zabývá citovaný již Laussedat[2]). A právě proto, nechtěje své výklady zbytečně rozšiřovati, ač na př. Picard, otec vědecké nivelace, který přístroj svůj opatřil dalekohledem, jistě k tomu sváděl, o pracích těchto autorů pomlčím. Z téhož důvodu nezmiňoval jsem se o vzniku a vývoji naší nynější libely, která byla přijímána s velikou nedůvěrou — připomínám jen Sturma — a odkazuji na př. na Laussedata a pojednání C Müllera v Zeitschr. f. d. Vermessungswesen 1906 a 1907.

Tyto vždy přesnější metody nivelační nevnikaly ovšem mezi lid. Tomu byly koncem XVII. stol. i Vitruviovy přístroje příliš učené. Doklad toho nalézáme v „Piscinarium oder Teichtordnung“ Ondřeje Leopolda Stänzela de Cronfels, vydaném v Olomouci r. 1680[79]), kde praví, že vodováhy, jichž užívají mlynáři, založeny jsou jen na měření podle oka a proto nepřesné. Od nich že nelze žádati, aby rozuměli přístrojům Vitruviovým, chorobatu, dioptrům a libele.

O Lagrangeových řešeních problému tří těles.

Dr. Jindřich Svoboda.

Jsou-li splněny určité podmínky, vede řešení problému tří těles k jednoduchým výsledkům. Řešení tato nalezl Lagrange, odkudž jest jejich jméno *) V tomto pojednání chci podati jednoduchý způsob, jakým lze dospěti k řešením Lagrangeovým.

Mějmež tři tělesa hmoty m_1, m_2, m_3 a předpokládejme hned předem, že počáteční podmínky jsou takové, že *tělesa se pohybují stále v téže rovině XOY.* Jsou-li souřadnice tělesa

$$\begin{aligned} m_1 &: x_1,\ y_1, \\ m_2 &: 0,\ 0, \\ m_3 &: x_3,\ y_3, \end{aligned}$$

a označíme-li vzdálenosti těles od sebe r_{12}, r_{23}, r_{31}, jsou rovnice pro relativní pohyb tělesa m_1 vzhledem ku m_2

---

[79]) Mus. 56 G 3.

*) Viz: Tisserand, Traité de mécanique céleste, I., str. 128 a násl., Charlier, Die Mechanik des Himmels, II., str. 89. a násl.

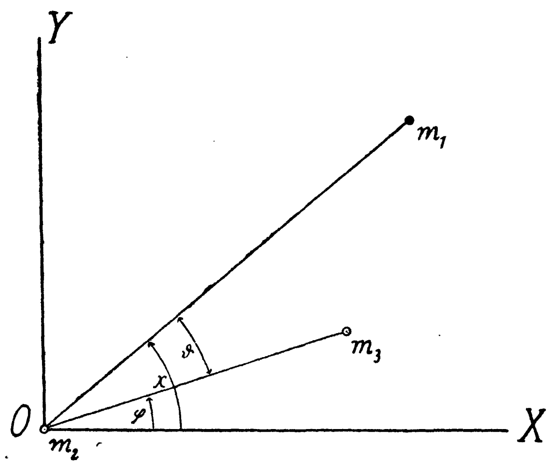
$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=k^2m_3\left(\frac{x_3-x_1}{r^3_{31}}-\frac{x_3}{r^3_{23}}\right)-k^2(m_1+m_2)\frac{x_1}{r^3_{12}}$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}=k^2m_3\left(\frac{y_3-y_1}{r^3_{31}}-\frac{y_3}{r^3_{23}}\right)-k^2(m_1+m_2)\frac{y_1}{r^3_{12}}$$

a pro relativní pohyb tělesa m_3 vzhledem ku m_2

$$\frac{d^2x_3}{dt^2}=k^2m_1\left(\frac{x_1-x_3}{r^3_{31}}-\frac{x_1}{r^3_{12}}\right)-k^2(m_2+m_3)\frac{x_3}{r^3_{23}}$$

$$\frac{d^2y_3}{dt^2}=k^2m_1\left(\frac{y_1-y_3}{r^3_{31}}-\frac{y_1}{r^3_{12}}\right)-k^2(m_2+m_3)\frac{y_3}{r^3_{22}}.$$



Obr. 1.

