Karel Teige

Příspěvek k theorii ochlazování desky

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 49 (1920), No. 2-3, 152--155

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121352

se může na povrchu měniti směr normály. Nelze proto přímo eliminovati z rovnic (15) a (16) skutečná napětí X_x atd., abychom dostali pak pomocí rovnic (11) a (12) povrchovou podmínku mezi vnějšími povrchovými silami X_n, Y_n, Z_n a výchylkami povrchu u_n, v_n, w_n. Povrchové podmínky jsou v tomto případě vyjádřeny souborem rovnic (15) a (16) ve spojení s rovnicemi (11) a (12). Pouze v případě, že by povrchová normála zachovávala stále týž směr, lze z uvedené soustavy eliminovati skutečná napětí i katastatická napětí, čímž dostáváme tři povrchové podmínky vížící výchylky na povrchu s vnějšími povrchovými silami. V tomto případě lze také obdobným způsobem jako dříve dokázati jednoznačnost řešení. (Dokončení.)

Příspěvek k theorii ochlazování desky.

Napsal Ph. Dr. **Karel Teige**.

Jest najíti rozdělení teploty v desce tloušťky d, je-li veličina a v rovnici pro teplotu u

$$a^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (1.)$$

funkcí vzdálenosti od kraje desky $x = 0$, a jsou-li místa $x = 0$ a $x = d$ udržována na teplotě nullové a je-li dáno rozdělení teploty v čase $t = 0$

$$u_{t=0} = f(x)\,.$$

Řešme rovnici (1.) methodou separací proměnných. Položme tedy

$$u = X\,.\,T,$$

čímž dostaneme rovnice

$$\frac{d^2X_n}{dx^2} = \frac{c_n}{a^2(x)}\,X_n, \qquad \frac{dT_n}{dt} = c_n\,.\,T_n\,.$$

Integrály rovnice prvé možno psáti ve tvaru

$$X_n^{(1)} = 1 + \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} \frac{c_n}{a^2(x_2)}\,dx_2 + \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} \frac{c_n}{a^2(x_2)}\,dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \int_0^{x_3} \frac{c_n}{a^2(x_4)}\,dx_4 + \ldots,$$

$$X_n^{(2)} = x + \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} \frac{c_n x_2}{a^2(x_2)}\, dx_2 +$$

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} \frac{c_n x_2}{a^2(x_2)}\, dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \int_0^{x_3} \frac{c_n x_4}{a^2(x_4)}\, dx_4 + \ldots$$

Konvergenci těchto řad dokážeme takto:

Budiž a_{min} nejmenší hodnota a, která z důvodů fysikálních nemůže býti nikde rovna nulle, pak je

$$X_n^{(1)} < 1 + \frac{c_n}{a_{min}} \cdot \frac{x^2}{2!} + \left(\frac{c_n}{a_{min}}\right)^2 \cdot \frac{x^4}{4!} + \left(\frac{c_n}{a_{min}}\right)^3 \cdot \frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

odkud je konvergence bezprostředně patrna. Zcela stejně to lze dokázati o $X_n^{(2)}$.

Jelikož je dále $\qquad T_n = e^{c_n t}$

obdržíme $\qquad u = \Sigma\,(A_n^1 X_n^{(1)} + A_n^2 X_n^{(2)}) . e^{c_n t}.$

Nyní se obrátíme k podmínkám na rozhraní. Jelikož pro $x = 0$ má býti $u = 0$ musí A_n^1 vymizeti. Konstanty c_n se pak určí z rovnice

$$X_n^{(2)}(d) = 0.$$

Ty budou záporné a bude jich nekonečně mnoho, neboť budou ležeti mezi nullovými body funkcí $X_n^{(2)}(d, a_{ex})$, kde a_{ex} značí maximum resp. minimum funkce a v intervallu od 0 do d. Jelikož to jsou trigonometrické funkce, mají nekonečně mnoho nullových bodů.

Abychom určili konstanty A_n z podmínky počáteční, nutno ukázati, že funkce $X_n^{(2)}$ tvoří s funkcemi $\frac{1}{a^2(x)} X_n^{(2)}$ systém funkcí biorthogonálních.

