Wacław Sierpiński

Les superpositions des fonctions

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 5, 73--79

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121259`

Les superpositions des fonctions.

Waclaw Sierpiński, Warszawa.

Pour fixer les idées nous nous bornerons d'abord à la considération de fonctions réelles d'une variable réelle, c'est-à-dire de fonctions $f(x)$, définies pour tout nombre x réel, dont les valeurs sont des nombres réels.

$f_1(x)$ et $f_2(x)$ étant deux fonctions, nous appelons s u p e r p o s i t i o n des fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ la fonction

$$f(x) = f_2[f_1(x)].$$

Pareillement, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ étant une suite finie de fonctions, on appelle superposition de ces fonctions la fonction

$$f(x) = f_n f_{n-1} \ldots f_3 f_2 f_1(x). \tag{1}$$

Un des problèmes les plus simples concernant les superpositions de fonctions est le suivant.

Soit Φ une famille donnée de fonctions. U n e s u p e r p o s i t i o n d e d e u x f o n c t i o n s d e l a f a m i l l e Φ a p p a r t i e n t - e l l e t o u j o u r s à c e t t e f a m i l l e ?

Il y a des cas, où ce problème n'offre pas de difficulté. P. e. la réponse est positive, si Φ est la famille de toutes les fonctions continues, ou bien celle de tous les polynomes, ou bien celle de toutes les fonctions linéaires. Or, la réponse est négative, si Φ est la famille de tous les polynomes de deuxième degré.

Or, voici des cas un peu plus compliqués. La réponse est positive, lorsque Φ est la famille de toutes les fonctions de Baire (c.-à-d. représentables analytiquement); elle est négative, lorsque Φ est la famille de toutes les fonctions de Baire de 1ère classe, ou bien lorsque Φ est la famille de toutes les fonctions mesurables, ou bien lorsque Φ est la famille de toutes les fonctions absolument continues, ou bien lorsque Φ est la famille de toutes les fonctions à variation bornée.

Parfois la réponse à notre problème est liée aux grandes difficultés et même ne peut pas être trouvée à l'état actuel de la science, au moins si l'on n'admet une hypothèse, p. e. celle du continu. Tel est p. e. le cas où Φ est la famille de toutes les fonctions satisfaisant à la condition de Baire (c'est-à-dire continues sur tout ensemble parfait, lorsqu'on néglige un ensemble de 1ère catégorie par rapport à cet ensemble parfait). C'est seulement en admettant l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) que j'ai démontré, en utilisant un résultat de M. Lusin, que pour cette famille Φ la réponse à notre problème est négative.[1])

Voici encore un cas où la solution positive de notre problème équivaut à une hypothèse sur la puissance du continu. Soit Φ la famille de toutes les fonctions qui prennent chaque leur valeur moins que $2^{\aleph_0}$ fois. Comme j'ai démontré,[2]) la solution positive de notre problème pour la famille Φ équivaut à l'hypothèse que le nombre cardinal $2^{\aleph_0}$ n'est pas une somme de moins que $2^{\aleph_0}$ nombres cardinaux, dont chacun est $< 2^{\aleph_0}$.

Φ_1 étant une famille donnée de fonctions, désignons pour tout n naturel (> 1) par Φ_n la famille de toutes les fonctions de la forme (1), où $f_k(x)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) sont des fonctions de la famille Φ_1. Le problème, dont nous avons parlé, pour la famille Φ_1 équivaut évidemment au problème si l'on a $\Phi_2 = \Phi_1$ ou non. Dans le cas où l'on a $\Phi_2 = \Phi_1$, on a évidemment $\Phi_n = \Phi_1$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ Dans le cas où $\Phi_2 \neq \Phi_1$, on peut démander si $\Phi_3 \neq \Phi_2$ et, généralement, si $\Phi_{n+1} \neq \Phi_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$, éventuellement de chercher le plus petit nombre naturel p, tel que $\Phi_p = \Phi_{p+1}$ (ce qui entraîne, comme on voit sans peine, que $\Phi_n = \Phi_p$ pour $n \geqq p$).

