Bohuslav Hostinský

O uzavřených konvexních křivkách. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 49 (1920), No. 2-3, 91--97

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121367

Podobně vychází z (33)

$$\log \frac{\Gamma(u+1-x)}{\Gamma(u+x)} = (1-2x)\log u + \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin 2mx\pi}{m} A(2mu\pi),$$

$$A(2mu\pi) = \int_0^\infty e^{-2mu\pi x} \frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

Nahradí-li se v (33^a) a (33^b) funkce $\log \Gamma(u+x)$ poloukonvergentní řadou, již uvažovali Sonin a Hermite, vyjdou hořejší poloukonvergentní řady pro funkce $A(\omega)$ a $B(\omega)$; v nich $\omega = 2mu\pi$, tedy ve zvl. případě $m=1$, $\omega = 2u\pi$, takže již $u=4$ vyžaduje $\omega > 24$. To vysvětluje, že v řadách těch bylo dlužno se omeziti na ω značně veliká. (Pokračování.)

O uzavřených konvexních křivkách.

Napsal **Bohuslav Hostinský**.

(Dokončení.)

9. Plošný obsah uzavřené konvexní křivky definované rovnicí $p = f(\alpha)$ ustanovíme jakožto limitu součtu; sečítati jest nekonečně malé trojúhelníky, jež mají za základnu element oblouku ds, za výšku p a vrchol v počátku O (jenž jest uvnitř křivky). Vychází

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p\,ds = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(f+f'')\,d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(f^2 - f'^2)\,d\alpha$$

poněvadž částečná integrace dává

$$\int_0^{2\pi} ff''\,d\alpha = [f.f']_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'^2 d\alpha = -\int_0^{2\pi} f'^2 d\alpha.$$

Vyjádříme-li pak funkci $f(\alpha)$ trigonometrickou řadou jako v odstavci 3., obdržíme

$$P = \pi a_0^2 - \frac{\pi}{2}\sum_{2}^{\infty}(n^2-1)(a_n^2+b_n^2).$$

Nekonečná řada má kladný součet, obvod L křivky rovná se $2\pi a_0$, tedy

$$P < \frac{L^2}{4\pi}.$$

Tato nerovnost platí pro každou uzavřenou konvexní křivku; jediná výjimka nastává v případě, že součet nekonečné řady rovná se nulle, t. j. v případě, že

$$a_n = 0, \quad b_n = 0, \quad \text{pro } n = 2, 3, 4 \ldots$$

V tomto případě redukuje se křivka na kružnici (viz odst. 5.) a platí $4\pi P = L^2$. Srovnáme-li s hořejší nerovností, vidíme: Ze všech uzavřených konvexních křivek s daným obvodem L má kružnice největší plošný obsah.[6])

10. Položme si nyní otázku: Jakým podmínkám musí vyhověti funkce $R(\alpha)$, aby mohla býti považována za poloměr křivosti křivky, která se uzavře, proběhne-li tečnový úhel α intervall $0 \,.\,.\, 2\pi$?

Funkce $R(\alpha)$ musí býti periodická s periodou 2π. To však nestačí. Z differenciální rovnice pro funkci $f(\alpha) = p$:

$$f''(\alpha) + f(\alpha) = R(\alpha)$$

vypočteme známou methodou

$$f(\alpha) = \sin\alpha \,.\int_0^\alpha R(\alpha) \,.\, \cos(\alpha)\, d\alpha - \cos\alpha \,.\int_0^\alpha R(\alpha) \,.\, \sin\alpha\, d\alpha.$$

Vynecháváme dvojčlen $A\cos\alpha + B\sin\alpha$, který lze k tomuto výrazu přičísti (A a B jsou integrační konstanty), poněvadž nemá vlivu na tvar křivky (viz odst. 3.). Souřadnice bodu křivky jsou

$$x = \quad f\sin\alpha + f'\cos\alpha = \int_0^\alpha R \,.\cos\alpha\, d\alpha$$

$$y = -f\cos\alpha + f'\sin\alpha = \int_0^\alpha R \,.\sin\alpha\, d\alpha.$$

---

[6]) K důkazu této věty lze užíti Fourierových koefficientů a_k a b_k i v případech, kdy příslušné Fourierovy řady jsou divergentní. Viz Hurwitzovo pojednání výše citované a zajímavý článek: *W. Blaschke*: Beweise zu Sätzen von Brunn und Minkowski über die Minimaleigenschaft des Kreises (Jahresbericht d. deutschen Math.-Vereinigung Bd. 23, 1914), jakož i Blaschkeovu knihu uvedenou v poznámce k odst. 8.

