Jovan Karamata

Un apperçu sur les inversions des procédés de sommabilité

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 5, 49--61

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121275`

Un apperçu sur les inversions des procédés de sommabilité.

J. Karamata, Beograd.

Quoique le sujet que je vais exposer traite des questions d'un caractère assez spécial, et malgré sa date relativement récente, il s'est, ces derniers temps surtout, tellement dévellopé qu'on peut bien le considérer comme un chapitre important de l'analyse moderne.

Je ne pourrai donc pas l'envisager dans tous ses rapports, ni même mentionner les nombreuses applications de ce groupe de théorèmes, si fécondes dans la théorie analytique des nombres. Pour cette raison je me bornerai seulement à donner un apperçu général, plus ou moins complet, et n'exposerai le principe et la nature des démonstrations que sur un groupe particulier de problèmes.

Considérés d'un point de vue général, les problèmes dont il s'agit peuvent être formulés de la manière suivante:

Soit donnée une suite de nombres

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

et soit

$$V(\lambda, s_0, s_1, s_2, \ldots)$$

une fonction des éléments de cette suite et d'un paramètre λ, telle qu'à une certaine propriété limite (par exp.: $\backsim$, O, $\to$, o, ou d'autres) de la suite s_n, il correspond une propriété limite analogue de la fonction V lorsque $\lambda \to \infty$.

Ceci posé, un premier groupe de théorèmes consiste justement à caractériser les fonctions V afin de satisfaire aux conditions indiquées ci-dessus. C'est le groupe de théorèmes dits „directes".

Dans le second groupe de théorèmes, dits „inverses" il s'agit de déduire d'une propriété limite de la fonction V la propriété limite correspondante de la suite s_n.

Les cas qui ont été exclusivement étudiés sont ceux où V est linéaire par rapport aux éléments s_n, respectivement u_n, c.-à-d. lorsque V a la forme

$$P(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu(\lambda)\, s_\nu, \tag{1}$$

ou

$$Q(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu(\lambda)\, u_\nu. \tag{1'}$$

Ces deux expressions se réduisent d'ailleurs l'une à l'autre lorsque

$$p_n = q_n - q_{n+1}, \quad \text{ou bien} \quad q_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} p_\nu, \tag{2}$$

relations que l'on supposera dorénavant toujours remplies.

Dans le courant de l'exposé je mentionnerai diverses formes particulières des théorèmes inverses relatives aux expressions (1) et (1'). Mais, le groupe des inversions spéciales dont nous nous occuperons particulièrement seront celles qui se rapportent à la convergence ordinaire de $P(\lambda)$, resp. $Q(\lambda)$, $(\lambda \to \infty)$ et de s_n $(n \to \infty)$.

Pour ce cas spécial les théorèmes directes sont dus à Toeplitz et Schur; sous l'hypothèse des poids $p_\nu(\lambda)$ positifs on peut les exprimer comme suit: de

$$s_n \to s, \quad n \to \infty,$$

il résulte

$$P(\lambda) \to s, \quad [\text{resp. } Q(\lambda) \to s], \quad \lambda \to \infty, \tag{3}$$

toutes les fois que

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(\lambda) = 1, \quad p_n(\lambda) \geqq 0, \quad \lim_{\lambda=\infty} p_n(\lambda) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

C'est le théorème directe; il est de nature élémentaire et nous l'énoncerons encore de la manière suivante:

Les hypothèses (4) étant remplies, toute suite convergente est sommable-P vers la même limite.

Dans les théorèmes inverses il s'agit de conclure la convergence d'une suite, sachant qu'elle est sommable-P, c'est à dire que la limite (3) existe. Ces théorèmes exigent en général une condition supplémentaire afin que la sommabilité entraîne la convergence; pour cette raison je désignerai cette condition par le nom de „condition de convergence".