Soit p. e. Φ_1 la famille de toutes les fonctions mesurables. Comme on sait, on a ici $\Phi_2 \neq \Phi_1$. Or, M. S. Ruziewicz a démontré[3]) que toute fonction d'une variable réelle est une fonction mesurable ponctuellement discontinue d'une fonction mesurable ponctuellement discontinue. Il en résulte tout de suite que $\Phi_3 = \Phi_2$, donc que $\Phi_n = \Phi_2$ pour $n \geqq 2$.

Le même est lorsque Φ_1 désigne la famille de toutes les fonctions ponctuellement discontinues.

Un cas où la démonstration de l'égalité $\Phi_3 = \Phi_2$ est beaucoup plus difficile est celui où Φ_1 est la famille de toutes les fonctions absolument continues. L'égalité $\Phi_3 = \Phi_2$ a été démontrée dans ce cas par Mlle Nina Bary et M. Menchoff.[4])

Or, il y a des familles Φ_1 pour lesquelles nous ne savons pas résoudre le problème si l'on a $\Phi_3 = \Phi_2$ ou non, même en admettant l'hypothèse du continu. Tel est le cas, où Φ_1 est la famille de toutes les fonctions satisfaisant à la condition de Baire.

p étant un nombre naturel donné quelconque, nous pouvons sans peine donner un exemple d'une famille Φ_1 de fonctions, telle que p est le plus petit nombre naturel n, pour le quel $\Phi_n = \Phi_{n+1}$.

On peut même définir une telle famille Φ_1 formée d'une seule

---

[1]) Voir W. Sierpiński, Fund. Math. t. XXII, p. 21.

[2]) C. R. Soc. Sc. et L. de Varsovie, Cl. III, XXV (1932), p. 7.

[3]) Communication faite au II Congrès des Mathématiciens Roumains à Turnu Severin (1932); cf aussi Mathematica, t. VII, p. 89.

[4]) Annali di Mat. Ser. IV, t. V (1927-1928), p. 53; voir aussi N. Bary, Math. Ann. 103, p. 214.

fonction $f(x)$. (Dans ce cas la famille Φ_n est formée d'une seule fonction, notamment de la n-ième itérée de la fonction $f(x)$.)

Il suffit de définir cette fonction $f(x)$ de la façon suivante:

Posons, pour $k = 0, 1, 2, \ldots, p - 1$, $f(k) = k + 1$, et posons $f(x) = x$ pour tous les autres x réels.

Les p premiers termes de la suite $f(0), ff(0), fff(0), \ldots$ sont, comme on voit sans peine, tous différents. D'autre part, pour tout x réel, la $p + 1$-ème itérée de la fonction $f(x)$ est égale à la p-ème itérée. Les familles $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$ sont donc ici toutes distinctes, mais $\Phi_{p+1} = \Phi_p$.

Il n'offre aucune difficulté de donner un exemple d'une famille Φ_1 pour laquelle les familles Φ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont toutes distinctes. Telle est p. e. la famille Φ_1 de tous les polynomes de deuxième degré (ou bien la famille Φ_1 formée d'une seule fonction $f(x) = x^2$).

On connait cependant des familles Φ_1 pour lesquelles la démonstration que les familles Φ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont toutes distinctes est difficile. Tel est le cas, où Φ_1 est la famille de toutes les fonctions continues à variation bornée.[5])

On voit sans peine que la famille $\Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \ldots$ est la plus petite famille F de fonctions satisfaisant à deux conditions suivantes: 1^0 $\Phi_1 \subset F$ et 2^0 toute superposition de deux fonctions de la famille F est encore une fonction de cette famille.

