Lubomir Tchakaloff

Die Mittelwertsätze der Analysis

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 5, 80--93

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121265

Die Mittelwertsätze der Analysis.

Von *Lubomir Tchakaloff*, Sofia.

Sehr geehrte Anwesende!

Das Ziel meines Vortrages ist, über einige neuere Ergebnisse und Methoden zu berichten, welche die Mittelwertsätze der Analysis im weitesten Sinne des Wortes betreffen. Was ist zunächst ein Mittelwertsatz? Ich glaube diese Frage durch folgende Definition beantworten zu können. Unter einem Mittelwertsatz, angewandt auf die Funktion $f(x)$, verstehen wir eine Formel, welche gestattet, einen gewissen Ausdruck, der von den Funktionswerten dieser Funktion in bestimmter Weise abhängt, durch einen einfacheren, aber gewissermaßen unbestimmten Ausdruck zu ersetzen. In den meisten Fällen enthält dieser letzte Ausdruck einen unbestimmten Argumentswert ξ, von dem man nur weiß, daß er zwischen gewissen Grenzen eingeschlossen ist. Unserer Definition gemäß kann man nicht nur die klassischen Mittelwertsätze der Analysis, sondern auch z. B. die Taylorsche Formel mit Restglied als einen Mittelwertsatz ansehen, und dasselbe gilt auch von vielen Formeln der genäherten Quadratur und der Interpolationstheorie.

Um den Grundgedanken meiner Ausführungen deutlicher hervortreten zu lassen, will ich mich vorläufig auf den Mittelwertsatz der Differentialrechnung (théorème des accroissements finis) beschränken. Er drückt sich durch die Formel aus

$$f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(\xi) \quad (a < \xi < b), \tag{1}$$

wobei von der Funktion $f(x)$ vorausgesetzt wird, daß sie im abgeschlossenen Intervall (a, b) reell und stetig ist und innerhalb desselben überall eine bestimmte Ableitung $f'(x)$ besitzt. Wegen seiner einfachen geometrischen Deutung ist dieser Satz so naheliegend, daß man seine Entdeckung kaum mit dem Namen eines Mathematikers verbinden könnte. Es ist nicht meine Absicht, über die Entstehung und die Bedeutung dieses Satzes hier zu berichten. Ich möchte nur beiläufig bemerken, daß man gewöhnlich geneigt ist (bei der heute üblichen Darstellung der Grundlehren der Analysis) zu glauben, daß die Bedeutung dieses grundlegenden Mittelwertsatzes schon von den Begründern der Infinitesimalrechnung erkannt worden ist. In Wirklichkeit spielt er in der älteren mathematischen Literatur keine wesentliche Rolle und er wird auch in den neueren Lehrbüchern sehr oft falsch formuliert oder bewiesen;

ja sogar ein so vortreffliches Lehrbuch, wie der berühmte Cours d'Analyse de l'École Polytechnique von C. Jordan, der sich bekanntlich durch moderne Strenge der Darstellung auszeichnet, enthält in seiner ersten Auflage einen ganz unbefriedigenden Beweis dieses Satzes. Dies alles berechtigt uns, den Mittelwertsatz der Differentialrechnung als einen Satz der modernen Analysis anzusehen.

Aus geometrischen Gründen ist es ziemlich evident, daß die Lage zwischen a und b der unbestimmten Zahl ξ in Formel (1) nicht weiter präzisiert werden kann, wenn von der reellen Funktion $f(x)$ nur Stetigkeit und Differenzierbarkeit vorausgesetzt wird. Wie aus meinen späteren Ausführungen folgt, gilt dasselbe auch dann, wenn $f(x)$ zur Menge der reellen Polynome gehört; es läßt sich mit anderen Worten einer beliebigen Zahl ξ_0 zwischen a und b stets ein reelles Polynom $f(x)$ derart zuordnen, daß die Gleichung (1) nur für $\xi = \xi_0$ befriedigt wird. Ganz anders verhält sich aber die Sache, falls $f(x)$ einer engeren Klasse von Polynomen angehört. Bedeutet z. B. $f(x)$ ein Polynom zweiten Grades, so besteht Gleichung (1) nach einer bekannten Eigenschaft der Parabel, nur wenn ξ mit der Mitte des Intervalls (a, b) übereinstimmt. Schon diese einfache Tatsache gibt Anlaß zur Vermutung, daß man den Spielraum der Zahl ξ wesentlich verengern kann, wenn es sich um die Anwendung der Formel (1) auf reelle Polynome von gegebenem Grade handelt. Herr D. Pompeiu war der erste, der diese Vermutung für die Polynome dritten Grades bestätigte; er hat nämlich gezeigt[1]), daß für solche Polynome $f(x)$ die Zahl ξ in einem Intervall mit dem Mittelpunkt $\frac{1}{2}(a+b)$ und mit der Länge $\frac{b-a}{\sqrt{3}}$ eingeschlossen werden kann und daß kein Teilintervall von ihm die erwähnte Eigenschaft besitzt. Mit Recht können wir also dieses Intervall ein Minimumintervall in bezug auf die Klasse der reellen Polynome dritten Grades nennen.