Le premier théorème inverse important, demontré en 1910 par Littlewood, est le suivant:

La série Σu_n étant sommable-A

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n r^n \to s, \; r \to 1,$$

sera convergente toutes les fois que la condition de convergence

$$| n u_n | < M, \text{ pour tout } n, \tag{5}$$

est satisfaite.

Comme on le voit, c'est le théorème inverse de la proposition classique d'Abel, celle-ci représentant un théorème directe. Pour cette raison on appelle souvent les théorèmes directes les théorèmes de nature abelienne. Tandis qu'aux théorèmes inverses on donne le nom de théorèmes de nature tauberienne, parce que c'est Tauber qui a en 1897 le premier formulé un théorème inverse relatif à la sommabilité-A. Dans ce théorème la condition de convergence (5) est remplacée par la suivante

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n}\nu u_\nu \to 0,\ n \to \infty, \tag{6}$$

mais qui est toutefois de nature bien plus élémentaire.

Ayant mentionné comme premier théorème inverse important le théorème de Littlewood, j'ai fait abstraction de quelques théorèmes antérieurs à celui-ci. Tel est par exemple le théorème de Fatou, démontré en 1906, d'après lequel de l'analycité de la fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$$

au point $z = 1$, il résulte la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n =$ $= f(1)$, lorsque la condition de convergence

$$u_n \to 0, \quad n \to \infty,$$

est satisfaite.

Il en est de même du théorème de Landau qui, perfectionné postérieurement, déduit de l'analycité de la fonction

$$(1 - z)\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-z}$$

pour $R(z) \geqq 1$, la sommabilité-C de a_n, c'est à dire la convergence de la suite

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$$

lorsque $a_n \geqq 0$.

Ces théorèmes diffèrent des théorèmes de nature tauberienne proprement dit, faisant plus d'hypothèses sur $P(\lambda)$, resp. $Q(\lambda)$; ils appartiennent néanmoins, ainsi que toutes leurs généralisations au groupe général des théorèmes inverses mentionné au debut.

Le manque de temps ne nous permettra pas de mettre ces théorèmes en cadre de nos considérations. Je serai même obligé de passer outre les inversions des relations assymptotiques telles que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \backsim A\,(1 - r)^{-k}, \quad r \to 1;$$

données par Hardy et Littlewood, préferant me fixer sur la simple convergence, afin de pouvoir mieux ressortir le principe de démonstration des théorèmes inverses relatifs aux procédés de sommabilité de forme aussi générale que possible.

Nous voyons que dans l'inversion de la proposition d'Abel la condition de convergence est donnée sous l'une des formes suivantes:

Tauber

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n} \nu u_\nu \to 0, \quad n \to \infty, \tag{6}$$

Littlewood

$$n u_n = O(1), \quad n \to \infty, \tag{7}$$

ou encore

Hardy-Littlewood

$$n u_n > O(1), \quad n \to \infty, \tag{8}$$

condition donnée par ces auteurs en 1911.

Les conditions (6) et (8) ne sont pas contenues l'une dans l'autre, et quoique la condition (8) pénètre bien plus profondément la nature même des théorèmes inverses, elle ne représente pas une condition de convergence nécessaire et suffisante comme c'est le cas de la condition (6); car, toute série convergente satisfait à la condition (6) mais pas nécessairement à la condition (8).

Il doit donc exister une forme de la condition de convergence répondant mieux à la nature des théorèmes inverses, et qui devrait contenir les conditions (6) et (8) comme cas particulier. Pour faire ressortir cette forme de la condition de convergence, envisageons pour un moment le critère général de Cauchy qui exprime que

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n+p} u_\nu\right| < \varepsilon, \text{ pour tout } n > N(\varepsilon) \text{ et } p > 0,$$

représentant la condition nécéssaire et suffisante pour que la série $\Sigma\, u_n$ soit convergente. Cette condition peut encore être exprimée sous la forme suivante:

il faut et il suffit que

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n'} u_\nu\right| \to 0 \text{ avec } 1/n \tag{9}$$

uniformément par rapport à tout n' de l'intervalle (n, ∞).