Les superpositions de la forme (1) sont des superpositions d'un nombre fini de fonctions. Mais on peut aussi considérer des superpositions d'une infinité de fonctions. Voici le cas le plus simple. Soit

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots \tag{2}$$

une suite infinie donnée de fonctions. S'il existe la limite

$$f(x) = \lim_{n=\infty} f_n f_{n-1} \ldots f_3 f_2 f_1(x),$$

nous écrirons

$$f(x) = \ldots f_3 f_2 f_1(x). \tag{3}$$

Φ_1 étant une famille donnée de fonctions, nous désignerons par Φ_ω la famille de toutes les fonctions de la forme (3), où chacune des fonctions (2) appartient à la famille Φ_1. On voit sans peine que même dans le cas, où $\Phi_2 = \Phi_1$ (donc $\Phi_n = \Phi_1$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$) on peut avoir $\Phi_\omega \neq \Phi_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$

Soit en effet Φ_1 la famille de toutes les fonctions continues. On a évidemment $\Phi_n = \Phi_1$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ Or, soit $f_1(x)$ la fonction définie comme il suit: $f_1(x) = x^2$ pour $-1 \leq x \leq 1$ et $f_1(x) = 1$ pour tous les autres x réels, et posons $f_n(x) = f_1(x)$ pour

[5]) Voir N. Bary, Recueil Math. Moscou T. 40 (1933), p. 327.

$n = 1, 2, 3, \ldots$ Les fonctions $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ appartiennent évidemment toutes à la famille Φ_1.

Or, la fonction $\varphi_n(x) = f_n f_{n-1} \ldots f_3 f_2 f_1(x)$ est évidemment égale à x^{2^n} pour $-1 \leq x \leq 1$ et à 1 pour tous les autres x réels: on a donc $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n(x) = 0$ pour $-1 < x < 1$ et $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n(x) = 1$ pour tous les autres x réels. La fonction (3) (qui appartient évidemment à Φ_ω) est donc discontinue, d'où résulte que $\Phi_\omega \neq \Phi_n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

Si la fonction $f(x) = x$ appartient à la famille Φ_1 (ce qui a lieu pour la pluspart des familles de fonctions qu'on rencontre dans les recherches), on a, comme on voit sans peine, $\Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \Phi_3 \subset \ldots$ Dans ce cas, si $\Phi_{n+1} \neq \Phi_n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, on a, comme on voit sans peine, $\Phi_\omega \neq \Phi_n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ (puisque $\Phi_\omega \supset \Phi_n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$).

Si Φ_1 est la famille de toutes les fonctions continues, toute fonction de la famille Φ_ω est évidemment limite de fonctions continues (c'est-à-dire fonction de 1ère classe de Baire). Or, comme j'ai démontré, la proposition réciproque n'est par vraie.[6])

On peut aller plus loin et considérer les familles Φ_α, où α est un nombre ordinal transfini quelconque de la seconde classe de Cantor. Les familles Φ_α peuvent être définies par l'induction transfinie comme il suit. Si α est un nombre ordinal de première espèce, $\alpha = \beta + 1$, on comprend par Φ_α la famille de toutes les fonctions $f(x)$ de la forme $f(x) = \varphi(\psi(x))$, où $\varphi(x)$ est une fonction de la famille Φ_1 et $\psi(x)$ une fonction de la famille Φ_β. Si α est un nombre ordinal de seconde espèce, on comprend par Φ_α la famille de toutes les fonctions $f(x)$ de la forme (3), où (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$) $f_n(x)$ est une fonction de la famille Φ_{α_n}, où $\alpha_n < \alpha$.[7])

La famille $\Psi = \sum\limits_{\alpha < \Omega} \Phi_\alpha$ est, comme on voit sans peine, la plus petite famille F de fonctions satisfaisant aux conditions suivantes: 1⁰ $\Phi_1 \subset$ F, 2⁰ toute superposition de deux fonctions de la famille F est encore une fonction de cette famille, et 3⁰ si $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ est une suite infinie de fonctions de la famille F et si $f(x) = \ldots f_3 f_2 f_1(x)$, la fonction $f(x)$ appartient encore à F.

En resolvant un problème posé par M. Ruziewicz, j'ai démontré[8]) que si Φ_1 est la famille de toutes les fonctions d'une variable réelle jouissant de la propriété de Baire, il existe des fonctions d'une variable réelle qui n'appartiennent pas à la famille Ψ.

