Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Zdeněk Pírko
Úpatnice a pseudoúpatnice. [Ib.]

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 64 (1935), No. 5, R73--R80

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121261

# ROZHLEDY

## Úpatnice a pseudoúpatnice.

Zdeněk Pírko.

(Dokončení.)

4. Budiž dána křivka rovnicí (1) (křivka základní). Její tečna v bodě $(x, y)$ (v souřadnicích $\xi, \eta$)

$$(\xi - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

protne osy pravoúhlé soustavy souřadné v bodech

$$\left(\frac{x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}, 0\right), \quad \left(0, \frac{x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}\right).$$

Rovnoběžky k osám souřadným těmito body vedené protnou se v bodě

$$\xi = \frac{x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}, \quad \eta = \frac{x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}. \tag{18}$$

Geometrické místo bodů $\xi, \eta$, které obdržíme eliminací $x, y$ z rovnic (1), (18), nazveme *pseudoúpatnicí* křivky (1) (vzhledem k soustavě souřadné, k níž křivka základní je vztažena).

Hledejme vztah úpatnice k pseudoúpatnici (obr. 6)!

Křivka základní $\Gamma_0$ budiž dána polární rovnicí

$$r = f(\psi). \tag{19}$$

Označíme-li úhel, který svírá tečna této křivky s průvodičem bodu dotyčného, $\vartheta$, pak platí především známý vztah

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{f(\psi)}{f'(\psi)}; \tag{20}$$

z obrázku plyne dále, označíme-li průvodič úpatnice $\varrho_1$,

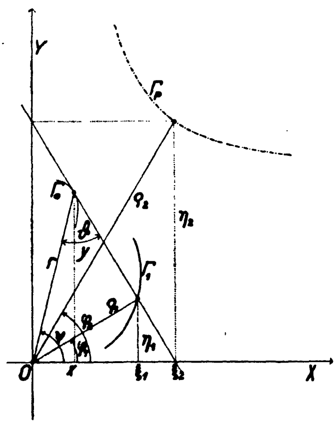
$$\varrho_1 = r \sin \vartheta \text{ a } \psi - \varphi_1 = \tfrac{1}{2}\pi - \vartheta,$$

tedy, dosadíme-li do těchto vztahů z rovnic (19) a (20),

$$\varrho_1 = \frac{f^2(\psi)}{\sqrt{f^2(\psi) + f'^2(\psi)}}, \quad \psi - \varphi_1 = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{arc\,tg} \frac{f(\psi)}{f'(\psi)}. \tag{21}$$

Obdržíme tudíž rovnici *úpatnice* $\Gamma_1$ křivky dané rovnicí (19) vzhledem k počátku jako pólu eliminací $\psi$ z rovnic (21), výsledek je tvaru

$$\varrho_1 = F_1(\varphi_1). \tag{22}$$




Obr. 6.

Vyjádřeme si nyní tečnu základní křivky ve tvaru normálním! Obdržíme tak vzhledem k rovnici (22) (v souřadnicích $\xi_2, \eta_2$)

$$\xi_2 \cos \varphi_1 + \eta_2 \sin \varphi_1 - F_1(\varphi_1) = 0;$$

z této rovnice však vyplývají ihned parametrické rovnice *pseudoúpatnice* $\Gamma_p$

$$\xi_2 = \frac{F_1(\varphi_1)}{\cos \varphi_1}, \quad \eta_2 = \frac{F_1(\varphi_1)}{\sin \varphi_1},$$

ze kterých vypočteme

$$\varrho_2 = \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} = \frac{F_1(\varphi_1)}{\sin \varphi_1 \cos \varphi_1} \text{ a } \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\eta_2}{\xi_2} = \operatorname{cotg} \varphi_1,$$

$$\text{t. j. } \varphi_2 = \tfrac{1}{2}\pi - \varphi_1.$$

Je tedy polární rovnice pseudoúpatnice, označíme-li její průvodič $\varrho_2$,

$$\varrho_2 = \frac{F_1(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi_2)}{\sin \varphi_2 \cos \varphi_2} = F_2(\varphi_2). \tag{23}$$

