtverců bílých a stejně velikého počtu černých, přispívá $A$ k hodnotě integrálů $I_1$ jen polovinou té veličiny, kterou přispívá k integrálu $I$.

Snadno dala by se konstruovati různá jiná dělení roviny, rovněž závislá na parametru $n$, takto: rovina dělí se soustavou čar na obory bílé a černé. Roste-li $n$ do nekonečna, obsahuje vnitřek každé uzavřené křivky $C$ nekonečně mnoho bílých a černých částí. Součet bílých ploch uvnitř $C$ nechť je v limitě v poměru $\lambda : 1$ k celému plošnému obsahu ($\lambda$ je pravý zlomek). Pak jest

$$\lim_{n=\infty} I_1 = \lambda.$$

Výsledek je pozoruhodný tím, že nezávisí vůbec na funkci $\varphi\,(x, y)$; stačí jen předpokládati, že funkce ta jest spojitá.[6])

*2. Užití první metody.* — Uvnitř oboru omezeného uzavřenou křivkou $C$ volíme náhodně bod $M$ a hledáme souvislost mezi těmito dvěma pravděpodobnostmi:

a) pravděpodobností $\varphi\,(x, y)\,dx\,dy$, že bod $M$ leží uvnitř nekonečně malého obdélníka o stranách $dx$, $dy$ v poloze $(x, y)$; $\varphi$ vyhovuje podmínkám uvedeným na konci odstavce 1.

---

[6]) Viz *G. Castelnuovo:* Calcolo delle probabilitá No 72; Milano—Roma—Napoli 1919. Předpoklady o funkci $\varphi$ dají se ještě zjednodušiti: Viz *M. Fréchet:* Remarque sur les probabilités continues (Bulletin des sciences mathématiques (2) t. 45, p. 87—88; 1921).

b) pravděpodobností $p$, že bod $M$ leží v bílé části uvažovaného oboru Je-li tento předpoklad splněn, dojde určitě k nějakému zjevu $E$; leží-li však $M$ v části černé, nenastane $E$. $p$ je tedy pravděpodobnost, že zjev $E$ nastane.

Podle věty o úhrnné pravděpodobnosti jest

$$p = \iint \varphi(x, y)\, dx\, dy,$$

kde integrace se vztahuje k oboru utvořenému souhrnem všech bílých částí uvnitř $C$. Obecně závisí $p$ na $\varphi$ a na $n$; roste-li $n$ (na každou jednotku plošného obsahu uvnitř $C$ připadá $n^2$ čtverců sítě) do nekonečna jest,

$$\lim_{n=\infty} p = \lambda. \tag{1}$$

Problém kostky dá se řešiti také touto metodou. Házíme-li kostkou, musíme dbáti toho, aby impuls, který kostce sdělíme, byl dosti veliký. Neboť při velmi malých impulsech dala by se konečná poloha kostky předvídati a nemělo by smyslu ptáti se po pravděpodobnosti. Velmi malá změna v počátečních podmínkách (totiž v počáteční poloze kostky a v impulsu) má za následek značnou změnu ve výsledku; vyšlo-li by v jednom hodu na př. číslo 1, může vyjíti v druhém hodu jiné číslo, i když se snažíme hoditi kostkou pokud možno stejně v obou případech. Výsledek pokusu jest určen počátečními podmínkami; studium úlohy: nalézti pravděpodobnost $p$, že vyjde určité číslo, převádíme na rozbor počátečních podmínek a jejich pravděpodobností. Počáteční poloha kostky v prostoru jest určena šesti veličinami, složky rychlostí (postupného) a otáčivého pohybu, taktéž šesti; počáteční stav kostky je tedy určen dvanácti veličinami a různé počáteční stavy budou proto znázorněny různými polohami bodu $M$ v prostoru o dvanácti rozměrech. Budiž $d\tau$ element objemu v tomto prostoru a $\varphi(M)\, d\tau$ pravděpodobnost, že náhodně volený bod jest uvnitř elementu $d\tau$ v poloze $M$; funkce $\varphi(M)$ je kladná v určité části $T$ prostoru, která jest obdobou vnitřku křivky $C$ (viz odst. 1). Integrál funkce $\varphi(M)$ vztažený k celé této části $T$ bude se rovnati jedné. Úlohou jest vypočítati integrál ($= p$) vztažený k „bílému" dílu $T_0$ části $T$; ten jest utvořen body $M$, které odpovídají počátečním polohám „příznivým", t. j. vedoucím k samému výsledku. Není možno, aby poměrně veliká konvexní část oboru $T$ náležela celá k $T_0$, neboť pak by malá změna v počáteční poloze nezpůsobila obecně veliké změny ve výsledku. Obor $T$ bude obsahovati veliký počet $n$ částí bílých podobně jako obsahoval vnitřek křivky $C$ mnoho bílých čtverců. Výpočet bílých částí oboru $T$ byl by zajisté velmi nesnadný; musili bychom ke každému bodu $M$ (t. j. k daným počátečním podmínkám) sledovati pohyb kostky a stanoviti její konečnou polohu. Pravděpodobnost $p$ bude přibližně rovna $1/_6$, když v každé malé části oboru $T$ bude splněna tato podmínka: součet bílých dílů je k celé části přibližně v poměru 1 : 6. $p$ je tedy přibližně $= 1/_6$ a to nezávisle na funkci $\varphi$, jejíž průběh vyplývá z podmínek pokusu (pro různé hráče obdržíme různé funkce $\varphi$). Nikdy však nemůžeme tvrditi, že $p$ se rovná přesně $^1/_6$, neboť tato rovnost odpovídá (pro $\lambda = {}^1/_6$) jen limitnímu vztahu (1), když $n$ roste do nekonečna.