Remarquons ici en passant que dans une de ses démonstrations, Euler croyait pouvoir conclure la convergence de série $\Sigma\, u_n$ lorsque le groupe de termes (9) tend uniformément vers zéro par rapport à tout n' d'un intervalle de longueur n seulement, c.-à-d. de l'intervalle $(n, 2n)$. [Euler considérait la série $\Sigma\, 1/n^2$ (à termes positifs) et concluait sa convergence du fait que $\sum_{\nu=n}^{2n} 1/\nu^2 \to 0$, avec $1/n$].

Si l'on n'impose à la série $\Sigma\, u_\nu$ aucune autre condition, il est évident que la condition d'Euler ne peut entraîner en général sa convergence. Cependant si l'on sait que la série $\Sigma\, u_\nu$ satisfait à une certaine condition limite, telle par exemple d'être sommable-P, il est probable que la condition (9) remplie uniformément par rapport aux n' d'un intervalle (n, N) de longueur finie, soit déjà suffisante pour entraîner sa convergence.

Cela se présente, en effet, dans les inversions des procédés de sommabilité. Landau a montré, en 1913 que les conditions de convergence (6) et (7) peuvent être réunies en une seule qui est de nature de la condition (9), et qui a la forme suivante:

$$\limsup_{n=\infty} \left| \sum_{\nu=n}^{n'} u_\nu \right| < w(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad \text{pour tout } n \leqq n' \leqq n + \varepsilon n. \tag{10}$$

En ce qui concerne le rapport entre les conditions de convergence (10) et (9) d'une part et (10) et (8) de l'autre part, j'aurais encore deux remarques à faire.

Premièrement, la condition (10) diffère un peu en forme de la condition de convergence (9) car, si l'on l'écrit sous cette forme c.-à-d. en supposant que (9) soit satisfait uniformément pour tout n' de l'intervalle $(n, n + \varepsilon n)$, on obtient une condition de convergence plus restrictive. Or, c'est précisément cette restriction qui réduit non seulement notablement le champ d'application de la condition de convergence, mais encore les théorèmes inverses perdent de leur vraie nature, la difficulté principale s'introduisant justement en passant de cette forme de la condition de convergence à la forme (10).

En second lieu, la condition de convergence (8) n'est pas contenue dans la condition (10). On peut cependant l'élargir encore en lui donnant, avec R. Schmidt, la forme suivante

$$\liminf_{n=\infty} \sum_{\nu=n}^{n'} u_\nu > - w(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad n \leqq n' \leqq n + \varepsilon n.$$

Ainsi, cette condition contiendra la condition (8), mais dans le but de faciliter l'exposé nous ne considérerons plus les conditions de convergence sous cette forme, et nous bornerons seulement à la forme (10).

Pour montrer à présent que c'est sous la forme (9) ou (10) que les conditions de convergence conviennent encore le mieux aux théorèmes d'inversion, et que c'est bien celle qui correspond à la nature même de ces théorèmes, considérons la sommabilité de Cesàro, où la marche d'une partie du raisonnement devient particulièrement claire. En effet, de

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu \to s, \quad n \to \infty,$$

il résulte

$$\frac{1}{[n\varepsilon]}\sum_{\nu=n+1}^{n+n\varepsilon} s_\nu \to s, \quad n \to \infty,$$

d'où l'on tire, d'après (10), en soustrayant s_n aux deux membres que

$$\limsup_{n=\infty} |\, s_n - s \,| = \limsup_{n=\infty} \left| \frac{1}{[n\varepsilon]} \sum_{\nu=n+1}^{n+n\varepsilon} (s_\nu - s_n) \right| < w(\varepsilon) \to 0$$

avec ε, c.-à-d. que

$$s_n \to s, \quad n \to \infty.$$

Donc, toute suite sommable-C sera convergente lorsque la condition de convergence (10) est satisfaite.