Nepřihlížíme-li nyní k indexům u amplitud (které jsme ostatně zavedli jen k vůli rozlišení polárních souřadnic bodů na obou křivkách, úpatnici a pseudoúpatnici), obdržíme srovnáním rovnic (22) a (23)

$$\varrho_2 = \varrho_1{}^* \varrho_3, \tag{24}$$

kde $\varrho_1{}^*$ značí průvodič úpatnice, pozorované však vzhledem k ose pořadnic jako ose polární (důvod je právě v tom, že v rovnici úpatnice místo $\varphi$ píšeme $\tfrac{1}{2}\pi - \varphi$), a

$$\varrho_3 = \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} \tag{25}$$

„rovnoosou“ eliptickou stauroidu, jak snadno se přesvědčíme, klademe-li v rovnici (16) $a = b = 1$ a křivku vyjádříme v polárních souřadnicích $\varrho, \varphi$. Rovnice (24) však již vyjadřuje hledaný vztah mezi úpatnicemi a pseudoúpatnicemi, který tedy vyslovíme větou takto:

*Průvodič pseudoúpatnice dané křivky vzhledem k souřadné soustavě, k níž je tato křivka vztažena, je roven součinu průvodičů úpatnice téže křivky vzhledem k počátku jako pólu* (v jejíž rovnici však vyměníme navzájem *pravoúhlé* souřadnice $\xi, \eta$) a *„jednotkové" eliptické stauroidy* (25).

5. Vyloženou teorii aplikujme opět na křivky Laméovy! Vyjádříme-li si rovnici (5) v souřadnicích polárních, obdržíme

$$\varrho_1 = \left[(a \cos \varphi)^{\frac{n}{n-1}} + (b \sin \varphi)^{\frac{n}{n-1}}\right]^{\frac{n-1}{n}},$$

tudíž

$$\varrho_1{}^* = \left[(a \sin \varphi)^{\frac{n}{n-1}} + (b \cos \varphi)^{\frac{n}{n-1}}\right]^{\frac{n-1}{n}}.$$

Podle rovnice (24) jest tedy průvodič pseudoúpatnice

$$\varrho_2 = \frac{\left[(a \sin \varphi)^{\frac{n}{n-1}} + (b \cos \varphi)^{\frac{n}{n-1}}\right]^{\frac{n-1}{n}}}{\sin \varphi \cos \varphi},$$

tedy v pravoúhlých souřadnicích $\xi, \eta$

$$\left(\frac{\xi}{a}\right)^{\frac{n}{1-n}} + \left(\frac{\eta}{b}\right)^{\frac{n}{1-n}} - 1 = 0. \qquad (26)$$

Výsledek můžeme vysloviti větou: *Pseudoúpatnice Laméovy křivky indexu n vzhledem k soustavě souřadné, k níž jest vztažena křivka základní, je Laméova křivka indexu* $\dfrac{n}{1-n}$.

Všimněme si opět speciálních případů a to v témž pořadí jako v odstavci 3. Za tím účelem položme pro stručnost $\dfrac{n}{1-n} = m$.

*a*) $n = \frac{1}{2}$, $m = 1$; $a = b$ (obr. 1). Pseudoúpatnicí paraboly (6) je *přímka* s rovnicí (8), v níž klademe $a = b$.

*b*) $n = 1$, $m = 0$. Rovnice (26) v tomto případě ztrácí význam; je však ihned patrno geometricky, že pseudoúpatnicí přímky (8) je *bod*

$$(a, b). \qquad (27)$$

*c*) $n = \frac{2}{3}$, $m = 2$; $a = b$ (obr. 2). Pseudoúpatnicí astroidy (10) je *kružnice* se středem v počátku a poloměrem $a$.

*d*) $n = 2$, $m = -2$. Pseudoúpatnicí elipsy (12) je *eliptická stauroida* (16) (obr. 3); pseudoúpatnicí rovnoosé hyperboly je *„rovnoosá" hyperbolická stauroida.*

*e*) $n = -1$, $m = -\frac{1}{2}$; $a = b$ (obr. 4). Obdržíme křivku čtvrtého stupně

$$\xi^2\eta^2 - 2a(\xi + \eta)\,\xi\eta + a^2(\xi - \eta)^2 = 0 \tag{28}$$

jako pseudoúpatnici rovnoosé hyperboly.