Ve všech úlohách, kde vyskytuje se pohyb tělesa (vrh kostkou nebo penízem, tah koule z osudí a pod.) může se této metody užíti; hledaná pravděpodobnost závisí obecně na $n$ i na $\varphi$ a hodnoty, které pro ni dává klasický počet pravděpodobnosti na základě úvah kombinatorických, jsou jen mezními hodnotami skutečných pravděpodobností pro případ, že parament $n$ roste do nekonečna.

*3. Matematický základ druhé metody.* — a) Budiž

$$y_i = \sum_k p_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \dots r$$

substituce, která převádí bod $x$ $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ v bod $y$ $(y_1, y_2, \dots, y_r)$; součet zde i v následujících vzorcích jde od 1 do $r$. Aplikujeme tutéž substituci na bod $y$; obdržíme třetí bod $z$, na který ji aplikujeme opět atd. Iterovaná substituce řádu $n$ má koeficienty

$$p_{ik}^{(n)} = \sum_s p_{is}^{(n-1)} p_{sk}.$$

Jsou-li splněny podmínky:

$$p_{ik} > 0, \quad \sum_k p_{ik} = 1, \quad \sum_k p_{ki} = 1 \tag{2}$$

a to první pro $i, k = 1, 2, \dots, r$ a poslední dvě pro $i = 1, 2, \dots, r$, platí

$$\lim_{n=\infty} p_{ik}^{(n)} = r^{-1} \tag{3}$$

pro všechny hodnoty indexů $i$ a $k$.[7])

b) Budiž

$$g(x) = \int P(x, y) f(y) dy$$

funkční transformace, která přiřaďuje každé funkci $f(x)$ určitou funkci $g(x)$; $P(x, y)$ je daná funkce dvou proměnných, spojitá v oboru $(a \leqq x \leqq b;\ a \leqq y \leqq b)$ a integrační meze jsou zde, jakož i v dalších integrálech, $a$ a $b$. Aplikujeme-li tuto transformaci na $f(x)$ postupně $n$-krát, obdržíme funkci $h(x)$,

$$h(x) = \int P^{(n)}(x, y) f(x) dy,$$

kde

$$P^{(n)}(x, y) = \int P^{(n-1)}(x, z) \,.\, P(z, y) dz.$$

Jsou-li splněny tři podmínky

$$P(x, y) > 0, \int P(x, y) dy = 1, \int P(y, x) dy = 1 \tag{4}$$

[7]) Viz práce citované v pozn. [4]). Základ metody jest obsažen v práci: *J. Hadamard*, Sur le battages des cartes (Comptes Rendus, t. 185, p. 5—9; 4. VII. 1927).

a to potrvá pro libovolné hodnoty $x$, $y$ a poslední dvě pro každé $x$, platí

$$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(x, y) = (b-a)^{-1} \tag{5}$$

pro všechny hodnoty proměnných $x$ a $y$.