Dans ce qui suivra, nous allons montrer que c'est sur le même principe que repose en partie la méthode de démonstration, ainsi que la recherche de la condition de convergence des procédés de sommabilité de forme générale.

Considérons pour cela le procédé de sommabilité sous sa forme générale (1) et supposons que s_n soit sommable-P, c.-à-d. que

$$P(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n p_n(\lambda) \to s \text{ lorsque } \lambda \to \infty. \tag{11}$$

D'après (4) il existe pour chaque n et $\varepsilon < 1$, un $\lambda = \lambda(n, \varepsilon)$ tel que $N = N(n, \varepsilon)$ soit le plus petit indice pour lequel

$$\sum_{\nu=n}^{N} p_\nu(\lambda) \geqq \varepsilon. \tag{12}$$

Le nombre N ainsi défini, détermine complètement la condition de convergence de la sommabilité-P, toutes les fois qu'on réussit à démontrer que le groupe central des termes de (11), correspondant aux indices de l'intervalle (n, N) tende vers εs lorsque $n \to \infty$, c.-à-d. toutes les fois que

$$\sum_{\nu=n}^{N} s_\nu p_\nu(\lambda) \to \varepsilon s \text{ lorsque } n \to \infty. \tag{13}$$

Or, c'est précisément ce passage qui présente la principale difficulté dans les démonstrations des théorèmes inverses. Car, une fois la relation (13) établie, sous l'hypothèse que la suite s_n satisfait à la condition de convergence (10) pour tout n' de l'intervalle (n, N), le même raisonnement que pour la sommabilité-C donne l'inversion du procédé de sommabilité-P. On a, en effet, d'après (13) et en supposant la condition de convergence satisfaite pour l'intervalle (n, N), que

$$\limsup_{n=\infty} | s_n - s | = \limsup_{n=\infty} \frac{1}{\varepsilon} \left| \sum_{\nu=n}^{N} (s_\nu - s_n)\, p_\nu(\lambda) \right| < w(\varepsilon) \to 0 \text{ avec } \varepsilon,$$

et d'où il résulte que $s_n \to s$ lorsque $n \to \infty$.

L'on voit donc, que c'est l'intervalle (n, N) défini par (12) qui détermine complètement la condition de convergence; je l'appelerai pour cette raison „l'intervalle de convergence“ du procédé en question. La longueur de l'intervalle de convergence ainsi défini mesure en quelque sorte la puissance, ou la capacité sommatrice (intérieure) des différents procédés de sommabilité. Car, plus cet intervalle est long, plus la condition de convergence lui correspondante est restrictive, par suite la capacité sera plus grande, et réciproquement.

Comme illustration mentionnons les intervalles de convergence

$$(n, n + \varepsilon\sqrt{n}),\ (n, n + \varepsilon n) \text{ et } (n, n\, n^{\varepsilon}),$$

correspondants respectivement aux procédés de sommabilité

$$e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!},\quad \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} s_\nu \text{ ou } \sum_{n=1}^{\infty} u_n r^n \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} u_n n^{-x}.$$

Comme je l'ai déjà mentionné, le passage le plus difficile dans la démonstration des théorèmes inverses consiste à montrer l'existence de la limite du groupe des termes centrals (13) de $\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu p_\nu(\lambda)$, dont la somme des poids correspondants ne s'évanouit pas. Pour y parvenir, les calculs se réduisent de beaucoup lorsque les termes de la suite s_n restent bornés. Une première étape consiste donc à montrer que $s_n = O(1)$ toutes les fois que cette suite est sommable-P et satisfait à la condition de convergence relative à l'intervalle (n, N). Cela peut s'effectuer même sous une forme un peu plus générale, à savoir:

De

$$P(\lambda) = O(1),\ \lambda \to \infty,$$

il résulte

$$s_n = O(1),\ n \to \infty,$$

toutes les fois que

$$\sum_{\nu=n}^{n'} u_\nu = O(1) \text{ pour tout } n \leqq n' \leqq N, \tag{14}$$

et cela sous des conditions peu restrictives quant aux poids $p_n(\lambda)$.