Znásobíme-li v rovnicích

$$\frac{d^2 X_m^{(2)}}{dx^2} = \frac{c_n}{a^2(x)} \cdot X_n^{(2)}, \qquad \frac{d^2 X_m^{(2)}}{dx^2} = \frac{c_m}{a^2(x)} \cdot X_m^{(2)},$$

první rovnici $X_m^{(2)}$, druhou pak $X_n^{(2)}$, dostaneme odečtením jich od sebe

$$\frac{d}{dx}\left(X_m^{(2)} \frac{dX_n^{(2)}}{ax} - X_n^{(2)} \frac{dX_m^{(2)}}{dx}\right) = (c_n - c_m)\, \frac{X_m^{(2)} X_n^{(2)}}{a^2(X)},$$

odkud integrací od 0 do d plyne

$$(c_n - c_m)\int_0^d \frac{X_m^{(2)} X_n^{(2)}}{a^2(x)}\, dx = 0,$$

neboť $$X_m^{(2)}(d) = X_n^{(2)}(d) = 0,$$
což jsou naše podmínky na rozhraní. Tím je důkaz o biorthogonalitě podán.

Má-li býti v čase $t = 0$

$$f(x) = \sum_n A_n X_n^{(2)},$$

obdržíme násobením $\frac{1}{a^2(x)} \cdot X_n^{(2)}$ a integrací od 0 do d

$$A_n = \frac{\int_0^d f(x)\, \frac{X_n^{(2)}}{a^2(x)}\, dx}{\int_0^d \frac{X_n^{(2)\,2}}{a^2(x)}\, dx},$$

čímž celkové řešení pak bude

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^d f(x)\, \frac{X_n^{(2)}}{a^2(x)}\, dx}{\int_0^d \frac{X_n^{(2)\,2}}{a^2(x)}\, dx} \cdot X_n^{(2)} \cdot e^{c_n t}.$$

Contribution à la théorie du refroidissement d'une plaque.

Par K. Teige.

(Résumé de l'article précédent.)

Ce travail contient la solution du problème suivant: Trouver la distribution de la température u dans une plaque dont l'épaisseur est égale à d. La quantité a qui figure dans l'équation aux dérivées partielles

$$a^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

est une fonction de la distance x d'un point intérieur au bord $x = o$ de la plaque. Les bords $x = o$ et $x = d$ de la plaque sont maintenus à la temperature constante égale à zéro. On donne encore la distribution de la température à l'instant $t = o$.

En employant la méthode de séparation des variables nous construisons un système biorthogonal des fonctions qui sert à développer, en une série infinie, la distribution initiale de la température. Le calcul est d'ailleurs tout à fait semblable au calcul connu dans le cas où la quantité a ne dépent pas de x.

Věstník literární.

Recense knih.

Collection de monographies sur le théorie des fonctions.

E. Borel: ***Leçons sur la théorie des fonctions.*** Deuxième édition, Paris, Gauthier-Villars, 1914. 8°, 259 p. Cena 9 fr.

První vydání této knihy vyšlo r. 1898 jakožto první svazek Borelem redigované sbírky monografií o theorii funkcí, kterážto sbírka čítá dnes více než 20 svazků. Druhé vydání obsahuje jednak nezměněný otisk prvního vydání, jednak nové dodatky, takže má téměř dvakrát více stran než vydání původní,

Borel vykládá v této knize základy nauky o množinách, pak o analytickém pokračování funkcí a úvahy o definici analytických funkcí, zejména pokud se týče jich analytického vyjadřování. Nové dodatky jsou tři:

V prvním je sestavena řada polemik o t. zv. transfinitních číslech a o „větě Zermelově"; mimo články Borelovy, otištěné z různých časopisů, jsou zde uveřejněny dopisy Hadamardovy, Baireovy a Lebesgueovy. Čtenář může se četbou těchto článků dobře orientovati o řešených problémech, které jsou z větší části zajímavější pro filosofa než pro mathematika a má na mnohých místech příležitost obdivovati se Borelovi, jak dovede vyložiti nejen své myšlenky, nýbrž i úvahy jiných. V oněch polemikách jde hlavně o to, aby byla odkryta v myšlenkovém postupu chyba, jež uměle a raffinovaně zakryta, vede k paradoxnímu výsledku. Borel kritisuje hluboce a na str. 181 vyslovuje své stanovisko: názor (les intuitions), jenž vede k objevům, má podstátnou úlohu v mathematice; avšak právě proto snažil jsem se odděliti ty části nauky o množinách, které skutečně přispěly k pokroku nauky o funkcích, od logických čistě slovních konstrukcí, ve kterých si mathematikové zahrávají se symboly, jimž žádný názor neodpovídá.

Druhý dodatek jedná o „spočetných pravděpodobnostech" (probabilités dénombrables). Tak nazývá Borel úlohy počtu pravděpodobnosti, ve kterých počet všech možných případů tvoří spočetnou množinu a které zaujímají tedy v logickém systému počtu pravděpodob-