Poněvadž $f(0) = f'(0) = 0$, prochází křivka počátkem souřadnic, což ostatně plyne přímo z napsaných vzorců pro x a y. Aby křivka byla uzavřená, musí býti též $x = y = 0$ pro $\alpha = 2\pi$, tedy

$$\int_0^{2\pi} R \,.\cos \alpha \, d\alpha = 0, \quad \int_0^{2\pi} R \,.\sin \alpha \, d\alpha = 0.$$

To znamená: ve Fourierově řadě, jež vyjadřuje R jakožto funkci úhlu α, musejí se koefficienty při $\cos \alpha$ a $\sin \alpha$ rovnati nulle. Každá Fourierova řada tvaru

$$R = a_0 + \sum_2^\infty (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha)$$

vyjadřuje tedy poloměr křivosti určité uzavřené křivky jakožto funkci tečnového úhlu α. Je-li mimoto $R \geqq 0$ pro všechna α, jest křivka konvexní.

Zaveďme do počtu délku oblouku s a pišme

$$R(\alpha) = \varrho(s).$$

Jaké podmínce musí vyhověti periodická funkce $\varrho(s)$, jež nenabývá záporných hodnot a jež má periodu L, aby ji bylo možno považovati za poloměr křivosti uzavřené konvexní křivky v obvodu L?

Mezi obloukem s a tečnovým úhlem α je vztah

$$d\alpha = \frac{ds}{R(\alpha)}, \quad \alpha = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\varrho(s)}.$$

Integrály funkcí $R \,.\cos \alpha$ a $R \,.\sin \alpha$ v mezích $0 \,.\,.\, 2\pi$ mají se rovnati nulle, tedy musí býti

$$\int_0^L \cos \left[\int_{s_0}^{t} \frac{ds}{\varrho(s)}\right] dt = 0, \quad \int_0^L \sin \left[\int_{s_0}^{t} \frac{ds}{\varrho(s)}\right] dt = 0.$$

To jsou hledané podmínky pro $\varrho(s)$; s_0 je libovolná konstanta.

Abychom vyšetřili průběh funkce $\varrho(s)$ v okolí bodu, kde je poloměr křivosti roven nulle nebo nekonečně veliký, zvolme (jako v odst. 4.) dotyčný bod na okamžik za počátek souřadnic a tečnu za osu Ox. Je-li v O $s = 0$, platí (srov. odst. 4.) se zřetelem k uvedenému vztahu mezi R, α a s:

$$y = ax^m + \ldots,\quad R = C\,.\,\alpha^{\frac{-m+2}{m-1}},\quad \alpha = C'\,.\,R^{\frac{m-1}{-m+2}}$$

$$s = \int_0^\alpha R d\alpha = C'' \int_0^R R^{\frac{m-1}{-m+2}} dR = C''' R^{\frac{1}{-m+2}};$$

zde C, C', C'', C''' značí konstanty, jež by bylo snadno vypočísti. Exponent m jest větší než 1. Jest tedy

$$\varrho(s) = \text{const.}\ s^{2-m} + \ldots$$

Je-li poloměr křivosti na konvexní křivce roven nulle, jest (odst. 4*c*) $m = \frac{3}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{3}, \ldots;\ 2 - m = \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \ldots;$
je-li poloměr křivosti nekonečně veliký, jest (odst. 4*a*) $m = 4.\ 6,\ 8, \ldots;\ 2 - m = -2, -4, -6 \ldots$

11. Budiž $p = f(\alpha)$ rovnice uzavřené konvexní křivky, jež má Ox za osu souměrnosti. Poněvadž na Ox jest křivkou proťata v pravém úhlu, jest v jednom průsečném bodě $\alpha = \pi/2$, ve druhém $\alpha = 3\pi/2$. V obou jest $y = 0$ a tedy, vzhledem k vzorci pro y odvozeném v odst. 2.,

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\quad f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

Počátek souřadnic volme mezi oběma průsečíky; pak jest stále $p > 0$.

Všecky body křivky nad osou Ox obdržíme nechajíce α probíhati intervall $\pi/2 \ldots 3\pi/2$; pro tyto body platí

$$p > 0,\quad y = -f\cos\alpha + f'\sin\alpha \geqq 0,\quad R = f + f'' \geqq 0,\quad \cos \leqq 0.$$

Délka normály jest patrně

$$R_1 = \left|\frac{y}{\cos\alpha}\right| = f - f'tg\,\alpha > 0.$$

Konvexní rotační plocha K vytvořená rotací křivky kolem Ox má hlavní poloměry křivosti (kladně čítané) R a R_1;*) element jejího plošného obsahu jest, značí-li φ úchylku meridiánu od meridiánu základního,

$$d\omega = y\,ds\,d\varphi = (f + f'')\,(-f\cos\alpha + f'\sin\alpha)\,.\,d\alpha\,d\varphi.$$

*) Viz n. př. mou Differenciální geometrii křivek a ploch (Praha, 1915.) str. 55.