Ce théorème est de même un théorème inverse; pour cette raison j'appellerai ce genre de théorèmes les „théorèmes inverses-O", afin de les distinguer des théorèmes inverses proprement dit, lesquels peuvent encore être désignés par „théorèmes inverses-o", puisque dans ces théorèmes il s'agit de voir quand est ce que $P(\lambda) = o(1)$ entraîne $s_n = o(1)$. Quoique ces deux groupes de théorèmes c.-à-d. les théorèmes inverses o et O soient très semblables, il y a néanmoins entre eux une profonde différence.

Les théorèmes inverses-O, relatifs même aux procédés de sommabilité de forme très générale, se démontrent par des considérations relativement élémentaires. Ainsi, en écrivant les procédés de sommabilité sous la forme $Q(\lambda)$ [d'après (3) la convergence de la série Q entraîne toujours celle de la série P, l'inverse n'a pas lieu en général, cependant on peut l'affirmer dans la plupart des cas lorsque s_n satisfait à la condition (14)] il suffit de montrer que $Q(\lambda) - s_n = O(1)$. L'on y parvient en découpant les séries $\sum_{\nu=0}^{n} u_\nu(1-q_\nu)$ et $\sum_{\nu=n+1}^{\infty} u_\nu q_\nu$ en tranches de longueur $(N_{-k-1}, N_{-k}-1)$ resp. (N_k+1, N_{k+1}), les $N_{\pm\nu}$ étant les itérés droits et gauches de $N(n)$, puis en appliquant à chaque tranche le théorème de la moyenne, d'après lequel, q_ν ne croîssant pas, on obtient

$$\left| \sum_{\nu=N_k+1}^{N_k+1} u_\nu q_\nu \right| \leqq |\Sigma u_\nu| \, q_{N_k} \leqq M q_{N_k}.$$

et

$$\left| \sum_{\nu=N_{-k-1}}^{N_{-k}-1} u_\nu(1-q_\nu) \right| \leqq |\Sigma u_\nu| \, (1-q_{N_{-k}}) \leqq M(1-q_{N_{-k}}).$$

De là il résulte que $s_n = O(1)$ toutes les fois que les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-q_{N_{-k}}) \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty} q_{N_k}$$

convergent, ce qui représente la condition supplémentaire mentionnée.

Des difficultés toutes autres interviennent lorsqu'il s'agit des démonstrations des théorèmes inverses proprement dit, c.-à-d.

des théorèmes inverses-o. D'après ce qu'il a été dit, et en se servant des théorèmes inverses-O, il s'agit de voir quand est ce que

$$P(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu\, p_\nu(\lambda) = o(1), \ \lambda \to \infty,$$

entraîne

$$\sum_{\nu=n}^{N} s_\nu\, p_\nu(\lambda) = o(1), \ n \to \infty, \tag{15}$$

sachant en outre que

$$s_n = O(1).$$

Cette seconde étape, qui présente la principale difficulté s'effectue, et s'est encore la voie la plus courte, en introduisant d'abord dans la somme (1) une fonction arbitraire, puis en la faisant évanouir pour toutes les valeurs de l'indice extérieur à l'intervalle de convergence (n, N). Il ne reste ainsi que le groupe de termes centrals relatifs aux indices de l'intervalle de convergence et d'où l'on conclut la relation (15) ou une autre qui lui est analogue.

