Antonín Pleskot

Jistá příbuznost křivek související s teorií křivek valících se

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 61 (1932), No. 4, 137--145

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121317

Jistá příbuznost křivek souvisící s teorií křivek valících se.

Napsal Dr. *Ant. Pleskot* v Plzni.

(Došlo 18. listopadu 1931.)

V úvaze této poukážeme k jisté příbuznosti dvou křivek K a K_1, o níž platí řada zajímavých vztahů geometrických. Křivka K budiž dána v soustavě polární o pólu P, rovnicí

$$r = \varphi(\omega);$$

k ní přidružme v téže rovině křivku K_1 v soustavě souřadnic pravoúhlých se středem O tím způsobem, že k libovolnému bodu $A(r, \varphi)$ křivky K přiřadíme bod $A_1(x, y)$ křivky K_1, podle rovnic příbuznosti

$$\begin{aligned} y &= r, \\ x &= \int r\, d\omega; \end{aligned} \tag{1}$$

konstantu integrační v rovnici druhé nepíšeme, poněvadž tvar křivky K_1 konstanta integrační nemění. Posunutím křivky K_1 ve směru osy X, což odpovídá změně integrační konstanty, posune se současně na ní ležící bod A_1 i bude bodu A křivky K opět odpovídati bod A_1 na posunuté křivce.

Soustavu (1) lze psáti též ve tvaru: $y = r$, $\dfrac{dx}{d\omega} = r$.

Jaký význam geometrický mají předchozí rovnice příbuznosti při valení se křivky K po křivce K_1, o tom zmíníme se na konci úvahy.

O křivkách K a K_1 platí tyto geometrické vztahy:

a) Délka oblouku mezi dvěma body A a B křivky K jest rovna oblouku mezi body A_1 a B_1 křivky K_1, jež odpovídají bodům A a B.

b) Úhel, jež tvoří tečna s průvodičem u křivky K v bodě A, jest roven úhlu, jež tvoří tečna křivky K_1 s ordinátou v bodě A_1.

c) Plocha, jež u křivky K jest omezena obloukem křivky AB

a průvodiči v bodech A a B, jest rovna polovici plochy, jež omezena jest obloukem A_1B_1 křivky K_1, osou X a ordinátami v bodech A_1 a B_1 ke K_1 příslušnými.

d) Délka subnormály, subtangenty, normály a tangenty v bodě A u křivky K jest rovna délce subnormály, subtangenty. normály a tangenty v příslušném bodě A_1 křivky K_1; jest samozřejmé, že délky pro křivku prvou jsou vzaty v soustavě polární, v druhé v soustavě pravoúhlé.

e) Konečně platí jednoduchý vztah mezi poloměry křivosti obou křivek. Je-li R poloměr křivosti v bodě A křivky K, R_1 v bodě A_1 křivky K_1, pak platí

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{N},$$

značí-li N délku normály v bodě A neb A_1; při tom podotýkáme, že poloměry křivosti nejsou v předchozí rovnici veličiny absolutní, nýbrž algebraicky vzaty.

Vztahy, jež jsme uvedli, lze dokázati nejjednoduššími vzorci diferenciální geometrie.

Délka oblouku křivky K mezi body $A\,(r_0, \omega_0)$ a $B\,(r, \omega)$ jest dána vzorcem

$$S = \int_{\omega_0}^{\omega} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\omega = \int_{\omega_0}^{\omega} \sqrt{\varphi^2(\omega) + \varphi'^2(\omega)}\, d\omega.$$

Délka oblouku křivky K_1 mezi body A_1 a B_1 odpovídajícími bodům A a B jest dána výrazem

$$S_1 = \int_{y_0}^{y} \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy = \int_{\omega_0}^{\omega} \sqrt{\varphi^2(\omega) + \varphi'^2(\omega)}\, d\omega,$$

tedy $S = S_1$.