Bezeichnen wir mit C_k die Klasse der reellen Polynome höchstens vom Grade k, so entsteht natürlich die Frage, ob es auch für eine beliebige Klasse C_k ein entsprechendes Minimumintervall I_k gibt und wie kann man es effektiv bestimmen? Ein Minimumintervall soll dabei mit folgenden Eigenschaften behaftet sein: I. einem beliebigen Polynom $f(x)$ der Klasse C_k entspricht mindestens ein ξ des Intervalls I_k, das der Gleichung (1) genügt, und II. keinem echten Teilintervall von I_k kommt die Eigenschaft I zu. Durch spezielle Methoden, die sich nicht unmittelbar auf Polynomklassen

---

1) D. Pompeiu, Sur le théorème des accroissements finis. Annales scientifiques de l'Université de Jassy, t. 15 (1928), fasc. 3—4, p. 335.

beliebigen Grades anwenden lassen, haben die Herren E. Abason[2]) und P. Montel[3]) diese Frage für die Klassen $C_4, C_5, \ldots, C_{10}$ beantwortet. Außerdem hat Herr Montel einen Existenzbeweis für die Minimumintervalle I_k erbracht, indem er gezeigt hat, daß die Länge eines solchen Intervalls stets kleiner als $b - a$ ist und bei unbeschränkt wachsendem k gegen diesen Grenzwert konvergiert.

In meiner ersten Publikation[4]) über diesen Gegenstand ist es mir gelungen, die Minimumintervalle I_k für jedes ganze positive k effektiv anzugeben. Das Ergebnis ist folgendes: bedeutet n die größte ganze Zahl, die in $\frac{1}{2}(k + 1)$ enthalten ist, und α_n die größte Nullstelle des n-ten Legendreschen Polynoms

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n,$$

so stellt das Intervall mit dem Mittelpunkt $\frac{1}{2}(a + b)$ und mit der Länge $(b - a)\,\alpha_n$ ein Minimumintervall dar in bezug auf die Klasse C_k. Später[5]) habe ich erkannt, daß es sogar unendlich viele Minimumintervalle in bezug auf die Polynomklasse C_k gibt, wenn k ungerade ist ($k = 2n - 1$); für $a = -1$, $b = 1$, was keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit ist, stimmen nämlich die Endpunkte eines solchen Intervalls mit den extremen Nullstellen eines Polynoms der Gestalt

$$P_n(x) + cP_{n-1}(x)$$

überein, wo P_n und P_{n-1} zwei aufeinanderfolgende Legendresche Polynome sind und c eine beliebige reelle Konstante bedeutet. Zum Beweise dieser Ergebnisse ordne ich einem beliebigen Polynom $f(x)$ der Klasse C_k das Polynom

$$\varphi(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

zu und betrachte die Klasse D_{k-1} der auf diese Weise entstehenden reellen Polynome $\varphi(x)$ $(k - 1)$-ten oder niederen Grades. Offenbar besteht die Klasse D_{k-1} aus denjenigen Polynomen $\varphi(x)$ der Klasse C_{k-1}, welche der Bedingung

---

[2]) E. Abason, Sur le théorème des accroissements finis. Bulletin de l'École polytechnique de Bucarest, I-ère année (1930), p. p. 4, 81, 149; II-ème année (1931), p. 5.

[3]) P. Montel, Sur les zéros des dérivées des fonctions analytiques. Bulletin de la Société mathématique de France, t. 58 (1930), p. 105.

[4]) L. Tchakaloff, Sur le théorème des accroissements finis. Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 192 (1931), p. 32.

[5]) L. Tchakaloff, Sur l'intervalle de variabilité de ξ dans la formule $\int_a^b \varphi(x)\, p(x)\, dx = \varphi(\xi) \int_a^b p(x)\, dx$. Comptes rendus, t. 192 (1931), p. 330.

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{2}$$

genügen. Dadurch wird unsere Aufgabe darauf zurückgeführt, ein Intervall I_k derart zu konstruieren, daß in ihm ein beliebiges Polynom der Klasse D_{k-1} mindestens einmal verschwindet, während kein Teilintervall von I_k die erwähnte Eigenschaft besitzt. Ist nun k eine gerade Zahl ($k = 2n$), so lassen sich n verschiedene Argumentswerte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und ebensoviele Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ derart bestimmen, daß die letzte Bedingung mit

$$A_1\,\varphi(x_1) + A_2\,\varphi(x_2) + \ldots + A_n\,\varphi(x_n) = 0 \tag{2'}$$

äquivalent ist; die Größen x_r und A_r sollen dabei nur von der Klasse $D_{k-1} \equiv D_{2n-1}$, nicht aber von ihren einzelnen Repräsentanten abhängen. Es stellt sich nun heraus, daß die x_r reell sind und die Koeffizienten A_r positiv gewählt werden können. Aus Gleichung (2′) entnimmt man daher sofort, daß $\varphi(x)$ für mindestens ein x des Intervalls (x_1, x_n) verschwinden muß, wenn x_1 die kleinste und x_n die größte der Zahlen x_r bedeutet. Man kann ferner ein Polynom der Klasse D_{2n-1} konstruieren, das nur eine reelle, beliebig nahe an x_1 bzw. x_n gelegene Nullstelle hat. Das Intervall (x_1, x_n) besitzt also alle Eigenschaften eines Minimumintervalls.

