Heinrich Löwig

Über allgemeine Spektralfunktionen

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 5, 153--154

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121262

$$z' = \frac{1}{\mathfrak{f}(z)}$$

détermine la représentation conforme du domaine D sur le cercle unité dans laquelle l'image du point $z = \infty$ est le point $z' = 0$ et l'image du point $z = z_0$ se trouve sur le demi-axe réel et positif.

Über allgemeine Spektralfunktionen.

Heinrich Löwig, Prag.

Es sei M ein σ-Körper von Teilmengen einer Menge $\mathfrak{M}$, welche selbst ebenfalls M angehöre, und es sei $\mathfrak{R}$ ein vollständiger komplexer euklidischer Raum, d. h. ein vollständiger komplexer linearer metrischer Raum, in welchem ein hermiteisch symmetrisches inneres Produkt definiert ist. Ist dann jeder Menge $\mathfrak{A}$ von M ein Einzeloperator $E(\mathfrak{A})$ in $\mathfrak{R}$ derart zugeordnet, daß für jedes Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ $(E(\mathfrak{A})\,\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$ eine absolut additive Mengenfunktion in M ist, und ist $E(\mathfrak{M})$ die Identität, dann soll $E(\mathfrak{A})$ eine *Spektralfunktion* in M und $\mathfrak{R}$ heissen. Der Verfasser hat die Frage untersucht und beantwortet, wann zwei Spektralfunktionen in demselben σ-Körper isomorph sind, und hat dabei folgendes Resultat erhalten: Zwei Spektralfunktionen in demselben σ-Körper M sind dann und nur dann isomorph, wenn sie in bezug auf jede endliche nicht negative absolut additive Mengenfunktion in M die *gleiche Vielfachheit* besitzen. Unter der Vielfachheit einer Spektralfunktion $E(\mathfrak{A})$ in M und $\mathfrak{R}$ in bezug auf eine endliche nicht negative absolut additive Mengenfunktion $f(\mathfrak{A})$ in M ist dabei die Vielfachheit dieser Spektralfunktion in bezug auf die abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit derjenigen Elemente $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ zu verstehen, für welche $(E(\mathfrak{A})\,\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$ in bezug auf $f(\mathfrak{A})$ total stetig ist, d. h. für jede Menge verschwindet, für welche $f(\mathfrak{A})$ verschwindet; die Vielfachheit von $E(\mathfrak{A})$ in bezug auf eine abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}$, deren Einzeloperator mit allen $E(\mathfrak{A})$ vertauschbar ist, ist die kleinste Kardinalzahl $\aleph$ von der Eigenschaft, daß es eine Menge $\mathfrak{N}$ von Elementen $\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{P}$ von der Mächtigkeit $\aleph$ und von der Eigenschaft gibt, daß die abgeschlossene lineare Hülle der Elemente $E(\mathfrak{A})\,\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{A} \in M$, $\mathfrak{x} \in \mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{P}$ zusammenfällt. Der ausgesprochene Satz ist eine Verallgemeinerung der Sätze über die orthogonale Aequivalenz zweier quadratischer Formen in unendlich vielen Veränderlichen, welche von E. Hellinger (Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlich vielen Variabeln; Dissertation Göttingen 1907) und H. Hahn (Über die Integrale des Herrn Hellinger und die Orthogonalinvarianten der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen; Monatshefte für Mathematik und Physik 23 (1912), S. 161 bis 224) ausgesprochen worden sind.

Grundzüge einer Inhaltslehre im Hilbertschen Raume.

Karl Löwner, Prag.

Bei dem üblichen axiomatischen Aufbau der Inhaltslehre im endlichdimensionalen Raume wird der Inhalt $\mu(\mathfrak{A})$ einer Punktmenge $\mathfrak{A}$ in Abhängigkeit von der letzteren als eine Mengenfunktion aufgefaßt, die folgenden Postulaten genügen soll:

a) Der Definitionsbereich von $\mu(\mathfrak{A})$ ist ein σ-Körper K, der mit jeder Menge auch alle ihre kongruenten enthält.

b) $\mu(\mathfrak{A})$ ist reell und nicht negativ.

c) Ist $\mathfrak{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{A}_n < K$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $\mathfrak{A}_k \mathfrak{A}_l = 0$ $(k \neq l)$ so ist $\mu(\mathfrak{A}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\mathfrak{A}_n)$.

d) Ist die Menge $\mathfrak{A}$ aus K zu $\mathfrak{B}$ kongruent, so ist $\mu(\mathfrak{A}) = \mu(\mathfrak{B})$.

e) Jeder Würfel $\mathfrak{W}$ ist meßbar und $\mu(\mathfrak{W}) > 0$.

Versucht man eine entsprechende Theorie im Hilbertschen Raume aufzubauen, so liegt es nahe, zunächst eine kleine Modifikation von e) eintreten zu lassen, indem man die Würfel, die hier nichtbeschränkte Mengen darstellen, durch Kugeln ersetzt. Doch auch dann ist das Axiomensystem nicht erfüllbar. Das sieht man schon aus der Tatsache, daß in einer Kugel vom Radius $4a$ $(a > 0)$ abzählbar unendlich viele paarweise punktfremde Kugeln vom Radius a untergebracht werden können. Ist μ_b der Inhalt einer Kugel vom Radius b, so müßte wegen b), c), d) die Ungleichung

$$n\mu_a \leqq \mu_{4a} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

gelten. Hieraus folgt wegen Gültigkeit des Archimedischen Axioms im Bereich der reellen Zahlen $\mu_a = 0$, im Widerspruch zu dem modifizierten e).

Um zu einer widerspruchsfreien Theorie zu gelangen, müssen wir eines der fünf Axiome a)—e) fallen lassen. Die eben durchgeführte Überlegung legt nahe, das Axiom b) wesentlich abzuändern, indem man den Bereich der reellen Zahlen durch ein passendes nichtarchimedisches Größensystem ersetzt. Es erweist sich außerdem als nötig, auch an den Postulaten a) und c) Änderungen vorzunehmen, die aber weniger ein-