*f*) $n = -2$, $m = -\frac{2}{3}$; $a = b$ (obr. 5). Čtenář lehce si stanoví sám pseudoúpatnice „rovnoosé" eliptické a hyperbolické stauroidy.

6. Sinusovou spirálou indexu $n$ nazývá se křivka s polární rovnicí ($a$, $n$ dané veličiny)

$$r^n = a^n \sin n\psi. \tag{29}$$

Z této rovnice především plyne

$$\mathrm{f}(\psi) = a \sin^{\frac{1}{n}} n\psi,\quad \mathrm{f}'(\psi) = a \sin^{\frac{1-n}{n}} n\psi \cos n\psi,$$

tedy podle rovnice (20) $\operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{tg} n\psi$, t. j. $\vartheta = n\psi$. Mají tedy rovnice (21) (vynecháme-li indexy) tvar

$$\varrho = a \sin^{\frac{1+n}{n}} n\psi,\quad \psi - \varphi = \tfrac{1}{2}\pi - n\psi,$$

takže *úpatnice sinusové spirály* (29) *vzhledem k počátku jako pólu je*

$$\varrho = a \sin^{\frac{1+n}{n}} \frac{n}{1+n}\left(\tfrac{1}{2}\pi + \varphi\right) \tag{30}$$

— (až na jisté otočení kolem počátku) *sinusová spirála indexu* $\frac{n}{1+n}$. Vidíme z toho, že sinusové spirály mají pro úpatnice týž význam jako mají Laméovy křivky pro pseudoúpatnice. Na základě vztahu (24) nalezneme také ihned rovnici *pseudoúpatnice* křivky (29)

$$\varrho = \frac{a}{\sin\varphi\cos\varphi} \sin^{\frac{1+n}{n}} \frac{n}{1+n}(\pi - \varphi). \tag{31}$$

7. Všimněme si některých speciálních hodnot indexu $n$. Pro stručnost položme opět $\frac{n}{1+n} = m$.

*a*) $n = 1$ (obr. 7). Křivka základní má rovnici

$$\varrho = a \sin\psi \text{ nebo } x^2 + (y - \tfrac{1}{2}a)^2 - \tfrac{1}{4}a^2 = 0 \tag{32}$$

a představuje tudíž kružnici. Její úpatnice podle (30) je ($m = \frac{1}{2}$) křivka čtvrtého stupně zvaná *kardioida*

$$\varrho = a \sin^2 \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi + \varphi) \text{ neboli } \varrho = \tfrac{1}{2}a(1 + \sin\varphi), \tag{33}$$

jejíž obvyklý tvar

$$\varrho = \tfrac{1}{2}a(1 + \cos\varphi) \text{ nebo } (\xi^2 + \eta^2 - \tfrac{1}{2}a\xi)^2 - \tfrac{1}{4}a^2(\xi^2 + \eta^2) = 0 \tag{33'}$$

dostaneme, jestliže v rovnici (33) namísto $\varphi$ píšeme $\frac{1}{2}\pi + \varphi$, t. j.

otočíme-li křivku (33) kolem počátku o úhel $-\frac{1}{2}\pi$. Pseudoúpatnice křivky (32) je křivka stupně třetího s rovnicí

$$\varrho = 2a \frac{\cos^2 \frac{1}{2}\varphi}{\sin 2\varphi} \text{ neboli } \xi^2\eta + a\xi^2 - \tfrac{1}{4}a^2\eta = 0. \tag{34}$$