Úhel α, jejž tvoří kladný směr tečny křivky K v bodě A s průvodičem a jejž počítáme ve smyslu rostoucího ω, jest dán rovnicí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r\, d\omega}{dr} = \frac{r}{r'} = \frac{\varphi(\omega)}{\varphi'(\omega)};$$

poněvadž $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{\varphi(\omega)}{\varphi'(\omega)}$, jest i úhel β, který svírá kladný směr tečny v bodě A_1 křivky K_1 s příslušnou ordinátou roven úhlu α. Jest tedy $\alpha = \beta$, při čemž připojujeme, že úhly α a β jsou navzájem smyslu opačného a že kladný směr tečny v bodě A_1 křivky K_1 jest ovšem definován opět ve smyslu rostoucího ω.

Poněvadž průvodič v bodě A křivky K jest roven ordinátě v bodě A_1 křivky K_1 a $\alpha = \beta$, jest následkem toho dokázána platnost věty d), že totiž subnormály, normály, subtangenty a tangenty u obou křivek v bodech A a A_1 jsou sobě rovny.

Plocha P křivky K, jež jest omezena obloukem AB křivky K a průvodiči r_0 a r v bodech A a B, jest dána rovnicí

$$P = \tfrac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega} r^2\, d\omega = \tfrac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega} \varphi^2(\omega)\, d\omega.$$

Plocha P_1 křivky K_1, jež jest omezena obloukem AB křivky K_1, ordinátami bodů A_1 a B_1 a osou X, jest dána výrazem

$$P_1 = \int_{x_0}^{x} y\, dx = \int_{\omega_0}^{\omega} r\varphi(\omega)\, d\omega = \int_{\omega_0}^{\omega} \varphi^2(\omega)\, d\omega,$$

t. j.

$$P_1 = 2P,$$

což plyne také již z toho, že $r = y$, $\alpha = \beta$ a $ds = ds_1$.

Zbývá dokázati vztah mezi poloměry křivosti v bodech u obou křivek sobě příslušných.

Označme R poloměr křivosti v bodě A křivky K a pro křivku K_1 budiž poloměr křivosti v bodě A_1, R_1.

Tu platí

$$R = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''},$$

čili

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2}} + \frac{r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

R těmito rovnicemi stanovené jest veličina nikoliv absolutní, nýbrž algebraicky vzatou. Vezmeme-li v rovnici předchozí výraz $\sqrt{r^2 + r'^2}$ kladně, pak je-li střed křivosti na kladné normále, jest R kladné, je-li na záporné normále, jest R záporné, při čemž směr kladný normály definujeme známým způsobem podle kladného směru tečny, jejž jsme nahoře definovali.

Pro křivku K_1 v bodě A_1 příslušný poloměr křivosti jest

$$R_1 = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x} = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{rr'' - r'^2},$$

z čehož

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Sečtením hodnot $1/R$ a $1/R_1$ obdržíme rovnici

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

Veličina $\sqrt{r^2 + r'^2}$ jest však kladně vzata absolutní délkou normály; označíme-li ji N, pak obdržíme rovnici

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{N}. \qquad (2)$$

Ukažme nyní na některých nejznámějších křivkách užití hořejší příbuznosti.

Jakožto křivku K volme Archimedovu spirálu, jejíž rovnice zní

$$r = a\omega.$$

Křivce této odpovídá křivka K_1, jejíž rovnice zní

$$x = a\int \omega \, d\omega = \frac{a\omega^2}{2},$$

$$y = a\omega.$$

Eliminací ω z těchto rovnic obdržíme

$$y^2 = 2ax,$$

t. j. parabolu, jejíž parametr jest a.

Vidíme, že vrcholu paraboly odpovídá pól spirály $r = 0$; oblouk spirály od pólu až k bodu, jehož průvodič jest r, jest roven oblouku paraboly od vrcholu až k bodu, jehož ordináta jest r (viz histor. pozn. Loria, Alg. C. str. 430). Poněvadž délka subnormály u paraboly jest konstantní a sice rovna délce a, jest i polární subnormála spirály konstantní a sice též rovna a.

Plocha spirály omezená obloukem a průvodičem r jest rovna polovici plochy parabolické, jež jest omezena osou paraboly, ordinátou bodu o délce r a obloukem parabolickým od vrcholu paraboly počítaným.