*4. Míchání karet.* — Poincaré rozřešil tuto úlohu: Hráč míchá $q$ karet. Při každém míchání permutuje karty určitým způsobem; položme $r = q!$ a předpokládejme, že permutacím $S_1, S_2, \ldots S_r$ (slovem permutace míníme výkon, kterým se pořadí karet mění) odpovídající po řadě pravděpodobnosti $p_1, p_2, \ldots p_r$; při tom jest

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_r = 1. \tag{6}$$

Souhrn čísel $p_i$ charakterisuje individuální zvyky hráčovy; některé permutace mohou se vyskytovati s větší pravděpodobností než jiné. Předpokládajme dále, že žádná z veličin $p_i$ nerovná se nule. Jak veliká jest pravděpodobnost $p^{(n)}$, že, když míchání bylo $n$-kráte provedeno, budou na konec karty v určitém předepsaném pořadí? Poincaré dokázal, užívaje metody velmi složité, že pro každé pořadí karet je na konec pravděpodobnost stejná:

$$\lim_{n=\infty} p^{(n)} = r^{-1}.$$

Tento výsledek dá se podle odst. 3a) dokázati jak následuje. Napišme do jedné řádky všechny permutace $S_1, S_2, \ldots S_r$. Znakem $S_i\, S_k$ označíme permutaci, která vznikne, když nejprve provedeme $S_i$, pak $S_k$. Násobme nyní symbolicky všechny elementy prvního řádku elementem $S_1^{-1}$ (zleva), pak elementem $S_2^{-1}$ atd.[8]) Dostaneme tak schema s $r$ řádky a $r$ sloupci; v průseku $i$-tého řádku s $k$-tým sloupcem stojí $S_i^{-1}\, S_k$, což dává určitou permutaci $S_j$. Tato permutace převádí karty z $i$-té sestavy (t. j. té, která vznikne z určité základní sestavy permutací $S_i$) do $k$-té sestavy (která vznikne ze základní sestavy permutací $S_k$); budiž $p_{ik}$ pravděpodobnost permutace $S_j$. V každém řádku a v každém sloupci jsou tytéž permutace $S_j$, jenže pokaždé v jiném pořadí. Proto ve schematu veličin $p_{ik}$ najdeme v každém řádku a v každém sloupci tytéž veličiny $p_j$, jichž součet je podle (6) roven jedné. Schema veličin $p_{ik}$ vyhovuje tudíž všem podmínkám (2). Pravděpodobnost $p_{ik}^{(n)}$, že, když míchání bylo $n$-kráte provedeno, $i$-tá sestava karet byla převedena v $k$-tou, vyhovuje vztahu

$$p_{ik}^{(n)} = \sum_s p_{is}^{(n-1)}\, p_{sk};$$

podle odst. 3a) platí tedy rovnice (3), což je právě výsledek Poincaréův.

Ale rovnice (3) má význam obecnější. Neboť $p_{ik}$ (pravděpodobnost, že hráč přemístí karty z $i$-té sestavy do $k$-té) může

---

[8]) $S_i^{-1}$ značí permutaci inversní k $S_i$.

záviseti nejen na příslušné permutaci $S_j$, nýbrž také na tom sestavení karet ($i$-tém), jež má býti permutováno. Pak máme obecně $r^2 = [(q!)]^2$ různých veličin $p_{ik}$ (a nikoliv jen $r$, jako v případě Poincaréově). Platnost vzorce (3) jest v tomto obecném případě podmíněna toliko podmínkami (2).

5. *Užití druhé metody v případě spojitě proměnných veličin.* — a) Budiž $M$ bod, jenž se pohybuje na dané úsečce, takže jeho abscissa $x$ jest obsažena stále v mezích $a \leq x \leq b$. Poloha bodu $M$ se mění tím, že naň aplikujeme postupně transformace, jichž výsledek je náhodný. Budiž $P(x, y)\, dy$ pravděpodobnost, že bod, jenž měl před takovou transformací úsečku $x$, přejde transformací do polohy obsažené v intervalu $(y, y + dy)$. Pravděpodobnost, že po dvou takových transformacích bude $M$ v intervalu $(y, y + dy)$, jest

$$P^{(2)}(x, y)\, dy = \left[\int P(x, z)\, P(z, y)\, dz\right] dy\,;$$

integrační meze jsou všude $a$ a $b$. Pravděpodobnost $P^{(n)}(x, y)\, dy$, že bod $M$, který měl počáteční polohu $x$, bude po $n$ transformacích ležeti v intervalu $(y, y + dy)$, jest určena formulí uvedenou v odst. 3b); jsou-li splněny všechny podmínky (4), platí vzorec (5), t. j. pravděpodobnost, že po nekonečně velikém počtu transformací bod $M$ bude ležeti v intervalu $(y, y + dy)$ jest

$$(b - a)^{-1} . dy,$$

nezávisí tedy ani na počáteční ani na konečné poloze.

