Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Simandl

O zvláštních v sobě duálních quadratických přímkových kongruencích. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 48 (1919), No. 3-4, 189--202

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121294`

O zvláštních v sobě duálních quadratických přímkových kongruencích.

Napsal Dr. **Václav Simandl**, docent české techniky v Brně.

(Dokončení.)

5. O 16 singulárních paprskových svazcích kongruencí C_1^2 a C_2^2.

O kongruencích (2, 2) jest známo, že obsahují 16 singulárních bodů a tolikéž singulárních rovin, t. j. takových bodů, resp. rovin, kterými prochází celý svazek paprsků kongruenčních, singulární to svazek. Odpovídá tak každému singulárnímu bodu vždy jedna singulární rovina; singulární bod ten a rovinu budeme nazývati *odpovídajícími si*. Těchto 16 bodů resp. rovin vyhledáme nejprve vždy při kongruenci C_1^2. Při kongruenci C_2^2 bude to zcela analogické. Označení přímek užijeme téhož jako při úvahách předchozích. Dále pak budeme v následujícím užívati pro průsečík dvou libovolných různoběžných přímek a, b symbolického označení $(a\, b)$ a pro rovinu stanovenou těmito dvěma přímkami symbolického označení $[a\, b]$.

Vytkněme si nejprve 4 singulární body kongruence C_1^2 a jim odpovídající singulární roviny. Ukážeme, že body tyto S_1, S_2, S_3, S_4 a jim postupně odpovídající roviny σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 lze si následovně symbolicky označiti:

$$(u_1\; u'_2),\ (u_1\; u_2''),\ (v_1\; v'_2),\ (v_1\; v_2'')$$
$$[u_1\; u'_2],\ [u_1\; u_2''],\ [v_1\; v'_2],\ [v_1\; v_2''].$$

To nyní dokážeme. K naší kongruenci C_2^1 náležejí dle její definice patrně též diagonály ∞^1 přímkových čtyřstranů na H^2, jejichž jednou dvojinou protějších stran jsou vždy dvě soumezné přímky na ploše H^2 v u_1 splývající, a druhou dvojinou vždy jedna dvojina přímek u_{21}', u_{21}'', které tvoří vždy jednu dvojinu involuce o samodružných přímkách u_2', u_2''. Jest zřejmo, že geometrické místo diagonál těchto ∞^1 čtyřstranů, jež bychom si mohli označiti u_1, u_1, u_{21}', u_{21}'', jsou dva rovinné paprskové svazky a sice svazky stanovené vždy dvěma přímkami u_1, u_2' a u_1, u_2''.

Ježto tyto svazky náležejí kongruenci C_1^2, tu vidíme, že jejich vrcholy resp. roviny jsou singulárními body resp. rovinami této kongruence, jak bylo dokázati. Zcela analogicky by se důkaz provedl o dalších dvou bodech a rovinách singulárních, to jest bodech a rovinách stanovených dvojinami paprsků v_1, v_2' a v_1, v_2''.

U kongruence C_2^2 dostali bychom zcela analogicky singulární body S_1', S_2', S_3', S_4' a jim odpovídající singulární roviny σ_1', σ_2', σ_3', σ_4' v následujícím symbolickém vyjádření:

$$(u_2\ u_1'),\ (u_2\ u_1''),\ (v_2\ v_1'),\ (v_2\ v_1'')$$
$$[u_2\ u_1'],\ [u_2\ u_1''],\ [v_2\ v_1'],\ [v_2\ v_1''].$$

Z konfokálnosti kongruencí C_1^2 a C_2^2 vyplývá však, že singulární body resp. roviny kongruence jedné jsou též singulárními body resp. rovinami kongruence druhé. Ovšem dvojinám singulárních bodů a jim odpovídajících singulárních rovin v kongruenci jedné, neodpovídají v druhé kongruenci dvojiny odpovídajících si singulárních bodů a rovin. Kombinují se pak jinak odpovídající si singulární body a roviny.

Jak hned z úvah následujících vyplyne, budou pak v kongruenci C_1^2 dalšími 4 sing. body S_5, S_6, S_7, S_8 a jim odpovídajícími rovinami σ_5, σ_6, σ_7, σ_8 po řadě body a roviny:

$$(u_2\ u_1'),\ (u_2\ u_1''),\ (v_2\ v_1'),\ (v_2\ v_1'')$$
$$[u_2\ u_1''],\ [u_2\ u_1'],\ [v_2\ v_1''],\ [v_2\ v_1'].$$

V kongruenci C_2^2 bude pak lze body S_5', S_6', S_7', S_8' a roviny σ_5', σ_6', σ_7', σ_8' následovně vyjádřiti:

$$(u_1\ u_2'),\ (u_1\ u_2''),\ (v_1\ v_2'),\ (v_1\ v_2''),$$
$$[u_1\ u_2''],\ [u_1\ u_2'],\ [v_1\ v_2''],\ [v_1\ v_2'].$$

Další singulární body resp. roviny kongruencí C_1^2 a C_2^2 sestrojíme tím, že si sestrojíme vždy vrcholy a stěny 4 tetraedrů příslušných vždy 4 tetraedrálním komplexům systémů $(\Gamma^2)_1$ a $(\Gamma^2)_2$. Lze sice dospěti, jak *R. Sturm* ukázal,*) od základního tetraedru jednoho tetraedrálního komplexu, který kongruencí

*) *R. Sturm*: Liniengeometrie, II., pag. 125 a 126.