Normála paraboly v bodě A_1, jehož $y = r$, má délku $N = \sqrt{a^2 + y^2}$, t. j. $\sqrt{a^2 + r^2}$; jest tedy rovnice mezi poloměry křivosti R a R_1 spirály a paraboly v bodech k sobě příslušných

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}}.$$

Ve vzorci tomto poloměr R jest veličina kladná, kdežto R_1 záporná, jak snadno se určí; zavedeme-li tedy do vzorce předchozího absolutní hodnotu $|R_1|$, pak obdržíme

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{|R_1|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}}.$$

Probíhá-li bod A spirálu od pólu počínaje až do nekonečna, probíhá bod A_1 parabolu od vrcholu až do nekonečna a sice na větvi horní. Zobrazuje se tedy spirála $r = a\omega$ na horní větvi oblouku parabolického. Klademe-li v rovnici $r = a\omega$ za ω hodnoty záporné, obdržíme druhou větev spirály, která zobrazuje se pak na oblouku parabolickém, ležícím pod osou X.

Podobně ke spirále stupně vyššího

$$\varrho = a\omega^n,$$

v níž předpokládejme n kladné a k vůli jednoduchosti celistvé, odpovídá parabola stupně $(n + 1)$-ho o rovnici

$$y^{n+1} = a\,(n + 1)^n\, x^n,$$

čímž dospíváme k větě o rovnosti oblouků spirál a parabol vyššího stupně, ke kteréžto větě po prvé dospěl Fermat, ovšem cestou jinou. K velmi zajímavé příbuznosti dospějeme, volíme-li za křivku K logaritmickou spirálu, jejíž rovnice jest

$$r = ae^{n\omega}.$$

Této křivce odpovídá křivka K_1 daná rovnicemi

$$x = a\int e^{n\omega}\, d\omega = \frac{ae^{n\omega}}{n},$$

$$y = ae^{n\omega},$$

z nichž eliminací ω obdržíme

$$y = nx;$$

t. j. přímku jdoucí počátkem a uzavírající s osou X úhel β, jehož

$$\operatorname{tg}\beta = n.$$

K bodu B na spirále, jemuž patří polární úhel $\omega = 0$ a tedy průvodič o délce a, odpovídá na přímce bod B_1, jehož ordináta jest $y = a$. Roste-li ω od nuly až do hodnoty nekonečné, pak probíhá bod spirály dráhu od bodu B až do nekonečna; příslušný bod na přímce vzdaluje se při tom od bodu B_1 až do nekonečna. Probíhá-li bod na spirále dráhu od B až k pólu, takže úhel ω mění se od nuly až do $-\infty$, pak přiřaděný bod na přímce pohybuje se od bodu B_1 až ke konci (0, 0) přímky.

Poněvadž přímka, na níž zobrazuje se spirála, tvoří stálý úhel $\alpha = 90^0 - \beta$ s osou Y, uzavírá i každý průvodič u spirály logaritmické s tečnou konstantní úhel α, jehož $\operatorname{tg}\alpha = 1/n$, čímž dospíváme ke známé větě, že průvodiče spirály protínají spirálu v konstantním úhlu. Taktéž plyne z obrazení spirály na přímce, že délky oblouku spirály počítané od průsečíku spirály s osou polární jsou úměrny rozdílu $r - a$, při čemž konstanta úměrnosti z obrazu přímky snadno se určí, takže

$$S = \frac{r - a}{n} \sqrt{n^2 + 1}.$$

Hledíc ku přímce jsou normály, tangenty, subnormály a subtangenty jednotlivých bodů této přímky úměrny ordinátám těchto bodů, z čehož plyne, že i u logaritmické spirály jsou tyto délky úměrny průvodičům a konstanty úměrnosti mohou přímo z obrazu přímky býti určeny.

Ježto poloměr křivosti kteréhokoli bodu přímky jest nekonečně velký, tu obdržíme ze vztahu (2), kladouce v něm $R_1 = \infty$,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{N},$$

t. j. poloměr křivosti spirály jest roven délce polární normály, t. j. $r\sqrt{1 + n^2}$. Spirála logaritmická, ať v její rovnici a má hodnotu jakoukoli, zobrazuje se vždy na tutéž přímku; soudíme proto, že spirály $r = ae^{n\omega}$ jsou shodny, ať veličina a jest jakákoli. Na této křivce jest pěkně viděti, jak geometrické vlastnosti této křivky, jež obyčejně v diferenciální geometrii o této křivce se uvádějí, mohou podle hořejší příbuznosti z obrazu přímky býti vyčteny.