Die eben geschilderte Methode zur Aufsuchung von Minimumintervallen in bezug auf eine bestimmte Polynomklasse C_k ist verschiedener Erweiterungen fähig. Man kann zunächst die Formel (1) durch eine viel allgemeinere ersetzen. Es sei $\psi(x)$ eine monoton wachsende Funktion der reellen Veränderlichen x, die so beschaffen ist, daß die $k + 1$ Stieltjesschen Integrale

$$I_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu\,\mathrm{d}\psi(x), \quad \nu = 0, 1, \ldots, k$$

konvergieren. Gehört $f(x)$ zur Polynomklasse C_k, so gibt es mindestens ein reelles ξ, das der Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\psi = f(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\psi \tag{3}$$

genügt, und unsere Aufgabe besteht darin, die Lage der Zahl ξ in Formel (3) möglichst genau zu präzisieren. Es liegt dabei keineswegs in der Natur der Aufgabe, diese Zahl notwendig in ein (abgeschlossenes oder offenes) Intervall einschließen zu suchen. Ich spreche daher von nun an nicht von Minimumintervallen sondern von Minimalmengen. Unter einer Minimalmenge in bezug auf die Klasse C_k verstehe ich nämlich eine Menge M_k von reellen Zahlen, die durch folgende zwei Eigenschaften charakterisiert ist:

I. einem beliebigen Polynom $f(x)$ der Klasse C_k entspricht mindestens eine Zahl ξ der Menge M_k, welche Gleichung (3) befriedigt; II. keiner echten Teilmenge von M_k kommt die Eigenschaft I zu. Die zweite Bedingung ist eine Minimalforderung; sie besagt, daß einer beliebigen Zahl ξ_0 aus M_k sich stets (mindestens) ein Polynom $f(x)$ der Klasse C_k derart zuordnen läßt, daß Gleichung (3) für kein von ξ_0 verschiedenes und der Menge M_k angehöriges ξ befriedigt werden kann. Diese Definition einer Minimalmenge M_k läßt sich in eine andere, für unseren Zweck bequemere Form einkleiden. Betrachten wir nämlich die Gesamtheit D_k aller Polynome $\varphi(x)$ der Klasse C_k, die der Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, d\psi = 0 \tag{4}$$

genügen, so können wir genau so wie oben nach einer Minimalmenge $\overline{M}_k$ fragen, welche so beschaffen ist, daß I. jedes Polynom der Klasse D_k mindestens einmal in $\overline{M}_k$ verschwindet, und II. keine echte Teilmenge von $\overline{M}_k$ der Forderung I genügt. Es läßt sich nun durch einfache Überlegungen zeigen, daß eine Minimalmenge $\overline{M}_k$ in bezug auf die Klasse D_k auch eine Minimalmenge M_k in bezug auf die Klasse C_k darstellt und umgekehrt; anders ausgedrückt, ist bei festem k die Menge der Minimalmengen $\overline{M}_k$ identisch mit derjenigen der Minimalmengen M_k.

Es ist natürlich von vornherein noch nicht klar, ob es überhaupt Minimalmengen gibt, da bekanntlich nicht jede Minimumaufgabe eine Lösung besitzt. Die von mir für den Fall des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung skizzierte Beweismethode, geeignet modifiziert, gestattet die Frage nach Existenz, Anzahl und Struktur der Minimalmengen M_k vollständig zu beantworten. Dabei spielen die sogenannten Tschebyscheffschen Polynome

$$P_0, P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x) \qquad (n = [\tfrac{1}{2}k] + 1),$$

welche der monoton wachsenden Funktion $\psi(x)$ entsprechen, eine grundlegende Rolle. Das $(r + 1)$-te Glied $P_r(x)$ dieser Tschebyscheffschen Kette stellt ein reelles Polynom genau r-ten Grades dar, das durch die Orthogonalitätseigenschaften

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^\nu P_r(x)\, d\psi = 0, \quad \nu < r, \quad \nu + r \leqq k$$

im wesentlichen vollständig bestimmt ist. Es werden außerdem bei den Beweisen unserer allgemeinen Sätze zwei Bemerkungen benutzt, die sich fast unmittelbar aus der Definition der Minimalmengen ergeben und folgendermaßen lauten:

a) Sind M und M' zwei Minimalmengen in bezug auf C_k und ist M eine Teilmenge von M', so sind M und M' identisch.

b) Hat das Polynom $\varphi(x)$ der Klasse D_k nur eine reelle Nullstelle ξ, so gehört die Zahl ξ einer beliebigen Minimalmenge M_k.