(2, 2) prochází, ku všem 16 singulárním bodům resp. rovinám této kongruence, zde však bude speciálně pro naše kongruence C_1^2 a C_2^2 výhodno použíti vždy 4 zmíněných tetraedrů.

Uvažujme postupně vždy u našich 4 tetraedrů, jež příslušejí postupně vždy 4 tetraedrálním komplexům:

$$T^2(u_2', v_2'),\ T^2(u_2', v_2''),\ T^2(u_2'', v_2''),\ T^2(u_2'', v_2')$$
$$T^2(u_1', v_1'),\ T^2(u_1', v_1''),\ T^2(u_1'', v_1''),\ T^2(u_1'', v_1')$$

ty dvojiny jejich protějších hran, které jsou zároveň dvojinami konjugovaných polár hyperboloidu H^2. Dvojiny ty postupně pro naše čtyři tetraedry jsou dvojinami diagonál následujících čtyř přímkových čtyřstranů na H^2 proložených:

$$u_1, v_1, u_2', v_2';\ u_1, v_1, u_2', v_2'';\ u_1, v_1, u_2'', v_2'';\ u_1, v_1, u_1'', v_2';$$
$$u_2, v_2, u_1', v_1';\ u_2, v_2, u_1', v_1'';\ u_2, v_2, u_1'', v_1'';\ u_2, v_2, u_2'', v_1'.$$

Označme si pak postupně ty dvojiny diagonál následovně:

$$d_{11}, d_{11}';\ d_{12}, d_{12}';\ d_{13}, d_{13}';\ d_{14}, d_{14}';$$
$$d_{21}, d_{21}';\ d_{22}, d_{22}';\ d_{23}, d_{23}';\ d_{24}, d_{24}'.$$

Na každé z těchto diagonál leží vždy dva singulární body kongruencí C_1^2 a C_2^2, a duálně zase každou z těchto diagonál procházejí dvě singulární roviny těchto kongruencí.

Šestnáct právě napsaných diagonál lze uspořádati čtyřikrát vždy po čtyřech tak, že vždy čtyři jsou stranami určitého prostorového čtyřstranu. Vrcholy těchto 4 čtyřstranů, které si označíme *I*, *II*, *III*, *IV* jsou postupně vždy 4 následující body:

$$(u_1\ u_2'),\ (u_1\ u_2''),\ (v_1\ v_2'),\ (v_1\ v_2'')$$
$$(u_2\ u_1'),\ (u_2\ u_1''),\ (v_2\ v_1'),\ (v_2\ v_1'')$$
$$(u_1\ v_2'),\ (u_1\ v_2''),\ (v_1\ u_2'),\ (v_1\ u_2'')$$
$$(u_2\ v_1'),\ (u_2\ v_1''),\ (v_2\ u_1'),\ (v_2\ u_1'').$$

Diagonálami čtyřstranů *I* a *III* jsou přímky u_1 v_1, a diagonálami čtyřstranů *II* a *IV* jsou přímky u_2, v_2; stranami pak těchto čtyřstranů jsou postupně vždy 4 přímky:

$$d_{11},\ d_{12},\ d_{13},\ d_{14},$$
$$d_{21},\ d_{22},\ d_{23},\ d_{24},$$
$$d_{11}',\ d_{12}',\ d_{13}',\ d_{14}',$$
$$d_{21}',\ d_{22}',\ d_{23}',\ d_{24}'.$$

Protějšími stranami u těchto čtyřstranů jsou vždy ty dvě strany, u nichž u obou druhé indexy jsou současně liché nebo sudé. Jest patrno, že vrcholy prvých dvou čtyřstranů leží na H^2, a že jest to prvních 8 singulárních bodů S_1 až S_8 kongruence C_1^2, nebo singulárními body S_5' až S_8' a S_1' až S_4' kongruence C_2^2, které jsme již dříve byli nalezli.

Tyto singulární body mohli bychom si pomocí stran čtyřstranů I a II vyjádřiti postupně následovně:

$$(d_{11}\ d_{12}),\ (d_{13}\ d_{14}),\ (d_{11}\ d_{14}),\ (d_{12}\ d_{13}),$$
$$(d_{21}\ d_{22}),\ (d_{23}\ d_{24}),\ (d_{21}\ d_{24}),\ (d_{22}\ d_{23}).$$

Zbývajících 8 singulárních bodů S_9 až S_{16} leží vždy po dvou na každé z osmi stran posledních dvou čtyřstranů III a IV. Nutně z toho tedy vyplývá. že každá strana čtyřstranu jednoho protíná dvě strany čtyřstranu druhého a naopak. Dostaneme pak celkem 8 průsečných bodů, a to jest dalších osm singulárních bodů S_9 až S_{16} kongruence C_1^2, kteréžto body k vůli konfokálnosti kongruencí C_1^2 a C_2^2 lze pokládati též za singulární body S_9' až S_{16}' kongruence C_2^2.

Lze snadno nahlédnouti, že máme-li dva sborcené čtyřstrany v prostoru, jejichž dvojiny diagonál jsou různé, a mají-li ty dva čtyřstrany míti tu vlastnost, že každá strana jednoho protíná vždy dvě strany druhého tu, že ty dva čtyřstrany mají takovou polohu, že každá dvojina *protějších* stran jednoho protíná jednu dvojinu *protějších* stran druhého a naopak.