Vezměme v úvahu růžice, jejichž rovnice zní

$$r = a \sin n\omega,$$

při čemž nechť značí a a n čísla kladná; růžicím odpovídají elipsy neboť rovnice příslušné křivky K_1 zní

$$x = \int a \sin n\omega \, d\omega = -\frac{a \cos n\omega}{n},$$

$$y = a \sin n\omega,$$

z nichž plyne:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{n}\right)^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Růžice zobrazí se tedy na elipse, jejíž jedna osa jest a, a druhá v poměru n k a zmenšena.

Mění-li se $n\omega$ v mezích 0 a π, t. j. ω od 0 až do pak $\frac{\pi}{n}$, opíše bod A růžice jeden list a příslušný bod elipsy polovici oblouku elipsy, jež nad osou X leží; z toho plyne podle c), že plocha P jednoho listu růžice jest rovna čtvrtině plochy elipsy, t. j.

$$P = \frac{\pi a^2}{4n} \quad \text{(Loria, Spec. C. S. 300).}$$

Ježto oblouky elipsy a růžice mezi dvojicemi bodů k sobě příslušných se sobě rovnají a u elipsy jsou dány integrály eliptickými, plyne z toho, že i oblouky růžic vyjádřeny jsou integrály eliptickými. (Loria, S. 301.) Jakožto poslední příklad volme za křivku K kardioidu,

$$r = a\,(1 - \cos\omega).$$

Křivce té, jak snadno určíme, odpovídá křivka

$$x = a\,(\omega - \sin\omega),$$
$$y = a\,(1 - \cos\omega),$$

t. j. obecná cykloida.

Kdybychom rovnice příbuznosti dané rovnicemi (1) poněkud pozměnili, píšíce je ve tvaru

$$y = r,$$
$$x = -\int r d\omega, \qquad (1')$$

kdež konstantu integrační opět vypustíme, pak křivka podle rovnic (1′) ke křivce K patřící, označme ji K_2, shoduje se geometricky s křivkou K_1 patřící ke K podle rovnic příbuznosti (1), neboť K_2 jest souměrným obrazem K_1 hledíc k ose Y. Bod A_1 na překlopené křivce K_1 kol osy Y, označme jej nyní A_2, jest bodem k bodu A patřícím podle rovnic příbuznosti (1′).

Platí tedy o křivce K a K_2 všechny vztahy *a*), *b*), *c*), *d*), *e*), avšak ve vztahu *b*) jest úhel β nejen velikostí roven úhlu α, nýbrž jest s ním i smyslu souhlasného. Jest tedy možno pohybem křivky K v její rovině docíliti, aby bod A padl na bod A_2, pól P téže křivky na osu X a aby se při tom pokryly i tečny křivek v bodě $A \equiv A_2$, neboť podle poznámky předchozí úhly, jež tvoří jednak tečna s průvodičem u K a jednak tečna s ordinátou u K_2, jsou nyní sobě rovny podle velikosti i podle smyslu.

Z toho plyne, že valí-li se K po K_2, pól P křivky K opisuje při tom osu X.

Možno tedy vysloviti větu: Ke křivce K přidružená křivka K_1 podle základních rovnic (1) jest ta, která (byvši překlopena kol osy Y) má tu vlastnost, že valí-li se po ní křivka K, pól této opisuje osu X. Body, ve kterých K a K_1 při valení se dotýkají, jsou body, které sobě podle příbuznosti (1) odpovídají.

Že vztahy mezi křivkami K a K_1, jež jsme na začátku uvedli, jsou touto definicí přímo očividné, jest nyní patrno až na vztah *e*); odvodíme proto vztah (2) mezi R a R_1, když křivky K a K_1 definujeme větou právě vyslovenou.

Z teorie valících se křivek po křivkách pevných jest známá rovnice, podle které možno stanoviti poloměr křivosti v libovolném bodě křivky, již opisuje bod pevně spojený s valící se křivkou.