Kdybychom ve všech vzorcích nahradili jednoduché integrály vhodnými integrály mnohonásobnými, dospěli bychom k podobným výsledkům pro pohyb bodu v prostoru o libovolném počtu rozměrů.

Druhá podmínka (4) je vždy splněna při úlohách tohoto druhu; neboť integrál na levé straně vyjadřuje, podle pravidla o úhrnné pravděpodobnosti, jistotu, že bod, jenž před transformací měl polohu $x$, musí míti po transformaci nějakou polohu uvnitř intervalu $(a, b)$.

Třetí podmínka (4) není tak samozřejmá; dá se odůvodniti v případech, kdy transformace, které se postupně aplikují na bod $M$, odpovídají permutacím v problému karet, jak vyplývá z následující úvahy.

b) Budiž v hořejší úvaze o míchání karet $a_{ik}$ pravděpodobnost, že karta, která před zamícháním má $i$-té místo, přejde po zamíchání na místo $k$-té $(i, k = 1, 2, \ldots, q)$. Veličiny $a_{ik}$ vyhovují třem podmínkám, jež jsou zcela obdobny podmínkám (2). Neboť je celkem $(q - 1)!$ permutací, které převádějí nějakou kartu z $i$-tého místa na $k$-té; $a_{ik}$ bude rovno součtu $(q - 1)!$ veličin $p_j$ (definovaných v odst. 4) a tedy bude $a_{ik} > 0$. Jistota, že karta z $i$-tého místa jistě se na nějaké místo dostane, vyjadřuje se rovnicí obdobnou druhé rovnici (2):

$$\sum_{k=1}^{q} a_{ik} = 1.$$

Třetí rovnice (2)

$$\sum_{k=1}^{q} a_{ki} = 1$$

je také správná, poněvadž každý sčítanec $a_{ik}$ se skládá z $(q - 1)!$ členů $p_j$ a podle významu veličin $a_{ik}$ není možno, aby se některá z veličin $p_j$ vyskytla na levé straně rovnice dvakráte. Každá je tam jen jednou a proto vzhledem k (6) rovná se součet jedné.

Právě uvedený důkaz opírá se o transitivitu grupy permutací: přechod z $i$-tého místa na $k$-té je vždy nějakou permutací možný. Zobecnění úlohy o míchání karet obdržíme předpokládajíce, že transformace zavedené v odst. 5a) jsou oboustranně jednoznačné a náležejí určité spojité transitivní grupě $G$.

Budiž $A$ bod dané variety $V$, $B$ pak jiný její bod, jenž odpovídá bodu $A$ určitou transformací grupy $G$. Grupa nechť má konečný počet parametrů; každá transformace bude pak znázorněna určitým bodem $A'$ v „prostoru parametrů" $V'$. Pravděpodobnost, že bod $A'$ definující transformaci, leží v nekonečně malém elementu $dV'$ prostoru $V'$ v poloze $A'$, bude dána výrazem

$$F(A')\,d\,V'. \tag{7}$$

Integrál tohoto výrazu vztažený k celé varietě $V'$ rovná se jedné. Vztáhněme nyní integrál výrazu (7) jen k tomu dílu variety $V'$, který odpovídá transformacím převádějícím bod $A$ v některý bod nekonečně malého elementu $dV$ variety v poloze $B$; integrál dělený objemem elementu $dV$ označíme písmenem $I$. Veličina $I$ závisí na poloze bodů $A$ a $B$ a má význam zcela obdobný významu funkce $P(x, y)$ zavedené na počátku tohoto odstavce (nebo veličinám $a_{ik}$ v problému o míchání karet). Integrujme pak $I$ vzhledem k $A$ (nebo — v případě, že varieta $V$ se redukuje na úsečku jako v odst. 5a) — vzhledem k $x$) přes celou varietu $V$; výsledek integrace bude se rovnati integrálu výrazu (7) vztaženému ke všem těm transformacím $A'$, které vedou od nějakého bodu $A$ k danému bodu $B$. Z předpokladu o transitivitě grupy $G$ plyne, že tento integrál musí se vztahovati k celé varietě $V'$ (každá transformace grupy $G$ převádí nějaký bod v bod $B$), pročež musí se rovnati jedné.[9]) Podmínka obdobná třetí rovnici (4) bude tedy v úlohách tohoto druhu splněna.

