Vilém Havlík

Poznámka o použití principu Kingovy metody mechanického vyrovnání

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 3-4, 242--245

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121375

Poznámka o použití principu Kingovy metody mechanického vyrovnání.

Dr. *Vilém Havlík.*

Při kombinování statistických řad, zvláště biometrických, narážíme někdy na nesnáz spočívající v tom, že řady, které máme kombinovati, jsou sestaveny v intervalech argumentů téže délky, ale různých hranic. Při řadách biometrických jde tu zvláště o tabulky vyjadřující na př. rozdělení individuí v pětiletých věkových skupinách. Tyto skupiny počínají podle povahy materiálu zpravidla buď ročníky věku, jejichž čísla končí 0 a 5 (tedy na př. 15 až 19 — 20 až 24 atd.), anebo ročníky, jejichž čísla končí 1 a 6 (16 až 20 atd.), anebo i jinak (nejčastěji 18 až 22, 23 až 27 atd.).

Není-li po ruce původní materiál, členěný podle jednotlivých ročníků, bylo by nutno vzájemně přizpůsobiti tabulky vyrovnáním a interpolací v jedné z nich. Bezprostředním výpočtům tohoto druhu můžeme se vyhnouti postupem užívajícím obratu, pomocí něhož došel King ke své známé metodě mechanického vyrovnání.

Obecně jde tu o tuto úlohu:

Dána jest řada hodnot

$$_k w_x = \sum_{i=0}^{k-1} \mu_{x+i}$$

a jest vypočísti řadu hodnot

$$_k w_{x+m} = \sum_{i=0}^{k-1} \mu_{x+m+i}.$$

Kingův obrat spočívá v tom, že nutné procesy interpolační provádíme na odvozené funkci:

$$W_x = -\sum_{i=0}^{\omega} \mu_{x+i},$$

pro niž platí, že

$$_k \Delta W_x = W_{x+k} - W_x = {_k w_x}.$$

Vyjádříme si nyní

$$_k w_{x+m} = {_k \Delta W_{x+m}}$$

Tabulka A.

i	Věková skupina	W_{5i}	Věková skupina	W_{5i+1} podle		Věková skupina	W_{5i+3} podle	
				pozorování	výpočtu		pozorování	výpočtu
1	5—9	627.839						
2	10—14	732.232	11—15	723.073	737.804	13—17	716.102	728.402
3	15—19	709.070	16—20	710.069	698.954	18—22	683.012	672.455
4	20—24	640.211	21—25	619.254	622.424	23—27	577.863	578.125
5	25—29	537.895	26—30	518.090	522.251	28—32	495.654	496.463
6	30—34	475.736	31—35	471.282	466.844	33—37	455.344	454.316
7	35—39	443.072	36—40	432.883	436.858	38—42	425.362	425.065
8	40—44	413.065	41—45	411.166	406.789	43—47	397.564	394.804
9	45—49	380.773	46—50	370.777	372.466	48—52	348.191	353.113
10	50—54	333.076	51—55	323.876	323.357	53—57	306.412	302.773
11	55—59	283.879	56—60	275.321	275.669	58—62	261.050	263.714
12	60—64	248.261	61—65	232.863	237.451	63—67	206.927	209.653
13	65—69	181.925	66—70	176.925	169.646	68—72	151.769	146.435
14	70—74	123.821	71—75	110.242	112.513	73—77	86.925	89.343
15	75—79	68.322	76—80	59.400	59.159	78—82	42.251	42.646
16	80—84	28.967	81—85	22.132	23.268			
17	85—89	7.716						

takto:

$$ {}_k w_{x+m} = {}_k w_x + (W_{x+m+k} - W_{x+k}) - (W_{x+m} - W_x) $$

a použijeme pro čísla W interpolace vyjadřující tuto hodnotu polynomem v ξ tvaru

$$ y_{n+\xi} = y_n + P(\xi, y_n, y_{n+1}, \ldots). $$

Dosazením do předešlé rovnice obdržíme pak:

$$ {}_k w_{x+m} = {}_k w_x + {}_k\Delta_n P(\xi, W_x, W_{x+k}, \ldots). $$

V praxi jde zpravidla o případy, kdy jest $k = 5$ a $m = \pm 1$, anebo $m = 3$.

Pro praktickou potřebu stačí užíti pro případ, že $m = \pm 1$, pouze kvadratické interpolace:

$$ y_{n+\xi} = y_n + \xi \Delta y_n + \frac{\xi}{2}(\xi - 1)\Delta^2 y_{n-1}, $$

takže po úpravě obdržíme pro:

$$ w_{5i+1} = w_{5i} + \mu_{5i+5} - \mu_{5i} = w_{5i} + W_{5i+6} - W_{5i+5} - (W_{5i+1} - W_{5i}), $$
$$ w_{5i-1} = w_{5i} - \mu_{5i+4} + \mu_{5i-1} = w_{5i} - W_{5i+5} + W_{5i+4} + W_{5i} - W_{5i+1}, $$

vzorce:

$$ w_{5i+1} = w_{5i} + 0{\cdot}2\, {}_5\Delta w_{5i} - 0{\cdot}08\, {}_5\Delta^2 w_{5i-5}, \qquad (1) $$
$$ w_{5i-1} = w_{5i} - 0{\cdot}2\, {}_5\Delta w_{5i} - 0{\cdot}12\, {}_5\Delta^2 w_{5i-5}. \qquad (2) $$

Je-li $i = 3$, použijeme interpolace kubické:

$$ y_{n+\xi} = y + \xi \Delta y_n + \frac{\xi}{2}(\xi - 1)\Delta^2 y_n + \frac{\xi}{6}(\xi - 1)(\xi - 2)\Delta^3 y_{n-1}. $$

Pro

$$ w_{5i+3} = w_{5i} + \mu_{5i+5} + \mu_{5i+6} + \mu_{5i+7} - \mu_{5i} - \mu_{5i+1} - \mu_{5i+2} = $$
$$ = w_{5i} + W_{5i+8} - W_{5i+5} - (W_{5i+3} - W_{5i}) $$

obdržíme pak:

$$ w_{5i+3} = w_{5i} + 0{\cdot}6\, {}_5\Delta w_{5i} - 0{\cdot}12\, {}_5\Delta^2 w_{5i} + 0{\cdot}056\, {}_5\Delta^3 w_{5i-5}. \qquad (3) $$

V tabulce A jsou porovnány výsledky těchto výpočtů na příkladě ze sčítání lidu z roku 1921 (rozdělení obyvatelů Čech podle stáří) s výsledky detailního sčítání.

Dodatkem sluší poznamenati, že analogického postupu by bylo možno použíti i při kombinaci řad s nestejnými intervaly argumentů.

Remarque sur une application de la méthode de G. King dans la statistique mathématique.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur déduit quelques formules pour calculer les valeurs numériques:

$$ {}_k w_{x+m} = \sum_{i=0}^{k-1} \mu_{x+m+i} $$

au moyen des valeurs données:

$$ {}_k w_x = \sum_{i=0}^{k-1} \mu_{x+i}. $$

Pour établir la formule générale, il applique le procédé d'interpolation d'une manière, analogue à celle, par laquelle G. King a établie sa formule pour l'ajustement mécanique. Les équations (1), (2), (3) donnent les formules spéciales pour le cas où $k = 5$ et $m = \pm 1$, ou $+ 3$.