Ten případ nastává patrně u našich čtyřstranů III a IV. Buďtež u těchto čtyřstranů dvojinami protějších stran, které se navzájem protínají dvojiny:

$$d_{11}',\ d_{13}';\quad d_{21}',\ d_{23}'$$
$$d_{12}',\ d_{14}';\quad d_{22}',\ d'_{24}.$$

Vidíme z toho zároveň, že čtyřstrany III a IV leží na témže hyperboloidu, a že dvě přímkové řady tohoto hyperboloidu tvoří následující dvě přímkové čtveřiny:

$$d_{11}',\ d_{13}',\ d_{22}',\ d_{24}';\quad d_{12}',\ d_{14}',\ d_{21}',\ d_{23}'.$$

Lze pak 8 singulárních bodů S_9 a S_{16} resp. S_9' až S_{16}' označiti následovně:

$$(d_{11}' \, d_{21}'), \ (d_{11}' \, d_{23}'), \ (d_{13}' \, d_{21}'), \ (d_{13}' \, d_{23}')$$
$$(d_{12}' \, d_{22}'), \ (d_{12}' \, d_{24}'), \ (d_{14}' \, d_{22}'), \ (d_{14}' \, d_{24}').$$

Tytéž dvojiny protínajících se přímek, které nám stanoví tyto singulární body, stanoví nám též singulární roviny.

Chceme však znáti singulární roviny, které odpovídají po řadě uvedeným 8 singulárním bodům jednak v kongruenci C_1^2 jednak v kongruenci C_2^2. To provedeme pomocí základních tetraedrů vždy čtyř tetraedrálních komplexů systémů $(\Gamma^2)_1$ a $(\Gamma^2)_2$.

Tu jest patrno, že 8 singulárních rovin σ_9 až σ_{16} kongruence C_1^2 jest stanoveno po řadě vždy jedním z 8 nahoře napsaných singulárních bodů a vždy následující jednou přímkou:

$$d_{11}, \ d_{11}, \ d_{13}, \ d_{13},$$
$$d_{12}, \ d_{12}, \ d_{14}, \ d_{14},$$

a 8 singulárních rovin σ_9' až σ_{16}' kongruence C_2^2 jest stanoveno po řadě týmiž 8 singulárními body a vždy jednou přímkou:

$$d_{22}, \ d_{24}, \ d_{22}, \ d_{24}$$
$$d_{21}, \ d_{23}, \ d_{21}, \ d_{23}.$$

6. O fokální ploše kongruencí C_1^2 a C_2^2.

Ukážeme, že Kummerova plocha, která jest fokální plochou kongruencí C_1^2 a C_2^2, jest *Cayley*-ho tetraedroid, a sice, že za tento lze ji považovati na 44 různých způsobů. Pro následující úvahy naše budou míti zvláštní význam diagonály prostorových čtyřstranů:

$$d_{11}', \ d_{13}', \ d_{21}', \ d_{24}'; \qquad d_{12}', \ d_{14}', \ d_{22}', \ d_{24}'.$$

Uvažujme k tomu cíli dva prostorové čtyřstrany!

$$p_{11}, \ q_{11}, \ p_{21}, \ q_{21}; \qquad p_{12}, \ q_{12}, \ p_{22}, \ q_{22},$$

kteréžto čtyřstrany leží na H^2, a jejichž vždy dvě a dvě protější strany:

$$p_{11}, \ q_{11}; \qquad p_{21}, \ q_{21};$$
$$p_{12}, \ q_{12}; \qquad p_{22}, \ q_{22};$$

dostaneme jako samodružné dvojiny přímkových involucí na H^2, daných postupně vždy následujícími dvěma svými dvojinami:

$$\begin{array}{llll} u_1', & v_1'; & u_1'', & v_1''; \\ u_2', & v_2'; & u_2'', & v_2''; \\ u_1', & v_1''; & u_1'', & v_1'; \\ u_2', & v_2''; & u_2'', & v_2'. \end{array}$$

Společnou přímkovou dvojinou prvé a třetí z těchto involucí jest patrně dvojina u_1, v_1, druhé a čtvrté involuce pak dvojina u_2, v_2. To jest patrno z toho, že u_1', u_1''; v_1', v_1'' jsou dvojinami involuce $I(u_1, v_1)$ neboli I_1 a u_2', u_2''; v_2', v_2'' jsou dvojinami involuce $I(u_2, v_2)$ neboli I_2.

Ukážeme nyní, že dvojinám p_{11}, q_{11}; p_{12}, q_{12} involuce I_1 odpovídají v naší projektivnosti $\mathfrak{P}$ těchto involucí dvojiny p_{21}, q_{21}; p_{22}, q_{22}. Lze totiž nahlédnouti, že v involuci I_1 dvojina dvojin p_{11}, q_{12}; p_{12}, q_{12} má harmonický dvojpoměr i vzhledem ku dvojině samodružných dvojin u_1, v_1 i vzhledem ku dvojině dvojin u_1', u_1''; v_1', v_1'', a rovněž tak lze nahlédnouti, že v involuci I_2 dvojina dvojin p_{21}, q_{21}; p_{22}, q_{22} má harmonický dvojpoměr i ku dvojině dvojin u_2', u_2''; v_2', v_2'' i ku dvojině samodružných dvojin u_2, v_2 této involuce. Dvojpoměry ty uvažujeme vždy jako dvojpoměry čtyř přímek, které v případě prvém dostaneme, když třeba ku přímce u_1' sestrojíme si postupně harmonické přímky vzhledem k přímkovým dvojinám: u_1, u_1; v_1, v_1; u_1', u_1''; v_1', v_2'', a v případě druhém sestrojíme si třeba ku přímce u_2' harmonické přímky zase postupně vzhledem ku přímkovým dvojinám: u_2, u_2; v_2, v_2; u_2', u_2''; v_2', v_2''.