Je vais illustrer ce raisonnement sur la sommabilité d'Abel, où il devient particulièrement simple. En effet, de

$$(1 - r)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu r^\nu = o(1), \quad r \to 1,$$

il résulte

$$(1 - r)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu r^{\nu k} r^\nu = o(1) \text{ pour tout } k,$$

et du fait que $s_n = O(1)$, l'application du théorème d'approximation de Weierstrass donne

$$(1 - r)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu\, f(r^\nu)\, r^\nu = o(1),$$

f étant une fonction continue arbitraire. En y posant $r = e^{-1/n}$, et faisant évanouir $f(x)$ pour $0 \leqq x \leqq e^{-1-\varepsilon}$ et $e^{-1} \leqq x \leqq 1$, il résulte que

$$(1 - r)\sum_{\nu=n}^{n(1+\varepsilon)} s_\nu\, f(r^\nu)\, r^\nu = o(1), \quad n \to \infty,$$

d'où l'on déduit, par le raisonnement indiqué, que $s_n = o(1)$ lorsque cette suite satisfait à la condition de convergence relative à l'intervalle $(n, n + \varepsilon n)$.

Quant aux procédés de sommabilité de forme générale ce même raisonnement peut être reproduit exactement, mais alors on est obligé d'assujettir les poids $p_\nu(\lambda)$ à satisfaire certaines conditions qui au fond ne font que déplacer la difficulté. On est obligé, en effet, de supposer du procédé P d'être tel que toute suite s_n sommable-P soit de même sommable par tous les procédés de la forme

$$P^{(k)}(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \, [q_\nu(\lambda)]^k \, p_\nu(\lambda), \quad \text{pour tout } k = 1, 2, 3, \ldots$$

car, cet hypothèse étant supposé remplie, c'est encore par l'application du théorème de Weierstrass que l'on en déduit

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \, f[q_\nu(\lambda)] \, p_\nu(\lambda) = o(1), \qquad \lambda \to \infty;$$

pour toute fonction continue f, et d'où il résulte

$$\sum_{\nu=n}^{N} s_\nu \, f[q_\nu(\lambda)] \, p_\nu(\lambda) = o(1), \qquad n \to \infty.$$

Ceci donne, d'après le raisonnement habituel, que $s_n = o(1)$, toutes les fois que la suite s_n satisfait à la condition de convergence relative à l'intervalle (n, N) défini par (12).

L'hypothèse que toute suite sommable-P soit de même sommable-$P^{(k)}$, revient, quant à la sommabilité-Q, à supposer que toute suite sommable-Q soit de même sommable par les procédés

$$Q^{(k)}(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu [q_\nu(\lambda)]^k \quad \text{pour tout } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Écrite sous cette forme, cette condition est par exemple satisfaite pour les moyennes typiques de Riesz, puisque de

$$\sum_{\lambda_\nu \leqq \lambda} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{\lambda}\right)^k u_\nu = o(1), \quad \lambda \to \infty,$$

pour un $k = k_0$ il résulte l'existence de cette même relation pour tout $k \geqq k_0$, donc en particulier pour $k = nk_0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Dans ce qui vient d'être exposé, l'introduction de la fonction arbitraire s'obtenait moyennant le théorème d'approximation de Weierstrass. Or, en utilisant d'autres théorèmes d'approximation on parvient aux inversions de divers autres procédés particuliers. Ainsi, par exemple, en partant du théorème d'approximation par la suite de fonctions de la forme

$$\left(\frac{1+x}{1+\nu x}\right)^{\varrho}.$$

O. Szász a donné l'inversion du procédé de sommabilité $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu \left(\frac{1+\lambda}{\nu+\lambda}\right)^{\varrho}$, qui, d'ailleurs, peut être ramené à l'inversion de la sommabilité-A.

Mais c'est surtout l'inversion du procédé de la forme générale

$$\Phi(\sigma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu\, \varphi(\sigma\nu), \quad \text{pour } \sigma \to 0, \tag{16}$$

due à N. Wiener, qui fait ressortir la grande différence entre les inversions O et o. Cette inversion fait, en outre, mieux entrevoir les raisons pour lesquelles les inversions o donnaient tant de résistance.

