Jovan Karamata

Un théorème sur les intégrales trigonométriques

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 5, 147--149

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121268

tedy 9krát menší než hranice zbytku Everettovy formule. Tak na př. při kroku $h = 0{,}001$ v zmíněné 12místné Hayashiově tabulce funkce e^x, $(x < 3)$ bude

$$|\,Z_3(x)\,| < \tfrac{20}{384} \,.\, 10^{-12},$$

tedy plně vyhovující, kdežto formule 3. řádu o středních diferencích již nikoliv.

Ještě markantnější jest to, užijeme-li mnohočlenu, jehož také druhé derivace se rovnají resp. $f''(a)$, $f''(a + h)$ pro $x = a$ a pro $x = a + h$:

$$\begin{aligned} f(a + nh) = {} & m^3 (10 - 15m + 6m^2)\, f_0 + n^3 (10 - 15n + 6n^2)\, f_1 \\ & + hm^3 (4 - 7m + 3m^2)\, f'_0 - hn^3 (4 - 7n + 3n^2)\, f'_1 \qquad (4) \\ & + \tfrac{1}{2}h^2m^3n^2\, f''_0 + \tfrac{1}{2}h^2n^3m^2\, f''_1 + Z_5(x), \end{aligned}$$

$$x = a + nh,\ m = 1 - n,\ Z_5(x) = \tfrac{1}{720}n^3 (n - 1)^3\, h^6\, f^{VI}(a + \Theta h),$$

$$|\,Z_5(x)\,| < \tfrac{1}{46080}h^6\, f^{VI}(a + \Theta h), \qquad 0 < \Theta < 1,$$

proti zbytku

$$|\,\overline{Z}_5(x)\,| < \tfrac{5}{1024}h^6\, f^{VI}(a + \Theta h), \qquad 0 < \Theta < 1$$

interpolační formule pátého řádu o středních diferencích. Tak na př. při interpolaci v 10 místné části zmíněné tabulky funkce e^x $(3 \leqq x \leqq 10)$ o kroku $h = 0{,}01$ byl by zbytek podle vzorce (4)

$$|\,Z_5(x)\,| < \tfrac{1200}{46080} \,.\, 10^{-12},$$

tedy přesnost vyhovující, proti nevyhovující přesnosti

$$|\,\overline{Z}_5(x)\,| < 60 \,.\, 10^{-12}$$

interpolační formule 5. řádu o středních diferencích.

Zajímavé jest, že integrací interpolačních vzorců tohoto druhu obdržíme kvadraturní formule, které uveřejnil bez důkazu prof. K. Petr v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky, 1915, str. 454. Tak na př. integrací vzorce (4) obdržíme

$$\int_a^{a+h} f(x)\, dx = \tfrac{1}{2}h\, (f_0 + f_1) + \tfrac{1}{10}h^2\, (f'_0 - f'_1) + \tfrac{1}{120}h^3\, (f''_0 + f''_1) + Z_5$$

$$Z_5 = \tfrac{1}{100800}h^7\, f^{VI}(a + \Theta h), \qquad 0 < \Theta < 1$$

za předpokladu spojitosti $f^{VI}(x)$ v oboru $(a, a + h)$.

Un théorème sur les intégrales trigonométriques.

J. Karamata, Beograd.

Dans la Note „Weiterführung der N. Wienerschen Methode“ (Math. Zeitsch. 38, 701—708) j'ai démontré un théorème (le th. B') concernant les intégrales de Laplace $\int_0^\infty e^{-st} A(t)\, dt$. L'objet de cette comunication est de remarquer qu'il peut s'énoncer indépendamment de ces intégrales; car en suivant la même marche de démonstration l'on parvient au th. suivant qui le contient:

Th. 1. Soit $\qquad A(x) = O(1), \quad x \to \infty, \qquad (1)$

donc

$$c(x) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos xt}{t^2} A(t)\, dt$$

converge pour tout x; lorsque

$$c''(x) \text{ existe pour tout } |x| \leq 4\lambda$$

et satisfait à la condition

$$\frac{1}{\pi}\int_{-4\lambda}^{+4\lambda} \frac{\sin xt}{t} c''(t)\, dt \to c''(0), \quad x \to \infty,$$

on a

$$\limsup_{x=\infty} \left| \int_0^x A(t)\, dt - c''(0) \right| \leq \frac{1}{\lambda}\{Mm\,(\delta\lambda) + M_1 m_1\,(\delta\lambda)\},$$

$m(x)$ et $m_1(x)$ étant indépendants de $A(t)$, tel que $m(x) \to 0$, $(x \to -\infty)$, M étant la borne et M_1 la lim sup de $|A(t)|$ et δ réel quelconque.