Es ist mir unmöglich, hier auf die Einzelheiten meiner Beweismethode einzugehen. Ich bemerke nur, daß die Ergebnisse sich ganz verschieden gestalten, je nachdem die ganze Zahl k gerade oder ungerade ausfällt.

Ist zunächst k ungerade und größer als 3, also $k = 2n - 1$, $n > 2$, so gibt es eine einzige Minimalmenge M_{2n-1}, welche mit dem offenen Intervall $x_1 < x < x_n$ übereinstimmt, wobei x_1 und x_n die extremen Nullstellen des Tschebyscheffschen Polynoms $P_n(x)$ bedeuten. Für $k = 3$ gibt es zwei Minimalmengen; dies sind nämlich die beiden halboffenen Intervalle $x_1 \leqq x < x_2$ und $x_1 < x \leqq x_2$, deren Endpunkte Nullstellen des Polynoms $P_2(x)$ sind. Es gibt schließlich nur eine Minimalmenge M_1 in bezug auf die Klasse C_1; sie enthält nämlich als einziges Element die Nullstelle von $P_1(x)$.

Bei geradem $k > 2$ gibt es unendlich viele Minimalmengen M_k, die lauter offene Intervalle darstellen. Setzt man $k = 2n - 2$, so bildet das endliche Intervall $\alpha < x < \beta$ dann und nur dann eine Minimalmenge in bezug auf die Klasse C_{2n-2}, wenn seine Endpunkte die extremen Nullstellen eines Polynoms der Gestalt $P_n(x) + c\,P_{n-1}(x)$ darstellen, wobei c eine ganz beliebige reelle Zahl bedeutet. Damit sind aber noch nicht alle Minimalmengen in bezug auf die Klasse C_{2n-2} erschöpft. Es gibt nämlich zwei unendliche offene Intervalle

$$\alpha' < x < \infty \text{ und } -\infty < x < \beta',$$

die ebenfalls Minimalmengen darstellen; der Anfangspunkt α' des ersten bzw. der Endpunkt β' des zweiten stimmt mit der kleinsten bzw. mit der größten Nullstelle des Polynoms $P_{n-1}(x)$ überein.

Was die Minimalmengen M_2 betrifft, so haben sie bedeutend kompliziertere Struktur. Um eine beliebige solche Menge zu konstruieren, bezeichne man mit α_0 die Nullstelle des Polynoms $P_1(x)$ und verteile irgendwie alle reellen Zahlen kleiner als α_0 in zwei komplementäre Mengen A und A'. Durch die Beziehung

$$(b - \alpha_0)(\alpha_0 - a') = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \alpha_0)^2 \, d\psi : \int_{-\infty}^{\infty} d\psi$$

entspricht einer beliebigen Zahl a' von A' eine reelle

Zahl b größer als α_0. Ist B die Menge der so entstehenden Zahlen b, so stellt die Vereinigungsmenge $A + (\alpha_0) + B$ eine Minimalmenge M_2 dar und zwar die allgemeinste.[6])

Damit ist die Frage nach Existenz und Struktur der Minimalmengen M_k für ein beliebiges k vollständig erledigt.

Unter den zahlreichen Anwendungen dieser allgemeinen Ergebnisse möchte ich hier kurz die wichtigsten besprechen.

1. Wird die Funktion $\psi(x)$ durch die Festsetzungen

$$\begin{aligned} \psi(x) &= a \text{ für } x < a, \\ \psi(x) &= x \text{ für } a \leqq x \leqq b, \\ \psi(x) &= b \text{ für } x > b \end{aligned}$$

definiert, so geht Gleichung (4) in $\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0$ über und das n-te Tschebyscheffsche Polynom stimmt im wesentlichen mit dem n-ten auf das Intervall (a, b) bezogenen Legendreschen Polynom

$$P_n(x) = \lambda_n \frac{d^n}{dx^n} \{(x - a)(x - b)\}^n$$

überein. Die Klasse D_k, d. h. die Gesamtheit der reellen Polynome $\varphi(x)$ k-ten oder niederen Grades, die der Bedingung $\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0$ genügen, ist identisch mit der Menge der Polynome der Gestalt

$$\varphi(x) = (b - a) f'(x) - f(b) + f(a),$$

wo $f(x)$ alle Polynome der Klasse C_{k+1} durchläuft. Eine Minimalmenge M_k kann in diesem Falle als eine Zahlenmenge charakterisiert werden, die folgenden Bedingungen genügt: I. einem beliebigen reellen Polynom $f(x)$ $(k + 1)$-ten oder niederen Grades entspricht ein ξ, das der Mittelwertsformel (1) genügt, und II. einer beliebigen Zahl ξ_0 der Menge M_k läßt sich stets ein reelles Polynom $f(x)$ höchstens $(k + 1)$-ten Grades derart zuordnen, daß Formel (1) für keine von ξ_0 verschiedene Zahl ξ der Menge M_k befriedigt werden kann. Unsere allgemeinen Sätze geben eine genaue Auskunft über die Struktur der Minimalmengen M_k für die Zahl ξ des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, angewandt auf die Polynomklasse C_{k+1}.