Dans l'inversion du dit procédé l'introduction de la fonction arbitraire repose sur un théorème d'approximation générale, qui représente un des résultats fondamentaux de Wiener dans cette théorie; c'est le théorème suivant:

Lorsque

$$\int_0^{\infty} \varphi(t)\, t^{z-1}\, dt \neq 0 \text{ pour } R(z) = 0 \tag{17}$$

à toute fonction sommable f correspondent deux suites de nombres A_ν et a_ν telles que

$$\int_0^{\infty} \left| f(t) - \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu\, \varphi(a_\nu t) \right| dt < \varepsilon.$$

On voit donc, d'après ce théorème, que l'introduction de la fonction arbitraire f dans (16) exige que la condition (17) soit satisfaite. C'est donc par cette condition nouvelle, de nature transcendente, que les inversions o se distinguent des inversions O.

Pour bien faire ressortir cette différence je formulerai exactement les deux théorèmes inverses correspondant à cette classe particulière de sommabilité.

Théorème O. Soit $\varphi(t)$ non croissant dans $(0, \infty)$ et tel que l'intégrale

$$\int_{\alpha}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt$$

existe; de

$$\Phi(\sigma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(\sigma\nu)\, u_\nu = O(1), \quad \sigma \to 0,$$

il résulte

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu = O(1), \quad n \to \infty$$

toutes les fois que

$$\limsup_{n=\infty} \left| \sum_{\nu=n}^{n'} u_\nu \right| \leqq w(\varepsilon), \quad n \leqq n' \leqq n + \varepsilon n.$$

Théorème *o*. Les conditions du théorème précédent étant remplies avec

$$w(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

de

$$\Phi(\sigma) = o(1), \quad \sigma \to 0,$$

il résultera

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu = o(1), \quad n \to \infty,$$

lorsqu'en outre $\varphi(t)$ satisfait à la condition

$$\int_0^\infty \varphi(t)\, t^{ui-1}\, dt \neq 0$$

pour tout u réel.

De ces deux théorèmes, ainsi que de ce qui a précédé, il ressort non seulement la différence essentielle qui existe entre les inversions O et o, mais encore un point caractéristique général des théorèmes inverses. C'est sur ce point encore que je voudrais, avant de terminer, attirer l'attention, car il permettra peut-être de traîter les théorèmes inverses o dans toute leur généralité. Nous avons vu, en effet, que contrairement aux inversions O, les inversions o des procédés généraux de forme (1) ne peuvent s'effectuer que lorsque les poids sont soumis à certaines conditions supplémentaires, comme c'est le cas de la condition (17) pour le groupe de procédés particuliers où $q_n(\lambda) = \varphi(n/\lambda)$. D'autre part, il est vraisemblable que dans le cas où la relation (1) ne détermine pas complétement les termes s_n, sous l'hypothèse que $P(\lambda)$ et les $p_n(\lambda)$ soient donnés, l'inversion ne pourra s'effectuer. En d'autres termes, on ne pourra effectuer l'inversion des procédés dont la relation (1), considérée comme un système infini d'équations par rapport aux inconnues s_n, ne détermine pas univoquément ces inconnues. Il est vrai, qu'on peut avoir une infinité de solutions s_n différentes, qui tendent toutes vers une même limite. Mais, en considérant les procédés particuliers dont on peut effectuer l'inversion, ainsi que les conditions auxquelles doivent satisfaire ces procédés pour que l'inversion puisse s'effectuer, on voit que dans tous ces cas les éléments s_n sont déterminés univoquément par la relation (1).

On peut donc en conclure qu'une condition suffisante pour que l'inversion d'un procédé de sommabilité puisse s'effectuer est que les termes s_n soient déterminés univoquément par la relation (1).

Supposition qu'il reste encore à prouver.