La démonstration de ce th. repose sur le

Lemme. Sous les hypothèses du th. 1 on a

$$\int_0^\infty A(u)\, du \int_{-x}^{+x} \lambda \left\{\frac{\sin \lambda\,(v-u)}{\lambda\,(v-u)}\right\}^4 dv = \int_{-4\lambda}^{+4\lambda} \frac{\sin xt}{t} k\left(\frac{|t|}{4\lambda}\right) c''(t)\, dt, \qquad (2)$$

où $k(x)$ est égal à $(\frac{2}{3} - 4x^2 + 4x^3)$ pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, à $\frac{4}{3}(1-x)^3$ pour $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ et à zéro pour $x \geq 1$.

La démonstration de ce lemme étant semblable à celle du lemme 2 de la Note citée, je ne ferai que l'esquisser. — Posons

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-st} A(t)\, dt,$$

intégrale qui d'après (1) converge pour $\Re(s) > 0$, et considérons l'expression

$$J_\sigma(x) = \frac{1}{2^4\lambda^3}\int_{-4}^{+x} dv \int_{-\lambda}^{+\lambda} \cdots \int e^{vti}\, G(\sigma + ti)\, dt_1 dt_2 dt_3 dt_4,$$

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4.$$

On a 1°, en posant

$$\mathrm{K}(t) = \mathrm{k}\left(\frac{|t|}{4\lambda}\right)\frac{\sin xt}{t},$$

$$\mathrm{J}_\sigma(x) = \frac{1}{(2\lambda)^3}\int_{-\lambda}^{+\lambda}\cdots\int\frac{\sin xt}{t}\,\mathrm{G}(\sigma + ti)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3\mathrm{d}t_4 =$$

$$= \int_{-4\lambda}^{+4\lambda}\mathrm{K}(t)\,\mathrm{G}(\sigma + it)\,\mathrm{d}t = \int_{-4\lambda}^{+4\lambda}\mathrm{K}''(t)\,\mathrm{d}t\int_0^t\mathrm{d}u\int_{-u}^{+u}\mathrm{G}(\sigma + vi)\,\mathrm{d}v =$$

$$= \int_{-4\lambda}^{+4\lambda}\mathrm{K}''(t)\,\mathrm{d}t\int_0^\infty e^{-\sigma\tau}\frac{1 - \cos t\tau}{\tau^2}\,\mathrm{A}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \to \int_{-4\lambda}^{+4\lambda}\mathrm{K}''(t)\,\mathrm{c}(t)\,\mathrm{d}t = \tag{3}$$

$$= \int_{-4\lambda}^{+4\lambda}\mathrm{K}(t)\,\mathrm{c}''(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-4\lambda}^{+4\lambda}\frac{\sin xt}{t}\,\mathrm{k}\left(\frac{|t|}{4\lambda}\right)\mathrm{c}''(t)\,\mathrm{d}t,\quad \sigma \to 0.$$

2°

$$\mathrm{J}_\sigma(x) = \int_0^\infty e^{-\sigma u}\,\mathrm{A}(u)\,\mathrm{d}u\int_{-x}^{+x}\frac{\mathrm{d}v}{2^4\lambda^3}\int_{-\lambda}^{+\lambda}\cdots\int e^{t(v-u)i}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3\mathrm{d}t_4 =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\sigma u}\,\mathrm{A}(u)\,\mathrm{d}u\int_{-x}^{+x}\lambda\left\{\frac{\sin\lambda(v-u)}{\lambda\,(v-u)}\right\}^4\mathrm{d}v \to \tag{4}$$

$$\to \int_0^\infty\mathrm{A}(u)\,\mathrm{d}u\int_{-x}^{+x}\lambda\left\{\frac{\sin\lambda\,(v-u)}{\lambda\,(v-u)}\right\}^4\mathrm{d}v,\quad \sigma \to 0.$$

De (3) et (4) résulte la relation (2). — En partant de (2) on démontre le th. 1 en refaisant la démonstration du th. *B*' de la Note citée.

Dyadické rozvoje a Hausdorffova míra.

Dr. *Vladimír Knichal,* Praha.

Budiž $0 \leqq \Theta < 1$ a $\Theta = 0, i_1 i_2 i_3 \ldots$ dyadický rozvoj tohoto čísla normovaný požadavkem, aby posloupnost $i_1, i_2, i_3, \ldots$ obsahovala nekonečně mnoho nul. Budiž dále $p(\Theta, n)$ počet nul vyskytujících se v systému $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$ $(n \geqq 1)$.

Přednášející uvedl napřed dřívější výsledky pp. Borela, Hausdorffa, Hardy-ho a Littlewooda a Khintchina týkající se odhadu funkce $p(\Theta, n)$ pro velká n a pro skoro všechna Θ intervalu $\langle 0, 1)$. Pak zavedl pojem Hausdorffovy míry: Budiž M jisté