Vladimír Kořínek

Definition de la norme d'un idéal dans une algèbre simple

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 5, 133--134

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121283

Définition de la norme d'un idéal dans une algèbre simple.

Vladimír Kořínek, Praha.

Soit A une algèbre simple de degré m sur son centre K. On définit d'habitude la norme régulière (*norme r.*) et la norme absolument irréductible (*norme a. irr.*) d'un élément α de A comme déterminant de la matrice qui correspond à α dans une représentation r. et dans une représentation a. irr. de A dans K. Quoique la représentation a. irr. de A est la représentation irréductible de A dans l'extension algébrique, algébriquement fermée de K, la norme a. irr. de chaque élément de A est un élément de K. La norme r. de α est le terme absolu de l'équation caractéristique de α dans A et la norme a, irr., le terme de l'équation principale.[1])

Afin qu'on puisse examiner A au point de vue arithmétique, supposons que le centre K est un corps de nombres algébriques du degré fini. Soit O un ordre maximum de A et $\mathfrak{A}$ un idéal à gauche de O. La première définition de la norme de $\mathfrak{A}$ a été donnée par M. Artin[2]) et plus tard d'une manière différente et plus générale par M. Hasse.[3]) Cette définition utilise la représentation r. de A et correspond par conséquent à la norme r. d'un élément. Nous l'appelerons la norme r. Une définition de la norme correspondante à la norme a. irr. d'un élément (norme a. irr.) n'a pas été jusqu'à présent donnée d'une manière directe. Nous devons seulement à M. H. Brandt une définition de la norme a. irr. construite au moyen des formes admettant une composition.[4]) Je me propose dans cette communication de donner la définition de la norme a. irr. d'un idéal $\mathfrak{A}$ de A par une voie qui reste entièrement dans le domaine de l'arithmétique de A, en employant les considérations p-adiques introduites dans l'arithmétique de A par M. Hasse.[1])

---

[1]) Les expressions „équation caractéristique" et „équation principale" sont ici employées au sens qui leur a été donné par M. H. Hasse: Über p-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme. Math. Ann. 104, 1931, 495—534, p. 500. Je citerai ce travail dans ce qui suit par H.

[2]) E. Artin: Zur Arithmetik hyperkomplexer Zahlen. Abh. aus d. Math. Sem. d. Hamb. Univ. 5, 1927, 261—289, p. 267.

[3]) H. p. 523, Satz 53, voir aussi la note [2]) de cette page, p. 529, Satz 65.

[4]) Cette définition a été donnée par M. H. Brandt dans une conférence faite à l'Université de Hamburg au sémestre d'hiver 1929/30. Elle est la généralisation de celle, donnée par lui pour les idéaux dans un corps de quaternions: H. Brandt, Idealtheorie in Quaternionenalgebren, Math. Ann. 99, 1928, 1—29.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de K. Nous allons désigner par $A_\mathfrak{p}$ l'algèbre simple qu'on obtient de A par extension $\mathfrak{p}$-adique $K_\mathfrak{p}$ du centre K. Soit $o_\mathfrak{p}$ l'ordre maximum de $K_\mathfrak{p}$. Formons de O et $\mathfrak{A}$ les fermetures au sens $\mathfrak{p}$-adique $O_\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$. $O_\mathfrak{p}$ est un ordre maximum de $A_\mathfrak{p}$ (H. Satz 60) et $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$, un idéal à gauche de $O_\mathfrak{p}$ (H. Satz 61). Or, dans $O_\mathfrak{p}$ chaque idéal est un idéal principal (H. Satz 45 et 46). On peut alors écrire $\mathfrak{A}_\mathfrak{p} = O_\mathfrak{p}\xi_\mathfrak{p}$ avec un $\xi_\mathfrak{p}$ de $A_\mathfrak{p}$.

Choisissons maintenant une représentation a. irr. de $A_\mathfrak{p}$ dans $K_\mathfrak{p}$. Cette représentation est toujours du degré m. Soit $x_\mathfrak{p}$ le déterminant de la matrice qui correspond dans cette représentation à $\xi_\mathfrak{p}$. $x_\mathfrak{p}$ est un élément de $K_\mathfrak{p}$ qui engendre un idéal principal $o_\mathfrak{p}x_\mathfrak{p}$ de $K_\mathfrak{p}$. Formons de cette manière les idéaux $o_\mathfrak{p}x_\mathfrak{p}$ pour tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de K. On peut montrer que ces idéaux forment dans son ensemble les composants $\mathfrak{p}$-adiques d'un idéal $\mathfrak{a}$ de K. L'idéal $\mathfrak{a}$ est l'ensemble de tous les nombres communs aux ensembles $o_\mathfrak{p}x_\mathfrak{p}$ et à K. Je définis maintenant la norme a. irr. de $\mathfrak{A}$: $n(\mathfrak{A}) = \mathfrak{a}$. On peut montrer que la norme $n(\mathfrak{A})$ est indépendente 1° du choix des représentations a. irr. de $A_\mathfrak{p}$ dans $L_\mathfrak{p}$, 2° du choix des éléments $\xi_\mathfrak{p}$ qui engendrent les idéaux $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$. Par la même méthode on peut définir aussi la norme r. $N(\mathfrak{A})$ d'un idéal $\mathfrak{A}$. Il suffit de remplacer dans la définition précedente les représentations a. irr. de $A_\mathfrak{p}$ par les représentations r. Il me semble que cette définition de la norme r. est au fond plus simple que celle donnée par M. Hasse.[3])

On démontre aisément les propriétés suivantes des normes $N(\mathfrak{A})$ et $n(\mathfrak{a})$:

1. La norme $N(\mathfrak{A})$ est identique à la norme définie par M. Hasse.[3])

2. Soit $\mathfrak{A}$ l'idéal à droite de l'ordre maximum O'. On obtient les mêmes normes $N(\mathfrak{A})$, $n(\mathfrak{A})$, si l'on les forme dans les ordres maxima $O'_\mathfrak{p}$ au lieu de $O_\mathfrak{p}$.

3. Pour un produit propre[5]) $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ de deux idéaux on a

$$N(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = N(\mathfrak{A})\,N(\mathfrak{B}),\quad n(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = n(\mathfrak{A})\,n(\mathfrak{B}).$$

4. On a

$$N(\mathfrak{A}) = [n(\mathfrak{A})]^m.$$

5. Les normes $N(O\xi)$ et $n(O\xi)$ d'un idéal principal $O\xi$ de A sont des idéaux principaux engendrés par la norme r. et la norme a. irr. de ξ dans K.

6. Pour que $n(\mathfrak{A})$ soit un idéal premier de K, il faut et il suffit que $\mathfrak{A}$ soit un idéal indécomposable.

---

[5]) Quant à la notion du produit propre voir H. p. 520, Satz 50 et p. 529, Satz 73.