Jelikož pak v projektivnosti $\mathfrak{P}$ involucí I_1 a I_2 odpovídají postupně dvojinám: u_1, u_1; v_1, v_1; u_1', u_1''; v_1', v_1'' involuce I_1 dvojiny: u_2', u_2''; v_2', v_2''; u_2, u_2; v_2, v_2 involuce I_2, tu jest patrno, že odpovídají projektivně dvojinám p_{11}, q_{11}; p_{12}, q_{12} dvojiny p_{21}, q_{21}; p_{22}, q_{22}. Odpovídajícími si pak v projektivnosti $\mathfrak{P}$ buďtež vždy dvě dvojiny:

$$\begin{array}{llll} p_{11}, & q_{11}; & p_{21}, & q_{21}; \\ p_{12}, & q_{12}; & p_{22}, & q_{22}. \end{array}$$

Z úvah předešlých však snadno vychází, že diagonály čtyřstranu $p_{11}\ q_{11}\ p_{21}\ q_{21}$ jsou přímkami komplexů:

$$T^2(u_1', v_1'),\ T^2(u_1'', v_1''),\ T^2(u_2', v_2'),\ T^2(u_2'', v_2'').$$

Jelikož však přímky p_{11}, q_{11} oddělují harmonicky přímky u_1', v_1' a u_1'', v_1'', a přímky p_{21} q_{21} oddělují harmonicky přímky u_2', v_2' a u_2'', v_2'' tu, dle pomocné věty na počátku této práce dokázané, jest patrno, že diagonály čtyřstranu p_{11} q_{11} p_{21} q_{21} protínají vždy ty dvě protější hrany základních tetraedrů našich 4 tetraedrálních komplexů, které jsou současně konj. polárami plochy H^2. Dostáváme tak patrně na těchto hranách vrcholy našich tetraedrů, ježto protíná-li nějaká přímka tetraedrálního komplexu dvě protější hrany základního tetraedru tohoto komlexu, tu protíná je v jeho vrcholech. Označme si

$$t_{11}, \; t_{12}$$

jakožto dvojinu diagonál čtyřstranu p_{11}, q_{11}, p_{21}, q_{21}. Pak když uvažujeme dvojiny protějších hran našich čtyř právě uvažovaných tetraedrálních komplexů, které jsou současně dvojinami konjugovaných polár plochy H^2, totiž postupně 4 dvojiny:

$$d_{11}, d_{11}'; \quad d_{13}, d_{13}'; \quad d_{21}, d_{21}'; \quad d_{23}, d_{23}',$$

tu vidíme, že přímky d_{11}', d_{13}', d_{21}', d_{23}' jsou od přímek t_{11}, t_{21} proťaty vždy ve dvou singulárních bodech našich kongruencí, ježto tyto body lze považovati za vrcholy vždy některého ze základních tetraedrů uvažovaných 4 tetraedrálních komplexů. Ježto však 4 vrcholy čtyřstranu d_{11}', d_{13}', d_{21}', d_{23}' jsou 4 singulárními body našich kongruencí, a ježto na stranách tohoto čtyřstranu již žádný singulární bod ležeti nemůže, tu jest patrno, že přímky t_{11}, t_{21} jsou současně diagonálami čtyřstranu d_{11}', d_{13}', d_{21}', d_{23}. Současně pak přímky t_{11}, t_{21} protínají přímky d_{11}, d_{13}, d_{21}, d_{23}, což jest patrno z toho, že tyto přímky náležejí ku těm dvojinám, protějších hran uvažovaných 4 základních tetraedrů, které jsou současně dvojinami konjugovaných polár plochy H^2. Nebo lépe řečeno t_{11}, t_{21} jsou současně diagonálami čtyřstranu d_{11}, d_{13}, d_{21}, d_{23}. Že skutečně d_{11}, d_{13}, d_{21}, d_{23} tvoří sborcený čtyřstran jest patrno též z toho, že jejich vzhledem ku H^2 konjugované poláry t. j. přímky d_{11}', d_{13}', d_{21}', d_{23}' tvoří sborcený čtyřstran, jak jsme právě byli ukázali.

Zcela analogicky dokázali bychom pomocí tetraedrálních komplexů:

$$T^2(u_1' \; v_1''), \quad T^2(u_1'', v_1'), \quad T^2(u_2', v_2''), \quad T^2(u_2'', v_2'),$$

že dvojina diagonál:

$$t_{21},\ t_{22}$$

čtyřstranu p_{12}, q_{12}, p_{22}, q_{22} jest současně dvojinou diagonál čtyřstranu d_{12}', d_{24}', d_{22}', d_{24}' a čtyřstranu d_{12}, d_{14}, d_{22}, d_{24}.