2. Um entsprechende Sätze von der Taylorschen Formel zu gewinnen, definieren wir die wachsende Funktion $\psi(x)$ durch die Gleichungen

---

[6]) Die ausführlichen Beweise dieser Sätze enthält meine in Acta Mathematica, Bd. 63 (1934), S. 77 erschienene Abhandlung „Sur la structure des ensembles linéaires définis par une certaine propriété minimale".

$$\psi(x) = -\frac{1}{m}(b-a)^m \text{ für } x < a,$$

$$\psi(x) = -\frac{1}{m}(b-x)^m \text{ für } a \leqq x \leqq b,$$

$$\psi(x) = 0 \text{ für } x > b,$$

wo m eine natürliche Zahl bedeutet. Bei dieser Wahl von $\psi(x)$ geht Gleichung (4) in $\int\limits_a^b (b-x)^{m-1}\,\varphi(x)\,dx = 0$ über und die Klasse D_k ist identisch, wie eine einfache Überlegung zeigt, mit der Klasse der Polynome der Form

$$\varphi(x) = -f(b) + \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(b-a)^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(a) + \frac{(b-a)^m}{m!} f^{(m)}(x),$$

wo $f(x)$ alle Polynome der Klasse C_{m+k} durchläuft. Was die Tschebyscheffschen Polynome $P_r(x)$ betrifft, so stimmen sie mit den hypergeometrischen Polynomen überein, die durch die Formel

$$P_r(x) = (x-b)^{-m+1} \frac{d^r}{dx^r}\{(x-a)^r (x-b)^{r+m-1}\}$$

definiert sind. Eine Minimalmenge M_k kann in diesem Falle durch folgende zwei Eigenschaften charakterisiert werden: I. jedem reellen Polynom $f(x)$ höchstens vom Grade $m+k$ entspricht ein ξ der Menge M_k, das der Taylorschen Formel

$$f(b) = \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(b-a)^r}{r!} f^{(r)}(a) + \frac{(b-a)^m}{m!} f^{(m)}(\xi) \tag{5}$$

genügt; II. einer beliebigen Zahl ξ_0 der Menge M_k läßt sich stets ein reelles Polynom $f(x)$ $(m+k)$-ten oder niederen Grades derart zuordnen, daß Formel (5) für kein von ξ_0 verschiedenes ξ der Menge M_k befriedigt werden kann.

3. Unsere allgemeinen Sätze lassen sich mit Erfolg auf eine Mittelwertformel anwenden, welche den sogenannten Newtonschen Differenzenquotienten betrifft. Es seien $m+1$ verschiedene reelle Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_m$ und eine Funktion $f(x)$ gegeben. Unter dem Newtonschen Differenzenquotienten der Funktionswerte $f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_m)$ verstehen wir den in der Interpolationstheorie oft auftretenden Ausdruck

$$\sum_{r=0}^{m} \frac{f(a_r)}{P'(a_r)},$$

wobei $P(x)$ das Polynom

$$P(x) = (x - a_0)(x - a_1) \ldots (x - a_m)$$

bedeutet. Wir denken uns die Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_m$ der Größe nach geordnet. Ist $f(x)$ reell und stetig im abgeschlossenen Intervall (a_0, a_m) und besitzt sie innerhalb desselben Ableitungen bis zur m-ten Ordnung, so gilt bekanntlich für ein passend gewähltes ξ zwischen a_0 und a_m die Formel

$$\sum_{r=0}^{m} \frac{f(a_r)}{P'(a_r)} = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!} \qquad (a_0 < \xi < a_m).$$

Um die Lage von ξ genauer zu präzisieren, wenn $f(x)$ ein reelles Polynom bedeutet, wollen wir uns einer Integraldarstellung des Newtonschen Differenzenquotienten bedienen, die an und für sich eine gewisse Beachtung verdienen dürfte. Wir stellen uns nämlich zur Aufgabe, $m + 1$ nicht sämtlich verschwindende Konstanten $A_0, A_1, \ldots, A_m$ und eine im Intervall $a_0 \leqq x \leqq a_m$ stetige Funktion $u_m(x)$ derart zu bestimmen, daß die Gleichung

$$\sum_{r=0}^{m} A_r f(a_r) = \int_{a_0}^{a_m} u_m(x) f^{(m)}(x)\, \mathrm{d}x \tag{6}$$