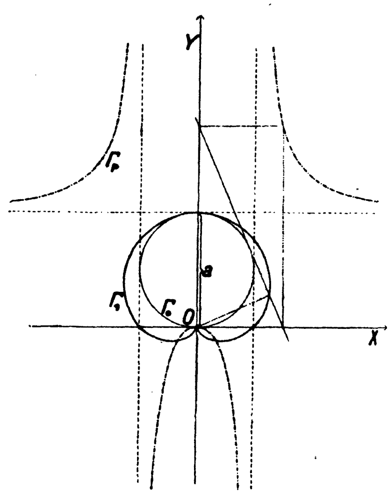
*b*) $n = 2$. Křivka základní

$$\varrho^2 = a^2 \sin 2\psi \text{ nebo } (x^2 + y^2)^2 - 2a^2xy = 0 \tag{35}$$

představuje lemniskatu Bernoulliho; obvyklý tvar (13') (ovšem v souřadnicích $\varrho$, $\psi$ resp. $x$, $y$) dostaneme, jestliže křivku (35) otočíme kolem počátku o úhel $-\frac{1}{4}\pi$ [tedy klademe-li v první z rovnic (35) $\frac{1}{4}\pi + \varphi$ místo $\varphi$]. Pro její úpatnici je $m = \frac{2}{3}$, otočíme-li ji kolem počátku o úhel $-\frac{1}{4}\pi$, lze psáti její rovnici

$$\varrho^2 = a^2 \cos^3 \tfrac{2}{3}\varphi. \tag{36}$$

Čtenář snadno si určí, že tato rovnice představuje v souřadnicích pravoúhlých křivku stupně dvanáctého; stejně snadno nalezne i pseudoúpatnici křivky (35).



Obr. 7.

*c*) $n = -1$. Křivka základní je přímka

$$\varrho = -\frac{a}{\sin \psi} \text{ neboli } y + a = 0. \tag{37}$$

Poněvadž v tomto případě $m = -\infty$, ztrácí rovnice (30) význam; geometricky je však ihned patrno, že úpatnicí je *bod*

$$(0, -a). \tag{38}$$

Stejně je patrno geometricky, že pseudoúpatnicí je základní *přímka* (37).

*d*) $n = -2$. Křivka základní je rovnoosá hyperbola

$$\varrho^2 = -\frac{a^2}{\sin 2\psi} \text{ neboli } xy + \tfrac{1}{2}a^2 = 0. \tag{39}$$

Její úpatnicí ($m = 2$), jak již známo, je *Bernoulliho lemniskata*, ovšem v jiné poloze vzhledem k počátku.

$$\varrho^2 = a^2 \sin 2 (\tfrac{1}{2}\pi + \varphi) \text{ neboli } \varrho^2 = -a^2 \sin 2\varphi; \tag{40}$$

otočením o úhel $+\frac{1}{4}\pi$ kolem počátku [t. j. klademe-li v rovnici (40)

$\varphi - \frac{1}{4}\pi$ místo $\varphi$], obdržíme obvyklý tvar (13'). Pseudoúpatnicí základní hyperboly je *rovnoosá hyperbola*

$$\varrho^2 = -\frac{2a^2}{\sin\varphi\cos\varphi} \text{ nebo } \xi\eta + 2a^2 = 0. \tag{41}$$

*e)* $n = \frac{1}{2}$. Křivka základní je kardioida $v = \frac{1}{2}a\,(1 - \cos\psi)$ čili

$$(x^2 + y^2 + \tfrac{1}{2}ax)^2 - \tfrac{1}{4}a^2\,(x^2 + y^2) = 0; \tag{42}$$

obvyklý tvar (33') obdržíme, změníme-li smysl osy úseček. Její úpatnicí ($m = \frac{1}{2}$) je t. zv. *Cayleyova sextika*

$$\varrho = a\sin^3\tfrac{1}{3}\,(\tfrac{1}{2}\pi + \varphi), \tag{43}$$

tedy, poněvadž

$$\sin\tfrac{1}{3}\,(\tfrac{1}{2}\pi + \varphi) = \sin\,[\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{3}\,(\pi - \varphi)],$$

$$\varrho = a\cos^3\tfrac{1}{3}\,(\pi - \varphi) \text{ čili } (4\xi^2 + 4\eta^2 - a\xi)^3 - 27a^2\,(\xi^2 + \eta^2)^2 = 0. \tag{43'}$$

Pseudoúpatnici základní kardioidy nalezne si čtenář lehce sám.