Z úvah těchto vychází, že vždy dva singulární body ležící na přímkách:

$$t_{11},\ t_{12}$$

leží v jedné rovině vždy se dvěma singulárními body nacházejícími se na přímkách:

$$d_{11},\ d_{13},\ d_{21},\ d_{23}.$$

Rovněž tak singulární body nacházející se na přímkách:

$$t_{21},\ t_{22}$$

leží vždy v jedné rovině se dvěma singulárními body nacházejícími se na přímkách:

$$d_{12},\ d_{14},\ d_{22},\ d_{24}.$$

Neboli každá ze dvou dvojin singulárních bodů:

$$(d_{11}'\ d_{21}'),\quad (d_{13}'\ d_{23}');\qquad (d_{11}'\ d_{23}'),\quad (d_{13}'\ d_{21}')$$

leží v jedné rovině s kteroukoli bodovou dvojinou následujících 4 dvojin singulárních bodů:

$$\begin{array}{ll} (d_{11}\ d_{12}), & (d_{11}\ d_{14}); \\ (d_{12}\ d_{13}), & (d_{13}\ d_{14}); \\ (d_{21}\ d_{22}), & (d_{21}\ d_{24}); \\ (d_{22}\ d_{23}), & (d_{23}\ d_{24}); \end{array}$$

a každá ze dvou dvojin:

$$(d_{12}'\ d_{22}'),\quad (d_{14}',\ d_{24}');\qquad (d_{12}',\ d_{24}'),\quad (d_{14}',\ d_{22}');$$

leží v jedné rovině s každou bodovou dvojinou z následujících 4 dvojin:

$$\begin{array}{ll} (d_{11}\ d_{12}), & (d_{12}\ d_{13}) \\ (d_{11}\ d_{14}), & (d_{13}\ d_{14}) \\ (d_{21}\ d_{22}), & (d_{22}\ d_{23}) \\ (d_{21}\ d_{24}), & (d_{23}\ d_{24}). \end{array}$$

Seznáme pak, že nejprve můžeme našich 16 singulárních bodů uspořádati na 8 způsobů tak, že vždy po čtyřech leží ve čtyřech stěnách určitého tetraedru. Napíšeme nyní po řadě oněch 8 způsobů. Do každého řádku napíšeme vždy čtyři body ležící v téže stěně tetraedru.

Bude pak vyjádření našich 8 tetraedrů následující:

$$\begin{array}{llll}
(d_{11}\ d_{12}), & (d_{11}\ d_{14}), & (d_{11}'\ d_{21}'), & (d_{13}'\ d_{23}'), \\
(d_{12}\ d_{13}), & (d_{13}\ d_{14}), & (d_{11}'\ d_{23}'), & (d_{13}'\ d_{21}'), \\
(d_{21}\ d_{22}), & (d_{22}\ d_{23}), & (d_{12}'\ d_{22}'), & (d_{14}'\ d_{24}'), \\
(d_{21}\ d_{24}), & (d_{23}\ d_{24}), & (d_{12}'\ d_{24}'), & (d_{14}'\ d_{22}');
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
(d_{11}\ d_{12}), & (d_{11}\ d_{14}), & (d_{11}'\ d_{21}'), & (d_{13}'\ d_{23}'), \\
(d_{12}\ d_{13}), & (d_{13}\ d_{14}), & (d_{11}'\ d_{23}'), & (d_{13}'\ d_{21}'), \\
(d_{21}\ d_{22}), & (d_{22}\ d_{23}), & (d_{12}'\ d_{24}'), & (d_{14}'\ d_{22}'), \\
(d_{21}\ d_{24}), & (d_{23}\ d_{24}), & (d_{12}'\ d_{22}'), & (d_{14}'\ d_{24}');
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
(d_{11}\ d_{12}), & (d_{11}\ d_{14}), & (d_{11}'\ d_{23}'), & (d_{13}'\ d_{21}'), \\
(d_{12}\ d_{13}), & (d_{13}\ d_{14}), & (d_{11}'\ d_{21}'), & (d_{13}'\ d_{23}'), \\
(d_{21}\ d_{22}), & (d_{22}\ d_{23}), & (d_{12}'\ d_{22}'), & (d_{14}'\ d_{24}'), \\
(d_{21}\ d_{24}), & (d_{23}\ d_{24}), & (d_{12}'\ d_{24}'), & (d_{14}'\ d_{22}');
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
(d_{11}\ d_{12}), & (d_{11}\ d_{14}), & (d_{11}'\ d_{23}'), & (d_{13}'\ d_{21}'), \\
(d_{12}\ d_{13}), & (d_{13}\ d_{14}), & (d_{11}'\ d_{21}'), & (d_{13}'\ d_{23}'), \\
(d_{21}\ d_{22}), & (d_{22}\ d_{23}), & (d_{12}'\ d_{24}'), & (d_{14}'\ d_{22}'), \\
(d_{21}\ d_{24}), & (d_{23}\ d_{24}), & (d_{12}'\ d_{22}'), & (d_{14}'\ d_{24}');
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
(d_{21}\ d_{22}), & (d_{21}\ d_{24}), & (d_{11}'\ d_{21}'), & (d_{13}'\ d_{23}'), \\
(d_{22}\ d_{23}), & (d_{23}\ d_{24}), & (d_{11}'\ d_{23}'), & (d_{13}'\ d_{21}'), \\
(d_{11}\ d_{12}), & (d_{12}\ d_{13}), & (d_{12}'\ d_{22}'), & (d_{14}'\ d_{24}'), \\
(d_{11}\ d_{14}), & (d_{13}\ d_{14}), & (d_{12}'\ d_{24}'), & (d_{14}'\ d_{22}');
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
(d_{21}\ d_{22}), & (d_{21}\ d_{24}), & (d_{11}'\ d_{21}'), & (d_{13}'\ d_{23}'), \\
(d_{22}\ d_{23}), & (d_{23}\ d_{24}), & (d_{11}'\ d_{23}'), & (d_{13}'\ d_{21}'), \\
(d_{11}\ d_{12}), & (d_{12}\ d_{13}), & (d_{12}'\ d_{24}'), & (d_{14}'\ d_{22}'), \\
(d_{11}\ d_{14}), & (d_{13}\ d_{14}), & (d_{12}'\ d_{22}'), & (d_{14}'\ d_{24}');
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
(d_{21}\ d_{22}), & (d_{21}\ d_{24}), & (d_{11}'\ d_{23}'), & (d_{13}'\ d_{21}'), \\
(d_{22}\ d_{23}), & (d_{23}\ d_{24}), & (d_{11}'\ d_{21}'), & (d_{13}'\ d_{23}'), \\
(d_{11}\ d_{12}), & (d_{12}\ d_{13}), & (d_{12}'\ d_{22}'), & (d_{14}'\ d_{24}'), \\
(d_{11}\ d_{14}), & (d_{13}\ d_{14}), & (d_{12}'\ d_{24}'), & (d_{14}'\ d_{22}');
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
(d_{21}\ d_{22}), & (d_{21}\ d_{24}), & (d_{11}'\ d_{23}'), & (d_{13}'\ d_{21}'), \\
(d_{22}\ d_{23}), & (d_{23}\ d_{24}), & (d_{11}'\ d_{21}'), & (d_{13}'\ d_{23}'), \\
(d_{11}\ d_{12}), & (d_{12}\ d_{13}), & (d_{12}'\ d_{24}'), & (d_{14}'\ d_{22}'), \\
(d_{11}\ d_{14}), & (d_{13}\ d_{14}), & (d_{12}'\ d_{22}'), & (d_{14}'\ d_{24}').
\end{array}$$