identisch erfüllt sein soll für jede mit stetiger m-ten Ableitung versehene Funktion $f(x)$. Abgesehen von einem Proportionalitätsfaktor, besitzt diese Aufgabe eine ganz bestimmte Lösung. Man erhält für die Koeffizienten A_r die Werte

$$A_r = \frac{1}{P'(a_r)}, \qquad r = 0, 1, \ldots, m,$$

so daß die linke Seite von (6) genau mit dem Newtonschen Differenzenquotienten der Funktionswerte $f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_m)$ übereinstimmt. Was die stetige Funktion $f(x)$ betrifft, besteht ihre Darstellungskurve aus m verschiedenen Parabelbogen $(m - 1)$-ter Ordnung, die den m Teilintervallen (a_{r-1}, a_r) entsprechen. Man hat nämlich

$$u_m(x) = \sum_{\nu=r}^{m} \frac{1}{(m-1)!} \frac{(a_\nu - x)^{m-1}}{P'(a_\nu)} \quad \text{für } a_{r-1} \leqq x \leqq a_r.$$

Es ist wichtig dabei zu bemerken, daß die so definierte Funktion $u_m(x)$ innerhalb des Intervalls (a_0, a_m) positiv ist. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung kann also die rechte Seite von (6) durch

$$f^{(m)}(\xi) \int_{a_0}^{a_m} u_m(x)\, \mathrm{d}x \qquad (a_0 < \xi < a_m)$$

ersetzt werden:

$$\int_{a_0}^{a_m} u_m(x)\, f^{(m)}(x)\, \mathrm{d}x = f^{(m)}(\xi) \int_{a_0}^{a_m} u_m(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{m!}\, f^{(m)}(\xi).$$

Gehört nun $f(x)$ zur Klasse C_{m+k}, die aus allen reellen Polynomen $(m+k)$-ten oder niederen Grades besteht, so durchläuft die m-te Ableitung $f^{(m)}(x)$ restlos die Klasse C_k, und es genügt, um unsere allgemeinen Sätze auf die letzte Formel anwenden zu können, die wachsende Funktion $\psi(x)$ durch das Integral

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} u_m(t)\, \mathrm{d}t$$

zu definieren, wo $u_m(t) = 0$ außerhalb des Intervalls (a_0, a_m) gesetzt ist.

Auf diese Weise gelangt man auch zu entsprechenden Ergebnissen über den Spielraum der unbestimmten Zahl ξ, die in dem Restglied der Lagrangeschen Interpolationsformel vorkommt.

4. Als letzte Anwendung betrachten wir die Gesamtheit Δ_n der reellen trigonometrischen Polynome n-ter Ordnung ohne konstantes Glied:

$$T(\Theta) = a_1 \cos \Theta + b_1 \sin \Theta + \ldots + a_n \cos n\Theta + b_n \sin n\Theta.$$

Wegen $\int_0^{2\pi} T(\Theta)\, \mathrm{d}\Theta = 0$ verschwindet ein solches Polynom mindestens für ein Θ zwischen 0 und 2π. Ähnlich wie oben wollen wir hier unter einer Minimalmenge E_n in bezug auf die Klasse Δ_n eine Teilmenge des Intervalls $0 \leqq \Theta < 2\pi$ verstehen, die den folgenden zwei Bedingungen unterworfen ist: I. jedes trigonometrische Polynom der Klasse Δ_n verschwindet mindestens einmal in der Menge E_n; II. keiner echten Teilmenge von E_n kommt die Eigenschaft I zu. Man gelangt zur effektiven Bestimmung aller Minimalmengen E_n (bei festem n), indem man sich der Transformation $x = -\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\Theta$ bedient. Dadurch geht ein trigonometrisches Polynom der Klasse Δ_n in eine rationale Funktion der Gestalt $\dfrac{\varphi(x)}{(x^2+1)^n}$ über, wo das reelle algebraische Polynom $\varphi(x)$ höchstens den Grad $2n$ hat und der Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)\, \mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n+1}} = 0$$

genügt. Umgekehrt entspricht einem beliebigen solchen Polynom $\varphi(x)$ die rationale Funktion $\dfrac{\varphi(x)}{(x^2+1)^n}$, die durch die Transformation $x = -\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\Theta$ in ein trigonometrisches Polynom der Klasse Δ_n übergeführt wird. Dadurch wird unsere Aufgabe im wesentlichen darauf zurückgeführt, alle Minimalmengen in bezug auf die Klasse D_{2n} derjenigen reellen Polynome $\varphi(x)$ höchstens vom Grade $2n$ aufzufinden, die der Bedingung $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n+1}} = 0$ genügen. Die vollständige Lösung dieser letzten Aufgabe ist in unseren allgemeinen Sätzen enthalten, wenn man unter $\psi(x)$ die wachsende Funktion $\psi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^{n+1}}$ versteht.

* * *

Wir wollen hier die Liste der Anwendungen, die den speziellen Formen der wachsenden Funktion $\psi(x)$ entsprechen, abbrechen, um zu einer anderen Fragestellung überzugehen, welche die Erweiterung unserer Methode ins Komplexe betrifft.