*f)* $n = -\frac{1}{3}$ (obr. 8). Křivka základní je kvadratická parabola

$$\varrho = \frac{2a}{1 - \cos\psi} \text{ nebo } y^2 - 4a\,(x + a) = 0; \tag{44}$$

její úpatnicí ($m = -1$) je *přímka*

$$\varrho = -\frac{a}{\cos\varphi} \text{ nebo } x + a = 0, \tag{45}$$

jak známo, vrcholová tečna základní paraboly (44); pseudoúpatnicí je křivka stupně třetího, t. zv. *křivka Henkelova*, s rovnicí

$$\varrho = -\frac{a}{\sin^2\varphi\cos\varphi} \text{ neboli } \xi\eta^2 + a\,(\xi^2 + \eta^2) = 0. \tag{46}$$

*g)* $n = -\frac{1}{3}$. Křivka základní se nazývá kubika Tschirnhausenova (nebo někdy trisektrix Catalanova) a má rovnici

$$\varrho = \frac{a}{\sin^3(-\frac{1}{3}\psi)} \text{ neboli } (y - 4a)^3 + 27a\,(x^2 + y^2) = 0; \tag{47}$$

její obvyklý tvar

$$x^3 + 9a\,(x^2 - 3y^2) = 0 \tag{47'}$$

dostaneme z rovnice předcházející, píšeme-li místo $y$ výraz $y - 8a$ a v rovnici takto získané zaměníme $x$ za $y$ a $y$ za $-x$ [t. j. vztáhneme křivku (47) k osám, které jsou v obr. označeny pruhem]. Úpatnicí křivky (47) ($m = -\frac{1}{2}$) je kvadratická *parabola*

$$\varrho = \frac{2a}{1 + \sin\varphi} \text{ neboli } \xi^2 + 4a\,(\eta - a) = 0; \tag{48}$$

rovnici pseudoúpatnice si čtenář nalezne lehce sám.

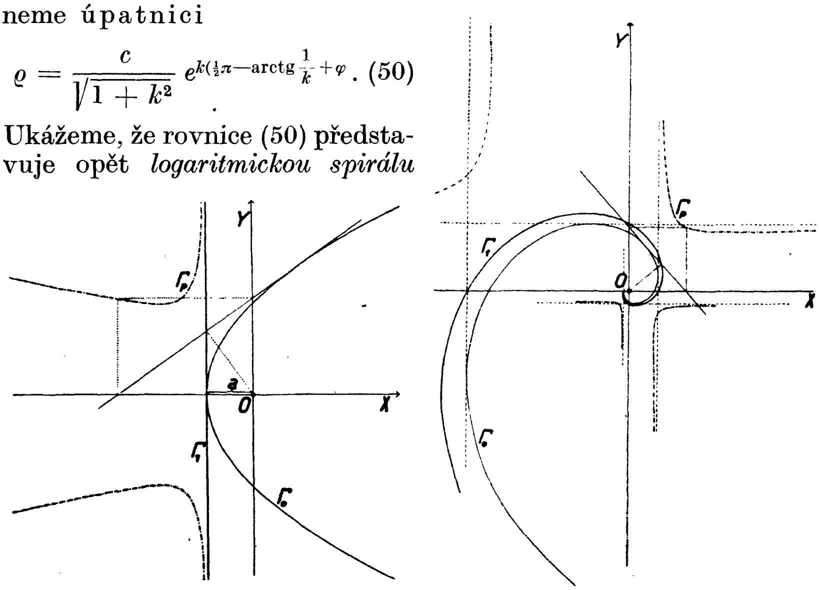
8. Jako příklad křivky transcendentní uveďme ještě logaritmickou spirálu (obr. 9). Je to křivka s polární rovnicí

$$\varrho = ce^{k\varphi}. \tag{49}$$

Z této rovnice nalezneme ihned $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{1}{k}$; z rovnic (21) pak nalezneme úpatnici

$$\varrho = \frac{c}{\sqrt{1+k^2}} e^{k(\frac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{k} + \varphi)}. \tag{50}$$