Existuje však ještě 36 dalších způsobů, na které můžeme uspořádati našich 16 singulárních bodů vždy po čtyřech tak, že leží ve stěnách určitého tetraedru. Tyto další způsoby jsou důsledkem toho, že našich 16 singulárních bodů lze uspořádati ve dvě osmibodové skupiny, ze kterých každá má tu vlastnost, že sestává ze dvou čtyřbodových skupin, jež tvoří vrcholy vždy dvou tetraedrů v desmické poloze, t. j. takových dvou tetraedrů, kde každá dvojina protějších hran tetraedru jednoho protíná jednu dvojinu protějších hran tetraedru druhého. Vezměme v úvahu třeba ty dva tetraedry, jejichž vrcholy jsou vrcholy dvou sborcených čtyřstranů:

$$d_{11}' \; d_{13}' \; d_{21}' \; d_{23}'; \quad d_{12}' \; d_{14}' \; d_{22}' \; d_{24}.$$

Že u těchto dvou tetraedrů se protínají dvě dvojiny protějších hran:

$$d_{11}' \; d_{13}' \; d_{22}' \; d_{24}; \quad d_{21}' \; d_{23}' \; d_{12}' \; d_{14}'$$

bylo ukázáno již dříve. Třetími dvojinami protějších hran jsou dvojiny:

$$t_{11} \; t_{12}, \quad t_{21}, \; t_{22}.$$

Že tyto poslední dvě dvojiny se protínají jest patrno zase z toho, že jsou dvojinami diagonál dvou čtyřstranů p_{11} q_{11} p_{21} q_{21} a p_{12} q_{12} p_{22} q_{22}, jichž dvě a dvě dvojiny protějších stran ležíce na témže hyperboloidu se harmonicky oddělují.

Lze snadno nahlédnouti, že při naší desmické poloze dvou tetraedrů lze osm jejich vrcholů na 6 různých způsobů uspořádati tak, že tyto leží vždy po čtyřech vždy ve dvou rovinách. To samé platí zřejmě též o vrcholech čtyřstranů:

$$d_{11} \; d_{13} \; d_{12} \; d_{14}; \quad d_{21} \; d_{23} \; d_{22} \; d_{24}$$

poněvadž tyto tvoří vzhledem ku našemu hyperboloidu polárný útvar dvou čtyřstranů prvých. Kombinujeme-li vždy dvě roviny vyskytující se u první osmibodové skupiny s některými dvěma rovinami vyskytujícími se u druhé osmibodové skupiny, tu dostáváme $6 \times 6 = 36$ čtveřin rovinových neboli 36 tetraedrů, v jichž stěnách vždy po čtyrech leží 16 singulárních bodů našeho speciálního tetraedroidu.

Všimneme-li si osmi tetraedrů již dříve nalezených, tu můžeme vysloviti následující větu:

Fokální plocha kongruencí C_1^2 *a* C_2^2 *jest Kummerova plocha, kterou můžeme považovati na 44 různých způsobů za Cayley-ho tetraedroid.*

Dlužno podotknouti, že *K. Rohn* se zabýval *Kummerovou* plochou, jež na 2, 3, 4 způsoby mohla býti považována za tetraedroid*), a že *C. Segre* se zabýval plochou, která na 6 způsobů byla tetraedroidem**).