Bekanntlich läßt sich der Mittelwertsatz der Differentialrechnung nicht unmittelbar auf komplexe Funktionen einer reellen oder komplexen Veränderlichen übertragen. In seiner klassischen Form

$$f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(\xi) \quad (a < \xi < b) \tag{1}$$

ist er im allgemeinen auf solche Funktionen nicht mehr anwendbar, auch dann nicht, wenn man die Forderung fallen läßt, daß ξ auf der Strecke $a \ldots b$ liegen soll. Vor mehr als einem halben Jahrhundert hat G. Darboux[7]) eine Erweiterung des Mittelwertsatzes ins Komplexe gegeben. Ist $f(x)$ eine komplexe Funktion der reellen Veränderlichen x, welche im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetig differenzierbar ist, so besagt die erwähnte Erweiterung von Darboux, daß für mindestens ein ξ zwischen a und b die Ungleichung

$$|\, f(b) - f(a) \,| \leqq (b - a)\, |\, f'(\xi) \,| \tag{7}$$

besteht. Dieser Satz gibt aber keine genauere Auskunft über die Lage von ξ auf der Strecke $a \ldots b$. Was läßt sich nun über das Variabilitätsfeld von ξ aussagen, wenn etwa $f(x)$ ein Polynom gegebenen Grades bedeutet? Wir werden gleich diese Frage näher präzisieren und zugleich verallgemeinern. Führt man die Ableitung $\varphi(x) = f'(x)$ ein, so nimmt die Ungleichung (7) die Gestalt an

$$\left| \int\limits_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqq (b - a)\, |\, \varphi(\xi) \,|. \tag{8}$$

[7]) G. Darboux, Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable. Journal de mathématiques pures et appliquées, 3-ème série, t. 2 (1876), p. 291.

Da es dieselbe Mühe macht, wollen wir uns im folgenden mit der allgemeineren Ungleichung

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, d\psi(x)\right| \leqq |\varphi(\xi)| \int_{-\infty}^{\infty} d\psi(x) \tag{9}$$

beschäftigen, wobei wir wiederum unter $\psi(x)$ eine nicht abnehmende monotone Funktion der reellen Veränderlichen x verstehen, für welche die $k+1$ Stieltjesschen Integralle

$$I_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu\, d\psi$$

konvergieren. Es bedeute C'_k die Klasse der Polynome mit beliebigen komplexen Koeffizienten und höchstens vom Grade k. Wir stellen uns hier die Aufgabe, der Polynomklasse C'_k eine Menge M'_k von reellen oder komplexen Zahlen mit folgenden Eigenschaften zuzuordnen: I. jedem Polynom $\varphi(x)$ von C'_k entspricht mindestens eine Zahl ξ von M'_k, die der Ungleichung (9) genügt, und II. keiner echten Teilmenge von M'_k kommt die Eigenschaft I zu. Eine derartige Menge nennen wir eine M i n i m a l m e n g e z w e i t e r A r t in bezug auf die Klasse C'_k. Diese Definition der Menge M'_k unterscheidet sich von derjenigen einer Minimalmenge M_k dadurch, daß sie sich auf die Ungleichung (9) bezieht und außerdem daß bei ihr auch die komplexen Zahlen zur Konkurrenz zugelassen werden.

Es ist natürlich zunächst zu untersuchen, ob es endliche (d. h. aus endlich vielen Elementen bestehende) Minimalmengen zweiter Art gibt. In dieser Richtung gilt an erster Stelle folgendes negative Ergebnis:

E i n e a u s p Z a h l e n b e s t e h e n d e M e n g e $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ k a n n n i c h t e i n e M i n i m a l m e n g e z w e i t e r A r t i n b e z u g a u f d i e K l a s s e C'_k b i l d e n, w e n n $p \leqq \frac{1}{2}k$ i s t.

Zum Beweise nehmen wir an, daß die Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ eine Minimalmenge bilden und daß $p \leqq \frac{1}{2}k$ ist. Man bilde die Polynome

$$P(x) = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_p), \quad \varphi(x) = P(x)\,\overline{P}(x),$$

wobei $\overline{P}(x)$, wie üblich, das konjugierte Polynom von $P(x)$ bedeutet. Da der Grad von $\varphi(x)$ höchstens gleich k ist, so würde Ungleichung (9) erfüllt sein, wenn man ξ durch ein passend gewähltes ξ_r ersetzt; das ist aber unmöglich, da die linke Seite von (9) positiv ist, während die rechte für $\xi = \xi_r$ verschwindet.