c) Zajímavý problém sem patřící týká se grupy rotací, kterými se nemění kulová plocha. Poloha rotační osy (procházející středem koule) a úhel otočení dají se vyjádřiti jakožto funkce tří parametrů $u$, $v$, $w$; varieta $V'$ má tři rozměry. Varieta $V$ bodů na povrchu koule má dva rozměry. Pravděpodobnost, že bod znázorňující rotaci leží v nekonečně malé části prostoru $V'$ bude podle (7) dána výrazem $F(u, v, w)\,du\,dv\,dw$. Věta dokázaná v odst. 5a) bude pak, přenesena na náš problém, zníti následovně: Nechť jest rozdělení pravdě-

[9]) Metodu zde načrtnutou bude třeba podrobněji vypracovati.

podobností mezi různé rotace (rozdělení jest určeno právě funkcí $F$) jakékoli, po nekonečně velikém počtu rotací postupně provedených může se koule vyskytnouti v jakékoli poloze se stejnou pravděpodobností. Podrobněji formulováno: Pravděpodobnost, že nějaký bod kulové plochy bude převeden, po nekonečně velikém počtu náhodně volených rotací, z počáteční polohy $A$ do jiné, která jest obsažena uvnitř sférického obrazce o ploše $P$, rovná se poměru plošného obsahu $P$ k povrchu celé koule a nezávisí ani na bodě $A$ ani na tvaru a poloze obrazce.

*6. Závěr.* — Obě metody (odst. 1, 2 a 5) jsou si v určitém smyslu podobny. Jak v prvním tak ve druhém případě postupujeme takto: hledaná pravděpodobnost uvádí se v souvislost s neznámou pravděpodobností; tato vyjadřuje se neznámou funkcí, takže hledaná pravděpodobnost závisí na této funkci a na parametru $n$. Užijeme-li první metody k řešení nějakého skutečného problému, je $n$ vždy veliké číslo; to vyplývá za základní vlastnosti t. zv. náhodných zjevů: malá změna v počátečních podmínkách má za následek poměrně velikou změnu ve výsledku. Ukazuje se, že pro veliké hodnoty $n$ hledaná pravděpodobnost je téměř nezávislá na neznámé funkci. Užívajíce druhé metody zavádíme $n$ jakožto počet postupně provedených transformací; hledaná pravděpodobnost, jež pro malé hodnoty $n$ závisí na pravděpodobnosti vyjádřené neznámou funkcí, stává se na funkci té nezávislou, když $n$ roste do nekonečna. Tato okolnost odpovídá druhé základní vlastnosti náhodných zjevů: náhodné zjevy vznikají, když působí velmi mnoho malých příčin, jichž účinky se rozmanitým způsobem kombinují. Příkladem jest úloha o míchání karet; zobecněním Poincaréova řešení docházíme právě ke druhé obecné metodě. Není pochybnosti, že tato metoda umožní obecnější formulaci a dokonalejší řešení úloh o molekulárních pohybech (kinetická teorie plynů, Brownův pohyb, diffuse, míchání kapalin a j.).

Poznamenejme konečně, že zavedením těchto metod do počtu pravděpodobnosti stává se stará definice založená na pojmu případů „stejně možných“ nebo „stejně pravděpodobných“ bezpředmětnou. Definice ta je, jak Poincaré ukázal, logicky vadná; pravděpodobnost vůbec se nedá definovati. Ale stačí přijmouti za správná obě hlavní pravidla počtu pravděpodobnosti, totiž o sečítání pravděpodobností (p. úhrnná) a o jich násobení (p. složená); metody, o nichž jsem právě pojednal, umožňují pak výpočet pravděpodobností za předpokladů velmi obecných.

## Sur les formules fondamentales du calcul des probabilités.

(Extrait de l'article précédent.)

La méthode employée par Poincaré pour résoudre le problème de la roulette est générale à ce point qu'elle s'applique à tout problème où il s'agit d'un mouvement qui dépend du hasard. La possibilité d'introduire un paramètre $n$ (analogue du nombre de secteurs de la roulette) tient à ce que, pour un tel mouvement, un petit changement des conditions initiales entraîne un changement notable du résultat final. La méthode dont Poincaré a fait usage dans l'étude du problème sur le battage des cartes, peut être étendue, grâce à la simplification apportée par M. Hadamard, aux problèmes qui se rattachent aux variables continues.