Je-li φ a χ (viz obr.) úhel, který svírá r_{23} a r_{21} s osou OX a označíme-li ϑ rozdíl $\chi-\varphi$, obdržíme substitucí

$$x_1=r_{12}\cos\chi,\quad y_1=r_{12}\sin\chi$$

$$x_3=r_{23}\cos\varphi,\quad y_3=r_{23}\sin\varphi$$

pro živou sílu

$$T=\tfrac{1}{2}\left\{m_1\left[\left(\frac{dr_{12}}{dt}\right)^2+r^2_{12}\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2\right]+m_3\left[\left(\frac{dr_{23}}{dt}\right)^2+r^2_{12}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\right\},$$

takže pomocí Lagrangeovy transformační formule dojdeme k pohybovým rovnicím ve tvaru

$$
(1)\begin{cases}
\dfrac{d^2r_{12}}{dt^2} - r_{12}\left(\dfrac{d\chi}{dt}\right)^2 = k^2 m_3\left(\dfrac{r_{23}\cos\vartheta - r_{12}}{r_{31}^3} - \dfrac{\cos\vartheta}{r_{23}^2}\right) - \\
\qquad - k^2(m_1 + m_2)\dfrac{1}{r_{12}^2} \\
\dfrac{1}{r_{12}}\dfrac{d}{dt}\left(r_{12}^2\dfrac{d\chi}{dt}\right) = -k^2 m_3\left(\dfrac{r_{23}}{r_{31}^3} - \dfrac{1}{r_{23}^2}\right)\sin\vartheta
\end{cases}
$$

$$
(2)\begin{cases}
\dfrac{d^2r_{23}}{dt^2} - r_{23}\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 = k^2 m_1\left(\dfrac{r_{12}\cos\vartheta - r_{23}}{r_{31}^3} - \dfrac{\cos\vartheta}{r_{12}^2}\right) - \\
\qquad - k^2(m_2 + m_3)\dfrac{1}{r_{23}^2} \\
\dfrac{1}{r_{23}}\dfrac{d}{dt}\left(r_{23}^2\dfrac{d\varphi}{dt}\right) = k^2 m_1\left(\dfrac{r_{12}}{r_{31}^3} - \dfrac{1}{r_{12}^2}\right)\sin\vartheta.
\end{cases}
$$

Budeme vyšetřovat, za jakých podmínek rovnice (1) a (2) dají se integrovat na sobě nezávisle.

Druhou rovnici v (1) lze integrovati, je-li pravá strana rovna nulle. Toho můžeme docílit, učiníme-li některý z činitelů rovný nulle.

a) Položme činitel

$$\frac{r_{23}}{r_{31}^3} - \frac{1}{r_{23}^2} = 0.$$

Z toho plyne

$$r_{23} = r_{31}. \tag{3}$$

Poněvadž (viz obr.)

$$r_{31}^2 = r_{23}^2 + r_{12}^2 - 2r_{12}r_{23}\cos\vartheta,$$

jest

$$\cos\vartheta = \frac{r_{12}}{2r_{23}} \tag{4}$$

Dosadíme-li do první rovnice v (1) za $\cos\vartheta$, obdržíme používajíce vztahu (3)

$$\frac{d^2r_{12}}{dt^2} - r_{12}\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 = -\frac{k^2}{r_{12}^2}\left[m_1\left(\frac{r_{12}}{r_{23}}\right)^3 + m_2 + m_3\right].$$

Tuto rovnici lze integrovat nezávisle na (2), zůstává-li poměr průvodičů $r_{12} : r_{23}$ konstantním. Položme tedy

$$\frac{r_{12}}{r_{23}} = b. \tag{5}$$

Ale ze vztahů (4) a (5) plyne, že

$$\cos\vartheta = \frac{b}{2}, \tag{6}$$

t. j. úhel ϑ musí býti stálý: tělesa m_1 a m_3 *musí míti v každém okamžiku stejnou úhlovou rychlost*, neboť je-li

$$\vartheta = \chi - \varphi = \text{const.}, \text{ jest}$$

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{7}$$

Integrací druhé rovnice v (1) za předpokladu (3) obdržíme

$$r_{12}^2 \frac{d\chi}{dt} = C_1,$$

z čehož plyne, použijeme-li vztahů (5) a (7)