Je-li tímto bodem pól P křivky K, jež valí se po K_1, a je-li poloměr křivosti v libovolném bodě jeho dráhy ϱ se středem křivosti S a je-li M bod, v němž se právě křivky K a K_1 dotýkají, tu platí vztah

$$\frac{\varrho}{PM} = \frac{PS}{PM} = \frac{PM\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R}\right)}{PM\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R}\right) - \cos\varphi} = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} - \frac{\cos\varphi}{PM}},$$

při čemž φ znamená úhel, jejž tvoří spojnice PM s normálou pevné křivky v bodě M směřující ke středu křivosti pevné křivky K_1 pro tento bod. R_1 a R značí absolutní hodnoty poloměru křivosti křivek K_1 a K v bodě M. V poměru PS/PM na levé straně rovnice jsou délky PS, PM vzaty algebraicky, ježto body P, M, S leží v téže přímce, kdežto na pravé straně téže rovnice ve výraze $\cos\varphi/PM$ délka PM jest vzata absolutně; při tom podotýkáme, že napsaný vzorec, který lze snadno odvoditi, platí pro ten případ, když křivky K a K_1 leží při valení na různých stranách společné tečny v bodě M.

Poněvadž pól P opisuje při valení přímku, jest $\varrho = \infty$ a proto musí platiti

$$PM\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R}\right) - \cos\varphi = 0,$$

t. j.

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} = \frac{\cos\varphi}{PM};$$

však výraz $MP/\cos\varphi$ a jest roven délce normály ve společném bodě M křivky K a K_1, čímž dospíváme k rovnici

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} = \frac{1}{N},$$

což jest relace (2), dříve analyticky vyvozená.

Valí-li se křivka K po K_1, takže jsou obě na téže straně společné tečny, pak předchozí rovnice nabývá tvaru

$$\left|\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right| = \frac{1}{N},$$

značí-li ovšem R_1 a R prosté hodnoty poloměrů křivosti.

Tímto dodatkem zjednáme si poznatek: Jestliže poloměry křivosti R a R_1 v rovnici (2), již jsme si zjednali analytickým způsobem, mají znaménka stejná (kladná), pak opisuje pól P křivky K osu X, valí-li se K po K_1 tak, že obě křivky jsou po různých stranách společné tečny; jsou-li však poloměry znamének opačných, pak valí-li se K po K_1, opisuje pól P osu X, jestliže při valení jsou obě křivky na stejných stranách společné tečny.

*

Sur une correspondance de courbes se rattachant à la théorie des roulettes.

(Extrait de l'article précédent.)

Deux courbes K, K_1, dont la première est exprimée par une équation entre les coordonnées polaires r, ω, l'autre par une équation entre les coordonnées rectangulaires x, y, se correspondent d'après les relations

$$y = r, \quad x = \int r \,.\, d\omega$$

Cette correspondance donne lieu aux résultats suivants:

a) Les longueurs des arcs correspondants sont égales.

b) L'angle que fait la tangente avec le rayon vecteur au point A de la courbe K est égal à l'angle que fait la tangente au point A_1 de la courbe K_1 avec l'ordonnée respective.

c) L'aire limitée par l'arc AB de la courbe K et les rayons vecteurs des points A, B est égale à la moitié de l'aire comprise entre l'arc correspondant A_1B_1 de la courbe K_1, l'axe des x et les ordonnées des points A_1, B_1.

d) La tangente, la normale, la sous-tangente, la sous-normale polaires au point A de la courbe K, sont égales, respectivement, à la tangente, normale, sous-tangente, sous-normale au point A_1 de la courbe K_1.

e) Si R, R_1 sont les rayons de courbure aux points correspondants des deux courbes, N la normale en valeur absolue, on a

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{N}$$

où l'on prend R, R_1 avec le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que le centre de courbure se trouve sur le demirayon positif ou négatif de la normale.

Comme applications sont étudiées plusieurs courbes connues, en particulier la spirale logarithmique, laquelle, prise comme courbe K, est représentée par une droite.

La courbe K_1 peut être caractérisée par rapport à sa courbe correspondante K de la manière suivante: la courbe symétrique à K_1 par rapport à l'axe des y a la propriété que le pôle P de la courbe K, roulant sur K_1, décrit l'axe des x; les points de contact des courbes K, K_1 pendant ce roulement sont les points qui se correspondent d'après la correspondance considérée. Par-là, les propriétés *a*), . . . *d*) deviennent évidentes.