Unseren weiteren Untersuchungen über die Struktur der Minimalmengen zweiter Art liegen die Eigenschaften der oben definierten Tschebyscheffschen Polynomkette zugrunde, welche der wachsenden Funktion $\psi(x)$ entspricht. Dabei unterscheiden wir wiederum zwei Fälle, je nachdem k ungerade oder gerade ausfällt. Die Ergebnisse lauten folgendermaßen:

Es gibt nur eine aus n Zahlen bestehende Minimalmenge zweiter Art in bezug auf die Klasse C'_{2n-1}; ihre Elemente stimmen mit den n Nullstellen des Tschebyscheffschen Polynoms $P_n(x)$ überein.

Es gibt unendlich viele aus n Zahlen bestehende Minimalmengen zweiter Art in bezug auf die Klasse C'_{2n-2}. Dann und nur dann bilden n Zahlen eine solche Minimalmenge, wenn ihre Elemente mit den Nullstellen eines Polynoms der Gestalt

$$Q(x) = P_n(x) + cP_{n-1}(x)$$

übereinstimmen; dabei bedeuten $P_n(x)$ und $P_{n-1}(x)$ zwei aufeinanderfolgende Tschebyscheffsche Polynome und c ist eine reelle, sonst beliebige Konstante.

Die Anwendungen dieser Sätze auf die speziellen Fälle, die den verschiedenen Formen der wachsenden Funktion $\psi(x)$ entsprechen, sind so evident, daß ich darauf wohl nicht näher einzugehen brauche.

* * *

Bisher habe ich nur von Polynomklassen einer Veränderlichen gesprochen. Es liegt nahe, sich die Frage zu stellen, ob es noch weitere Klassen von Funktionen gibt, für welche man ähnliche Sätze über Minimalmengen aufstellen und beweisen könnte. Die Polynomklassen, die ich bis jetzt betrachtet habe, zeichnen sich dadurch aus, daß sie eine endliche Basis besitzen, d. h. daß ein beliebiges Polynom der Klasse C_k bzw. C'_k sich als eine lineare Kombination von $k + 1$ festen Polynomen derselben Klasse darstellen läßt. Diese Eigenschaft der Polynomklassen C_k bzw. C'_k scheint mir ausschlaggebend für den Erfolg der von mir angewandten Methode zu sein. Was z. B. den Mittelwertsatz der Differentialrechnung betrifft, so läßt sich in der Tat beweisen, daß für jede Funktionsklasse differenzierbarer Funktionen mit endlicher Basis die Zahl ξ der Formel (1) in einem kleineren Intervall als dem ursprünglichen eingeschlossen werden kann. Es handelt sich dabei natürlich um einen reinen Existenzbeweis; die effektive Bestimmung dieses Intervalls bzw. dieser Intervalle hängt wesentlich von der Natur der Basisfunktionen ab.

Ich möchte an dieser Stelle noch die Bemerkung hinzufügen, daß die abzählbar unendliche Zahlenmenge M', deren Elemente die Nullstellen sämtlicher Tschebyscheffscher Polynome $P_1(x)$, $P_2(x), \ldots$ sind, in gewissem Sinne als eine Minimalmenge zweiter Art in bezug auf die Polynomklasse C'_ω aller Polynome von x mit beliebigen komplexen Koeffizienten aufgefaßt werden kann. Sie besitzt nämlich die Eigenschaft, daß jedem Polynom $f(x)$ der Klasse C'_ω mindestens eine Zahl ξ der Menge M' entspricht, die der Ungleichung (9) genügt, während keine endliche Teilmenge von M' dieselbe Eigenschaft besitzt.

Ich habe auch versucht, die obigen Ergebnisse auf mehrere Dimensionen auszudehnen, bin aber auf Schwierigkeiten gestossen, welche mit der Dimensionszahl zunehmen. Um die Ideen zu fixieren, betrachten wir z. B. die bekannte Mittelwertformel

$$\iint\limits_{(B)} \varphi(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \Omega\, \varphi(\xi, \eta),$$

wobei sich die Integration auf einen beschränkten Bereich B der x, y-Ebene mit dem Flächeninhalt Ω erstreckt. Bedeutet nun $\varphi(x, y)$ eine reelle lineare Funktion von x und y, so sieht man leicht ein, daß der Punkt (ξ, η) mit dem Schwerpunkt des Bereiches B zusammenfallen kann. Schon dieser einfachste Fall legt die Vermutung nahe, daß man auch für Polynomklassen höheren Grades einen echten Teilbereich von B abgrenzen kann, dem der Punkt (ξ, η) angehört. Meine Untersuchungen in dieser Richtung sind aber noch nicht genügend weit fortgeschritten, um Ihnen etwas näheres hierüber berichten zu können.

Ich habe mich bemüht, soweit es im Rahmen eines Vortrages möglich ist, Ihnen eine Idee von den Untersuchungen zu geben, welche den Gültigkeitsbereich der Mittelwertsätze der Analysis betreffen, wenn es sich um die Anwendung dieser Sätze auf gewisse Polynomklassen handelt, und werde mich aufrichtig freuen, falls es mir gelungen sein sollte, bei Ihnen ein Interesse dafür erweckt zu haben.