$$r_{23}^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{C_1}{b_2} = C_3;$$

derivací této rovnice dle t obdržíme

$$\frac{d}{dt}\left(r_{23}^2 \frac{d\varphi}{dt}\right) = 0,$$

takže pravá strana druhé rovnice v (2) musí býti rovna nulle, což jest možné jen tenkrát, když

$$r_{12} = r_{31}. \tag{8}$$

Přihlížíme-li ke vztahům (3), (8) a (6), jest $r_{12} = r_{23} = r_{31}$; $\vartheta = \pm \frac{\pi}{3}$: *tělesa tvoří stále rovnostranný trojúhelník.*

Dosadíme-li tyto výsledky do rovnic (1) a (2), obdržíme:

$$(1)^a \quad \begin{cases} \dfrac{d^2 r_{12}}{dt^2} - r_{12}\left(\dfrac{d\chi}{dt}\right)^2 = -\dfrac{k^2}{r_{12}}(m_1 + m_2 + m_3) \\ \dfrac{1}{r_{12}}\dfrac{d}{dt}\left(r_{12}^2 \dfrac{d\chi}{dt}\right) = 0, \end{cases}$$

$$(2)^a \quad \begin{cases} \dfrac{d^2 r_{23}}{dt^2} - r_{23}\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\dfrac{k^2}{r_{23}^2}(m_1 + m_2 + m_3) \\ \dfrac{1}{r_{23}}\dfrac{d}{dt}\left(r_{23}^2 \dfrac{d\varphi}{dt}\right) = 0. \end{cases}$$

Rovnice $(1)^a$ a $(2)^a$ dají se integrovat na sobě nezávisle. Známý způsob integrace z problému dvou těles vede za svrchu vytčených podmínek ku *dvěma shodným kuželosečkám, jichž velké poloosy protínají se ve společném ohnisku pod úhlem 60°.* *)

b) Položme druhý činitel pravé strany druhé rovnice v (1)

$$\sin\vartheta = 0, \text{ takže}$$

$$\vartheta = 0,\ \varphi = \chi \tag{9$_1$}$$

$$\text{nebo } \vartheta = \pi. \tag{9$_2$}$$

V obou případech *leží tělesa stále na téže přímce.* Druhé rovnice v (1) a (2) lze integrovati:

$$r_{12}^2 \frac{d\chi}{dt} = C_1 \tag{10}$$

$$r_{23}^2 \frac{d\varphi}{dt} = C_3. \tag{11}$$

Ze vztahů $(9)_{1,2}$ plyne jako důsledek

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}, \tag{12}$$

t. j. tělesa m_1 a m_3 *musí míti v každém okamžiku stejnou úhlovou rychlost.*

Dělíme-li spolu rovnice (10) a (11) přihlížejíce k podmínce (**12**), obdržíme

$$\left(\frac{r_{12}}{r_{23}}\right)^2 = \frac{C_1}{C_3} = c^2; \tag{13}$$

poměr průvodičů jest stálý.

1. Je-li $\vartheta = 0$, jest buď

$$r_{12} = r_{23} - r_{31} \quad \text{nebo} \quad r_{23} = r_{12} - r_{31}.$$

α) Je-li $r_{12} = r_{23} - r_{31}$ a klademe-li $\frac{r_{12}}{r_{23}} = c$, mají pohybové rovnice tvar

*) Viz Tiserand: Traité de méc. cel., I., str. 151.

$$(1)^b \begin{cases} \dfrac{d^2 r_{12}}{dt^2} - r_{12}\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\dfrac{k^2}{r_{12}^2} M_1 \\ \dfrac{1}{r_{12}} \dfrac{d}{dt}\left(r_{12}^2 \dfrac{d\varphi}{dt}\right) = 0, \end{cases}$$

$$(2)^b \begin{cases} \dfrac{d^2 r_{23}}{dt^2} - r_{23}\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\dfrac{k^2}{r_{23}^2} M_3 \\ \dfrac{1}{r_{23}} \dfrac{d}{dt}\left(r_{23}^2 \dfrac{d\varphi}{dt}\right) = 0, \end{cases}$$

kdež
$$\left. \begin{aligned} M_1 &= m_1 + m_2 + \left[c^2 - \frac{c^2}{(1-c)^2}\right] m_3 \\ M_3 &= \left[\frac{1}{c^2} + \frac{1}{(1-c)^2}\right] m_1 + m_2 + m_3 \end{aligned} \right\} \qquad (14)$$