7. Množství ∞^{16} kongruencí C_1^2 a C_2^2. Vzájemný pronik kongruencí C_1^2 a C_2^2.

Kongruence C_1^2 a C_2^2 jsou dány libovolnou projektivností přiřazenými dvěma libovolnými obyčejnými involucemi I_1 a I ve dvou přímkových řadách plochy 2. stupně. Ježto ploch 2. stupně existuje ∞^9 a v každé přímkové řadě jest ∞^2 obyčejných involucí, jež zase mohou býti přiřazeny na ∞^3 různých způsobů, tu jest patrno, že množství kongruencí typu C_1^2 nebo C_2^2 jest

$$\infty^{9+2.2+3} = \infty^{16}.$$

Toto množství se nesníží o 1 jako ten případ byl***) u P^4 ploch a u harmonických quadratických komplexů kategorie [(11) 1111], které byly týmže způsobem stanoveny jako kongruence C_1^2 a C_2^2. Tam totiž plocha 2. stupně H^2, která jest nositelem involucí I_1 a I_2 mohla se uvažovati na ∞^1 způsobů tím, že se místo této plochy mohla uvažovati kterákoli plocha speciálního svazku, jehož základní čtyřstran tvoří dvě a dvě samodružné přímky involucí I_1 a I_2. Při kongruencích C_1^2 a C_2^2 vede však každá plocha 2. stupně P^2 zmíněného svazku ku jiné kongruenci. Kdyby totiž tomu tak nebylo tu by kongruencí C_1^2 resp. C_2^2 muselo procházeti ∞^1 lineárních komplexů, a sice každou z nich vždy jeden komplex z kterékoli dvojiny ∞^1 involutorních dvo-

---

*) *Karl Rohn*: »Einige specielle Fälle der Kummerschen Fläche«. Berichte über die Verhandlungen der k. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. 1884. pag. 11—16.

**) *Corrado Segre*: »Sur un cas particulier de la surface de Kummer«. Lettre à M. K. Rohn. ibidem p. 132—135.

***) Viz 2. odstavec citovaného zde pojednání: „Příspěvek ku přímkovým plochám . . . atd.“ a 4. odst. cit. zde pojednání: „O P^4 plochách v souvislosti . . . atd.“

jin těchto komplexů, stanovené vždy jednou plochou z ∞^1 ploch P^2, a na ní ležícím čtyřstranem samodružných přímek involucí I_1 a I_2. Avšak v sobě duální quadratickou kongruencí může procházeti, jak známo, pouze jediný lineární komplex. Z toho vidíme zároveň, že každé P^4 ploše a nebo každému harmonickému quadratickému komplexu kategorie [(11) 1111] přísluší ∞^1 dvojin kongruencí C_1^2 a C_2^2.

Hledejme nyní společné přímky kongruencí C_1^2 a C_2^2. Dokážeme nejprve pomocnou větu:

Je-li dvojpoměr dvou dvojin obyčejné involuce harmonickým, tu jest harmonickým též dvojpoměr dvojiny těchto dvojin vzhledem ku dvojině samodružných dvojin involuce.

Buďtež m_1, n_1; m_2, n_2 dvěma dvojinami involuce, které tvoří harmonický dvojpoměr $(m_1\, n_1\, m_2\, n_2) = -1$. Máme dokázati, že dvojpoměr čtyř dvojin: m_1, n_1; m_2, n_2; u, v; kde u; v jsou samodružnými dvojinami involuce jest harmonickým. Stanovme si třeba vzhledem ku prvku m_1 harmonické prvky postupně ku všem čtyřem právě uvedeným dvojinám. Tu jest patrno, že harmonickými prvky jsou postupně prvky m_1, n_1, u, v. Dvojpoměr těchto čtyř jednoduchých prvků dává dvojpoměr našich 4 dvojin. Ježto však jest $(m_1\, n_1\, u\, v) = -1$ tu vidíme, že tím jest již naše pomocná věta dokázána.

Jest patrno, že i opak této věty jest správným, že totiž je-li dvojpoměr dvojiny dvou dvojin involuce vzhledem ku dvojině samodružných dvojin involuce harmonickým, že jest harmonickým též dvojpoměr dvou dvojin uvedené dvojiny.

Tento případ nastává v odstavci předešlém uvažovaných dvojin p_{11}, q_{11}; p_{12}, q_{12} a dvojin p_{21}, q_{21}; p_{22}, q_{22}. Tam jsme totiž dokázali, že dvojpoměr dvojiny dvojin p_{11}, q_{11}; p_{12}, q_{12} vzhledem ku dvojině samodružných dvojin u_1, v_1 jest harmonickým. To samé platí též o dvojině dvojin p_{21}, q_{21}; p_{22}, q_{22}. Vyplývá tudíž dle úvah předchozích existence vždy dvou harmonicky se oddělujících dvojin:

$$p_{11},\ q_{11};\qquad p_{12},\ q_{12}$$
$$p_{21},\ q_{21};\qquad p_{22},\ q_{22}.$$

Označme si

$$s_{11},\ s_{22};\qquad s_{12},\ s_{21}$$

jakožto dvojiny diagonálných stran prostorových čtyřstranů:

$$p_{11},\ q_{11},\ p_{22},\ q_{22};\qquad p_{12},\ q_{12},\ p_{21},\ q_{21}.$$

Diagonály s_{11}, s_{22}, s_{12}, s_{21} tvoří sborcený čtyřstran, neboť jejich dvě a dvě protější strany jsou dvojinami diagonál dvou přímkových čtyřstranů na H^2 položených, jejichž dvě a dvě protější strany se harmonicky oddělují (viz větu dokázanou v 1. odstavci této práce). Ukážeme, že čtyřstran s_{11}, s_{22}, s_{12}, s_{21} náleží oběma našim kongruencím C_1^2 a C_2^2.