---

[6]) Voir ma Note dans les C. R. Soc. Sc. Varsovie XXVI (1933), p. 2.
[7]) Cf. N. Bary, l. c., p. 327—328.
[8]) Fund. Math. t. 24, p. 13.

Le problème si, pour une famille Φ_1 donnée, la suite transfinie de familles Φ_α (où $\alpha < \Omega$) est stationnaire ou non (c'est-à-dire, s'il existe un nombre ordinal $\mu < \Omega$, tel que $\Phi_\alpha = \Phi_\mu$ pour $\alpha > \mu$) est très difficile et n'est pas encore résolu pour des familles Φ_1 très simples, p. e. pour la famille Φ_1 de toutes les fonctions continues. Or, il est résolu par Mlle Bary pour la famille Φ_1 de toutes les fonctions continues à variation bornée. Mlle Bary a démontré notamment (l. c.) que dans ce cas toutes les familles Φ_α (où $\alpha < \Omega$) sont distinctes.

Il est à remarquer qu'on peut définir une famille Φ_1 formée d'une seule fonction, telle que les familles Φ_α ($\alpha < \Omega$) sont toutes distinctes.[9])

M. A. Lindenbaum a démontré que si Φ_1 est la famille de toutes les fonctions de 1ère classe de Baire, les familles Φ_α ($\alpha < \Omega$) sont toutes distinctes et leur somme coïncide avec la famille de toutes les fonctions de Baire.[10]) Le même est pour la famille Φ_1 de toutes les fonctions semi-continues (p. e. supérieurement).

Les superpositions transfinies que nous avons considéré peuvent être appellées superpositions extérieures. Or, on peut aussi considérer des superpositions transfinies intérieures.

F_1 étant une famille donnée de fonctions, désignons par F_ω la famille de toutes les fonctions de la forme

$$\mathrm{f}(x) = \lim_{n=\infty} \mathrm{f}_1\mathrm{f}_2 \ldots \mathrm{f}_n(x), \tag{4}$$

où chacune des fonctions $\mathrm{f}_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$) appartient à la famille F_1.

J'ai démontré[11]) que si F_1 est la famille de toutes les fonctions continues (d'une variable réelle), F_ω est la famille de toutes les fonctions de classe $\leqq 1$ de Baire. Le même est dans le cas où F_1 est la famille de toutes les fonctions continues d'une variable réelle à variation bornée.

Or, on ne sait pas si toute fonction continue d'une variable réelle peut être représentée sous la forme (4), où $\mathrm{f}_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) sont des polynomes. On ne sait pas aussi si toute fonction de classe ω de Baire peut être représentée sous la forme (4), où $\mathrm{f}_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) sont des fonctions de classe $\leqq 1$.

J'ai démontré[12]) que la famille de toutes les fonctions de Baire d'une variable réelle coïncide avec la plus petite famille F de fonctions d'une variable réelle qui contient toute fonction continue ainsi que toute fonction de la forme (4), où $\mathrm{f}_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$) sont des fonctions appartenant à la famille F.

9) Voir ma Note dans Bull. Acad. Roumaine, t. XVII.
10) Voir Fund. Math. t. 23, p. 31.
11) Fund. Math. t. 24, p. 1.
12) Fund. Math. t. 24, p. 3.

On peut aussi considérer des superpositions transfinies intérieures d'un ordre α quelconque $< \Omega$, en définissant par l'induction transfinie les familles F_α comme il suit. Si α est un nombre ordinal de première espèce, $\alpha = \beta + 1$, on comprend par F_α la famille de toutes les fonctions $f(x)$ de la forme $f(x) = \psi[\varphi(x)]$, où $\varphi(x)$ est une fonction de la famille F_1 et $\psi(x)$ une fonction de la famille F_β. Si α est un nombre ordinal de seconde espèce, on comprend par F_α la famille de toutes les fonctions de la forme (4), où, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, $f_n(x)$ est une fonction de la famille F_{α_n}, où $\alpha_n < \alpha$.

