Matěj Pelnář

Kterak lze vyšetřiti obsah kruhu?

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 6 (1877), No. 2, 89--91

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121323

$$\begin{vmatrix} a_{k_1} & a_{k_2} \ldots & a_{k_l} \ldots & a_{k_m} \ldots & a_{k_n} \\ 1 & 2 \ldots & l \ldots & m \ldots & n \end{vmatrix}$$

přichází mezi jinými následující sloupce

$$\begin{vmatrix} \ldots\, a_{1k_l} \ldots\, a_{1k_m} \ldots \\ \ldots\, a_{2k_l} \ldots\, a_{2k_m} \ldots \\ \ldots\, a_{3k_l} \ldots\, a_{3k_m} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\, a_{nk_l} \ldots\, a_{nk_m} \ldots \end{vmatrix}.$$

Jelikož jsou tyto dva sloupce stejné, musí

$$\begin{vmatrix} a_{k_1} & a_{k_2} \ldots & a_{k_l} \ldots & a_{k_m} \ldots & a_{k_n} \\ 1 & 2 \ldots & l \ldots & m \ldots & n \end{vmatrix} = 0$$

a tudíž

$$\Delta_k^{(lm)} = 0,$$

pročež i

$$\Delta_k'' = 0$$

a tedy

$$\Delta'' = \Delta_k' = \Delta \,.\, \Delta',$$

což bylo nám dokázati.*)

Kterak lze vyšetřiti obsah kruhu?

Podává

M. Pelnář.

Vyšetřme nejprvé obsah čtvrti kruhu ABC. (Obr. si sestroj!) K tomu cíli rozdělme poloměr AC na n stejných dílů a veďme dělícími body rovnoběžky s poloměrem BC. Dále sestrojme vždy mezi dvěma rovnoběžkami po sobě jdoucími obdélník kruhu opsaný a do kruhu vepsaný.

*) Viz o témž předmětu: *Studnička* „O determinantech", Praha, 1870, pag. 35., kde tentýž rozbor s determinantem stupně třetího jest proveden, neb *Salmon-Fiedler*, Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen, Leipzig 1863, pag 15. *Günther* Lehrbuch der Determinantentheorie, Erlangen 1875 pag. 61.

Obsah čtvrti kruhu $^1/_4 K$ nachází se patrně v mezích součtů obdélníků opsaných a vepsaných.

Součet obdélníků opsaných

$$\Sigma(O_o) = \frac{r}{n} \sum_{k=1}^{k=n} (y_k),$$

a součet obdélníků vepsaných

$$\Sigma(O_v) = \frac{r}{n} \sum_{k=2}^{k=n} (y_k),$$

při čemž značí r poloměr kruhu a y_k k-tou rovnoběžku, béře-li se poloměr BC za první, takže $y_1 = r$.

Jest tedy

$$\frac{r}{n} \cdot \sum_{k=2}^{k=n} (y_k) < \frac{K}{4} < \frac{r}{n} \sum_{k=1}^{k=n} (y_k),$$

a rozdíl obou mezí rovná se

$$\frac{r}{n}\left[\sum_{k=1}^{k=n} (y_k) - \sum_{k=2}^{k=n} (y_k)\right] = \frac{r}{n} \cdot y_1 = \frac{r^2}{n}.$$

Vzrůstá-li n do nekonečna, mizí patrně rozdíl obou součtů a obsah čtvrti kruhu rovná se v tomto případě buď součtu obdélníků opsaných a vepsaných, čili

$$\frac{K}{4} = lim\left[\frac{r}{n} \sum_{k=1}^{k=n} (y_k)\right].$$

Avšak tu platí patrně

$$y_k = \sqrt{r^2 - \left[\frac{r}{n} \cdot (k-1)\right]^2}$$

$$= r\sqrt{1 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2},$$

a dosadíme-li tuto hodnotu do vzorce předešlého

$$\frac{K}{4} = lim\left[\frac{r}{n} \cdot \sum_{k=1}^{k=n} r\sqrt{1 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2}\right]$$

$$= r^2 \, lim \sum_{k=1}^{k=n} \left\{\frac{1}{n} \cdot \left[1 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\};$$

pomocí poučky binominální zjednáme si pak

$$\frac{K}{4} = r^2 \, lim \, . \sum_{k=1}^{k=n} \left\{\frac{1}{n}\left[1 - \binom{\frac{1}{2}}{1}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2 + \binom{\frac{1}{2}}{2}\left(\frac{k-1}{n}\right)^4 - \ldots\right]\right\}$$

$$= r^2 \, . \left\{1 - \binom{\frac{1}{2}}{1} lim \sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{(k-1)^2}{n^3}\right] + \binom{\frac{1}{2}}{2} lim \sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{(k-1)^4}{n^5}\right] - \ldots\right\}$$

A jelikož pak vůbec, jak známo,

$$\lim \sum_{k=1}^{k=n} \left[\frac{(k-1)^m}{n^{m+1}}\right] = \frac{1}{m+1},$$

obdržíme konečně

$$\frac{K}{4} = r^2 . \left[1 - \binom{\frac{1}{2}}{1} . \frac{1}{3} + \binom{\frac{1}{2}}{2} . \frac{1}{5} - \ldots\right]$$

a položíme-li za tuto nekonečnou řadu hodnotu příslušnou $\frac{\pi}{4}$, známý vzorec

$$K = r^2 . \pi .$$

Poznámka redakce. Kdybychom neznali této řady pro $\frac{\pi}{4}$, obdrželi bychom naopak ze známého vzorce, podle něhož se vypočítává ploský obsah kruhu, z předposlední rovnice

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2} . \frac{1}{3} - \frac{1 . 1}{2 . 4} \frac{1}{5} - \frac{1 . 1 . 3}{2 . 4 . 6} . \frac{1}{7} - \ldots ,$$

což se obyčejně vyšší analysí odvozuje.

Příspěvek k řadám arithmetickým.

Podává

Č. Jarolímek.

Je-li m stupeň arithmetické řady,

$$u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , \ldots \qquad (1)$$

a p stupeň arithmetické řady

$$a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , \ldots \qquad (2)$$

bude řada

$$u_{a_1} , u_{a_2} , u_{a_3} , u_{a_4} , \ldots \qquad (3)$$

arithmetickou řadou stupně $(m . p)$*-tého.* Řada (3) jest patrně sestavena z takových členů řady (1), jichž ukazatelé tvoří řadu (2).

Jakož známo, jest n-tý člen řady (1)

$$u_n = A_0 n^m + A_1 n^{m-1} + \ldots\ldots + A_{m-1} . n + A_m \qquad (4)$$