Kongruence C_1^2 jest, jak jsme ukázali, souhrnem diagonálných stran ∞^2 sborcených čtyřstranů a_i, b_i, a_{2i}, b_{2i}. Za jeden takový čtyřstran možno považovati též čtyřstran p_{11}, q_{11}, p_{22}, q_{22}. Lze totiž dvojinu p_{11} q_{11} považovati za libovolnou dvojinu a_1, b_1 involuce I_1, této dvojině projektivností $\mathfrak{P}$ odpovídá dvojina p_{21} q_{21} (viz předešlý odstavec této práce), kterou lze považovati za dvojinu a_2, b_2. Dvojina a_{2i}, b_{2i} jest, jak jsme na počátku této práce ukázali, libovolnou dvojinou involuce o samodružných přímkách a_2, b_2. Takovou dvojinou jest však též p_{22}, q_{22}, neboť p_{22}, q_{22} odděluje p_{21}, q_{21} harmonicky. Náleží tudíž přímková dvojina s_{11}, s_{22} kongruenci C_1^2. Avšak současně náleží tato dvojina kongruenci C_2^2, neboť čtyřstran p_{11}, q_{11}, p_{22}, p_{22}, možno též považovati za jeden z ∞^2 čtyřstranů a_2, b_2, a_{1k}, b_{1k}, kteréžto čtyřstrany nám zase definují kongruenci C_2^2. V tomto případě považujeme zase dvojiny p_{22}, q_{22}; p_{12}, q_{12}; p_{11}, q_{11} postupně za dvojiny a_2, b_2; a_1, b_1; a_{1k}, b_{1k}.

A zcela analogicky jako jsme dokázali o diagonálách s_{11}, s_{22} čtyřstranu p_{11}, q_{11}, p_{22}, q_{22}, že náležejí oběma našim kongruencím C_1^2 a C_2^2, dokázali bychom to též o diagonálách s_{12}, s_{21} čtyřstranu p_{12}, q_{12}, p_{21}, q_{21}.

Dvě kongruence (2, 2) pronikají se, jak známo, v 8 přímkách. Zbývá nám tudíž k úplnému proniku kongruencí C_1^2 a C_2^2 nalézti ještě čtyři přímky. Těmito 4 přímkami jsou patrně dvě a dvě samodružné přímky involucí I_1 a I_2 na H^2. Přímky ty u_1, u_2, v_1, v_2 tvoří obdobně jako přímky s_{11}, s_{22}, s_{12}, s_{21} prostorový čtyřstran.

Všimněme si nyní vzájemné polohy obou těchto sborcených čtyřstranů. Vytkněme si zde častěji uvažované přímky p_{11}, q_{11}

na hyperboloidu H^2 a uvažujme nyní ∞^1 přímkových dvojin a_2, b_2 involuce I_2 v druhé přímkové řadě tohoto hyperboloidu. Dostáváme pak ∞^1 přímkových čtyřstranů p_{11}, q_{11}, a_2, b_2 a diagonálné dvojiny jejich vyplňují určitý hyperboloid tvoříce na něm involuci konjugovaných polár hyperboloidu H^2. Jedním z těchto ∞^1 čtyřstranů jest též čtyřstran p_{11}, q_{11}, p_{22}, q_{22} neboť přímky p_{22}, q_{22} tvoří patrně též dvojinu involuce I_2. Vidíme z toho tedy, že diagonály s_{11}, s_{22} čtyřstranu p_{11}, q_{11}, p_{22}, q_{22} leží se samodružnými přímkami u_2, v_2 na určitém hyperboloidu, a že tam tyto přímky oddělují harmonicky.

Zcela analogicky jako jsme právě teď dokázali o dvou přímkových dvojinách:

$$s_{11}, s_{22}; \qquad u_2, v_2;$$

že mají hyperboloidickou polohu, a že se harmonicky oddělují, dokázali bychom to též o následujících třech dvojinách dvojin:

$$\begin{array}{ll} s_{11}, s_{22}; & u_1, v_1; \\ s_{12}, s_{21}; & u_2, v_2; \\ s_{12}, s_{21}; & u_1, v_1. \end{array}$$

I vidíme, že prostorové čtyřstrany:

$$s_{11}, s_{22}, s_{12}, s_{21}; \qquad u_1, v_1, u_2, v_2;$$

mají takovou zvláštní polohu, že kterékoli dvě protější strany jednoho mají s kterýmikoli dvěma protějšími stranami druhého hyperboloidickou polohu a navzájem se harmonicky oddělují. Dva čtyřstrany v takovéto poloze nazvali jsme „dvěma čtyřstrany v harmonické poloze" a zabývali jsme se jimi v častěji zde citovaných pracích: „Příspěvek ku přímkovým plochám . . . atd." a „O P^4 plochách v souvislosti . . . atd." Lze o takových čtyřstranech snadno dokázati, že mají společné diagonály.

I můžeme vysloviti nyní větu:

Osm společných přímek kongruencí C_1^2 a C_2^2 tvoří dva sborcené čtyřstrany v harmonické poloze.