12. Minkovski odvodil podivuhodné transformace integrálů, jimiž se vyjadřuje t. zv. integrál střední křivosti a plošný obsah libovolné uzavřené konvexní plochy. Pro rotační konvexní plochu K dají se tyto transformace jednoduše odvoditi:

a) Integrálem střední křivosti plochy K nazývá se dle Minkovského plošný integrál

$$M=\iint \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right) d\omega$$

vztažený k celé ploše K. Zavedeme-li proměnné α a φ, jest integrovati vzhledem k α od $\pi/2$ do $3\pi/2$, vzhledem k φ pak od 0 do 2π. Vychází

$$M=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}[f'\sin\alpha-(2f+f'')\cos\alpha]\,d\alpha\,.$$

Ježto

$$\int f''\cos\alpha\,d\alpha=f'\,.\,\cos\alpha+\int f'\,.\,\sin\alpha\,d\alpha$$

a

$$f'\left(\frac{3\pi}{2}\right).\cos\frac{3\pi}{2}-f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}=0,$$

můžeme psáti

$$M=2\pi\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\,.\cos\alpha\,.\,d\alpha\,.$$

Avšak

$$p\,.\frac{d\omega}{RR_1}=-f\,.\,\cos\alpha\,.\,d\alpha d\varphi\,;$$

integrujeme-li tento výraz dle α v mezích $\pi/2\,\ldots\,3\pi/2$ a dle φ v mezích $0\,..\,2\pi$, obdržíme právě M, tedy

$$M=\iint p\,\frac{d\omega}{RR_1}\,. \tag{1}$$

To jest jeden Minkovského vzorec;*) integrace vztahuje se k celé ploše K. Délka p měří vzdálenost počátku souřadnic od tečné roviny plochy K.

*) *H. Minkovski* Math. Annalen Bd. 57. p. 458 = Ges. Abh. II. p. 241.

b) Plošný obsah S celé plochy K

$$\iint d\omega$$

vypočteme opět tak, že zavedeme za integrační proměnné veličiny α (od $\pi/2$ do $3\pi/2$) a φ (od 0 do 2π). Obdržíme

$$S = 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (f + f'') \, (-f \cos\alpha + f' \sin\alpha) \, d\alpha \, .$$

Částečnou integrací v mezích $\pi/2 \ldots 3\pi/2$ odvodíme

$$\int f' f'' \sin\alpha \, d\alpha = -\int \frac{f'^2}{2} \cos d\alpha = \int \left(\frac{ff''}{2} \cos\alpha - \frac{ff'}{2} \sin\alpha \right) d\alpha$$

a po snadných redukcích

$$S = 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(-f^2 \cos\alpha + \frac{ff'}{2} \sin\alpha - \frac{ff''}{2} \cos\alpha \right) d\alpha \, .$$

Výraz na pravé straně obdržíme též integrujíce.

$$\frac{p}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) d\omega = \left(-f^2 \cos\alpha + \frac{ff'}{2} \sin\alpha - \frac{ff''}{2} \cos\alpha \right) d\alpha d\varphi$$

přes celou plochu K. Jest tedy

$$S = \iint \frac{p}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) d\omega \, , \tag{2}$$

což jest druhý vzorec Minkovského.

Sur les courbes convexes fermées.

Par B. Hostinský.

(Résumé de l'article précédent.)

Soit

$$x \sin\alpha - y \cos\alpha = f(\alpha)$$

l'équation de la droite tangente à une courbe fermée C, α étant l'angle que fait la normale avec l'axe Ox. $f(\alpha)$ désigne une fonction analytique périodique de α avec la période 2π. Développons $f(\alpha)$ en série de Fourier $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha)$. Le rayon de courbure R sera donné par la formule

$$R = f(\alpha) + f''(\alpha) = a_0 + \sum_{n=2}^{\infty}(1 - n^2)(a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha).$$

Supposons que R garde partout le même signe (sauf certains points où R peut être nul ou infini); dans ce la cas courbe est convexe et sa longueur totale est égale à $2\pi a_0$.

La série de Fourier donne immédiatement la démonstration du théorème suivant découvert par Kneser: la courbure d'une courbe convexe fermée a au moins deux maxima et deux minima. Car il résulte des propriétés connues des expressions trigonométriques que la série de Fourier qui exprime $\frac{dR}{d\alpha}$ s'annule au moins quatre fois dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

En employant la variable α on démontre aisément, pour les surfaces de révolution convexes fermées, les équations de Minkovski (1) et (2).

O zborcených plochách, které mají danou asymptotickou plochu.

Napsal Dr. **Jos. Klobouček.**

U přímkových ploch, daných křivkou Σ na rozvinutelné ploše S a jistým dalším útvarem řídícím, při čemž povrchové přímky zborcené plochy jsou tečnami plochy S v bodech křivky Σ, jest, jak známo, čára úvratu rozvinutelné plochy geometrickým místem pólů jednotlivých oskulačních rovin křivky Σ vzhledem k jednotlivým oskulačním hyperboloidům přímkové plochy.*)

Je-li křivka Σ rovinná, splývají všecky její oskulační roviny v jedinou a čára úvratu dané rozvinutelné plochy jest geometrickým místem pólů této roviny vzhledem ke všem oskulačním hyperboloidům řečené plochy.

---

*) J. Sobotka: Zur Konstruktion von Oskulationshyperboloide an windschiefen Flächen. Prag. Berichte 1903.