Integrací rovnic $(1)^b$ a $(2)^b$ obdržíme pro *dráhy těles* m_1 *a* m_3 *kolem* m_2 ***homothetické kuželosečky.***

Označíme-li p_1 a p_2 parametry těchto kuželoseček, platí pro konstanty C_1 a C_3 [viz rovnice (10) a (11)] známé vztahy

$$\begin{aligned} C_1 &= k\sqrt{M_1 p_1} \\ C_3 &= k\sqrt{M_3 p_3}. \end{aligned}$$

Dělením těchto rovnic obdržíme

$$c^2 = \sqrt{\frac{M_1}{M_3}}\, c \quad \text{čili}$$

$$M_1 = c^3 M_3.$$

Dosadíme-li za M_1 a M_3 ze vztahů (14), dostaneme pro poměr průvodičů c rovnici stupně pátého:

$$\begin{aligned} (m_2 + m_3) c^5 - (2m_2 + 3m_3) c^4 + (2m_1 + m_2 + 3m_3) c^3 \qquad (15) \\ - (3m_1 + m_2) c^2 + (3m_1 + 2m_2) c - (m_1 + m_2) = 0. \end{aligned}$$

β) Je-li $r_{12} = r_{23} + r_{31}$ a položíme-li opět $\dfrac{r_{12}}{r_{23}} = c$, obdržíme pro pohyb těles rovnice stejného tvaru jako v případě předešlém; pro M_1 a M_3 platí vztahy

$$\begin{aligned} M_1 &= m_1 + m_2 + \left[c^2 + \frac{c^2}{(c-1)^2}\right] m_3 \\ M_3 &= \left[\frac{1}{c^2} - \frac{1}{(c-1)^2}\right] m_1 + m_2 + m_3. \end{aligned}$$

Integrace dává opět homothetické kuželosečky a ze vztahu

$$M_1 = c^3 M_3$$

plyne pro poměr průvodičů rovnice:

$$(m_2 + m_3) c^5 - (2m_2 + 3m_3) c^4 + (m_2 + 3m_3) c^3 - (3m_1 + m_2 + 2m_3) c^2 + (3m_1 + 2m_2) c - (m_1 + m_2) = 0. \quad (16)$$

2. Je-li $\vartheta = \pi$, jest $r_{12} = r_{31} - r_{23}$.

Zcela obdobnou cestou jako v případech předešlých obdržíme, kladouce $\frac{r_{12}}{r_{23}} = c$, vztahy

$$M_1 = m_1 + m_2 + \left[\frac{c^2}{(1+c)^2} - c^2\right] m_3$$

$$M_3 = \left[\frac{1}{(1+c)^2} - \frac{1}{c^2}\right] m_1 + m_2 + m_3.$$

Integrace pohybových rovnic vede opět k *homothetickým kuželosečkám*, a pro poměr průvodičů obdržíme rovnici

$$(m_2 + m_3) c^5 + (2m_2 + 3m_3) c^4 + (m_2 + 3m_3) c^3 - (m_2 + 3m_1) c^2 - (2m_2 + 3m_1) c - (m_2 + m_1) = 0. \quad (17)^{*})$$

O dvojných součinech vektorových.

Napsal Ph. Dr. **Vlad. Libický.**

(Dokončení.)

Vzhledem ke vzorci (9)**) jest analytický tvar skalárovektoriálního součinu dyad **al**, **bm**, **cn**:

$$\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{cn} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}.$$

Skalárovektoriální a vektoroskalární součiny dyadických mnohočlenů.

Jsou-li dány dyadické mnohočleny (dyadiky)

$$\Phi = \mathbf{al} + \mathbf{bm} + \mathbf{cn}, \quad \Psi = \mathbf{do} + \mathbf{ep} + \mathbf{fq},$$

---

*) Viz Tiserand: Traité de méc. cél., I., str. 155.
Srovnej Charlier: Die Mech. des Himmels, II., str. 110.

**) *A. Libický*, Vekt. analysis, vzorec (15) na str. 19.