Ukážeme, že rovnice (50) představuje opět *logaritmickou spirálu*




Obr. 8.    Obr. 9.

shodnou (až na jisté otočení kolem počátku) s křivkou základní. Pišme totiž rovnici (50) ve tvaru

$$\varrho = ce^{-\log\sqrt{1+k^2} + k(\frac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{k} + \varphi)}$$

nebo stručněji

$$\varrho = ce^{\lambda + k\varphi}, \tag{50'}$$

kde tedy $\lambda = k\left(\frac{1}{2}\pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{k}\right) - \log\sqrt{1+k^2}$. V rovnici (50') stačí však již položiti místo $\varphi$ výraz $\varphi - \frac{\lambda}{k}$, abychom dostali (až na jiné označení proměnných, což však je nepodstatné) rovnici (49). Tím je naše tvrzení dokázáno. Jako pseudoúpatnici nalezneme na základě rovnice (23) křivku

$$\varrho = \frac{c}{\sqrt{1+k^2}} \frac{e^{k(\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{k} - \varphi)}}{\sin\varphi\cos\varphi}. \tag{51}$$

9. Jak bylo již řečeno v odstavci 1, bylo úkolem tohoto článku odvoditi postupem co nejjednotnějším některé speciální křivky stupně vyššího než druhého. Při tom jsme zjistili, že kuželosečky, vezmeme-li je jako křivky základní a použijeme-li na ně konstrukce úpatnicové nebo pseudoúpatnicové, vedou k řadě nových křivek stupně nejvýše čtvrtého. Pokud se však v našich úvahách vyskytly kuželosečky jako křivky základní, tedy buďto byly ve *zvláštní* poloze vzhledem k souřadným osám, nebo pól sám měl zvláštní polohu.

Je možno lehce dokázati, že také úpatnice a pseudoúpatnice kuželoseček v *obecné* poloze jsou nejvýše čtvrtého stupně, což bude jedním úkolem příštího článku.

---

# O jednej úlohe z teorie kužeľosečiek.

**Štefan Schwarz,** poslucháč přírod. fakulty v Praze.

Položme si za úkol určiť uhol, pod akým videť danú kužeľosečku z daného bodu.

Kužeľosečka nech má rovnicu

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{1}$$

a bod nech je $(x_0, y_0)$.

Veďme bodom $(x_0, y_0)$ priamku o smernici $\operatorname{tg}\alpha$. Jej parametrické rovnice sú $x = x_0 + d\cos\alpha$, $y = y_0 + d\sin\alpha$, kde $d$ je vzdialenosť bodu $(x, y)$ od $(x_0, y_0)$. Pre priesečík tejto priamky s kužeľosečkou (1) dostaneme dosadením rovnicu pre $d$:

$$d^2(a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha) + 2d\cos\alpha\,.\,f_1(x_0, y_0) + \\ + 2d\sin\alpha\,.\,f_2(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) = 0, \tag{2}$$

kde

$$f_1(x_0, y_0) \equiv a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}$$
$$f_2(x_0, y_0) \equiv a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}$$

a $f(x_0, y_0)$ je ľavá strana rovnice kužeľosečky, do ktorej sú dosadené súradnice $x_0, y_0$.

Aby daná priamka bola tečnou kužeľosečky (1), nutno, aby rovnica (2) mala koreň dvojnásobný, t. j. diskriminant musí byť rovný nule. Tým dostávame podmienku pre smer $\alpha$

$$\sin^2\alpha\,.\,(f_2^2 - a_{22}f) + 2\sin\alpha\,.\,\cos\alpha\,.\,(f_1\,.\,f_2 - a_{12}f) + \\ + \cos^2\alpha\,(f_1^2 - a_{11}f) = 0, \tag{3}$$

pri čom výrazov $f_1, f_2, f$, užívame miesto obšírne písaného $f_1(x_0, y_0)$ atď.

Rovnicou (3) sú určené smernice tečien $\operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2$ vedených z $(x_0, y_0)$ ku kužeľosečke. Pre ich uhol platí

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1\,.\,\operatorname{tg}\alpha_2}. \tag{4}$$