M. M. J. Schreier et S. Ulam ont démontré récemment[13]) qu'il existe cinq fonctions définies et continues dans l'intervalle I $(0 \leq x \leq 1)$ et dont les valeurs appartiennent à I, telles que toute autre fonction de même nature peut être approximée aussi près que l'on veut par une superposition (finie) de ces cinq fonctions.

Comme j'ai démontré, le nombre 5 peut y être remplacée par le nombre 4. J'ai prouvé notamment que $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x), \ldots$ étant une suite infinie donnée de fonctions continues, définies dans l'intervalle I et ne prenant que des valeurs de cet intervalle, il existe quatre fonctions de même nature, telles que toute fonction de la suite infinie considérée est une superposition (finie) de ces quatre fonctions.[14])

Le problème si l'on peut remplacer, dans le théorème de M. M. Schreier et Ulam le nombre 5 par le nombre 3 reste encore ouvert.*)

Nous avons considéré jusqu'à présent seulement les superpositions des fonctions d'une seule variable. Mais on a fait aussi des recherches intéressantes concernant les superpositions des fonctions de plusieurs variables. Citons p. e. le théorème de M. Bieberbach, d'après lequel toute fonction de deux variables réelles se laisse représenter par superposition de fonctions d'une seule variable réelle et de la fonction $s(x, y) = x + y$.[15]) Plus précisément, il existe une fonction fixe de 1ère classe de Baire d'une seule variable réelle, $\varphi(x)$, telle que, quelle que soit la fonction donnée $f(x, y)$ de deux variables réelles, il existe une fonction $g(t)$ d'une seule variable réelle t (fonction qui dépend de la fonction f), telle qu'on a pour tous les nombres réels x et y l'égalité

$$f(x, y) = g[\varphi(x) + \tfrac{1}{2}\varphi(y)].$$

[13]) Fund. Math. t. 23, p. 118.

[14]) Fund. Math. t. 23, p. 119.

* M. M. V. Jarník et V. Knichal ont démontré en octobre 1934 que le nombre 5 peut y être remplacé par le nombre 2 et qu'il ne peut pas être remplacé par le nombre 1. Voir leur Note qui paraîtra dans *Fund. Math.* t. 24.

[15]) Journ. f. r. u. a. Math. 165, p. 92; cf. A. Lindenbaum, Fund. Math. t. XX, p. 26, et W. Sierpiński, Prace Matematyczno-fizyczne t. XLI, p. 171.

Un autre théorème de M. Bieberbach concerne la réduction des fonctions de trois variables aux fonctions de deux variables. Notamment, $\varphi(x)$ étant la même fonction fixe de 1ère classe que dans le théorème dont nous venons de parler, il existe, pour toute fonction $\mathrm{f}(x, y, z)$ de trois variables réelles, une fonction $\mathrm{g}(x, y)$ de deux variables réelles, telle qu'on a pour tous les nombres réels x, y et z l'égalité

$$\mathrm{f}(x, y, z) = \mathrm{g}[x, \varphi(y) + \tfrac{1}{2}\varphi(z)].$$ [16]

Il en résulte que les fonctions de plusieurs variables réelles se réduisent par superposition aux fonctions de deux variables réelles.

Pour les fonctions de quatre variables réelles on a encore le théorème suivant:

Il existe pour toute fonction $\mathrm{f}(x, y, z, t)$ de 4 variables réelles une fonction $\mathrm{h}(x, y)$ de deux variables réelles, telle qu'on a pour tous les nombres réels x, y, z et t l'égalité

$$\mathrm{f}(x, y, z, t) = \mathrm{h}[\varphi(x) + \tfrac{1}{2}\varphi(y),\ \varphi(z) + \tfrac{1}{2}\varphi(t)].$$

Nous n'avons considéré ici que les superpositions des fonctions d'une ou de plusieurs variables. Plus généralement, on peut étudier les superpositions de fonctions d'ensemble et les superpositions d'opérations. Mais la discussion de ces recherches déborderait les limites de notre conférence.

---

[16]) Voir p. e. W. Sierpiński l. c., p. 173—174.