Bohumil Bydžovský
O immaginárných bodech. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 39 (1910), No. 4, 417--426

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121244

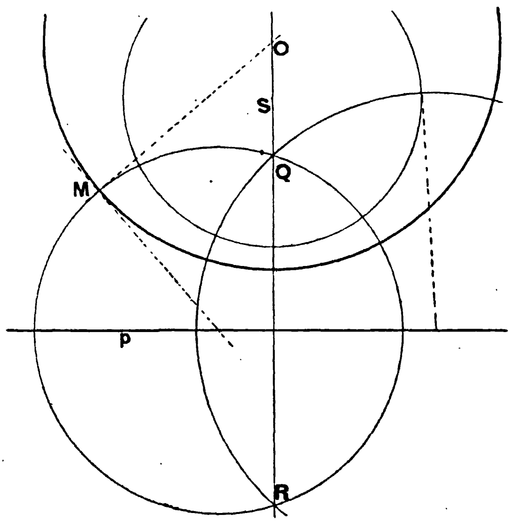
O imaginárných bodech.

Píše dr. B. Bydžovský.

(Dokončení.)

§ 4. Kružnice určené imaginárnými body.

16. Na řadě příkladů jsme poznali, jak lze sestrojiti imaginárné *) body, jež tvoří řešení úlohy. *Ale dovedeme také naopak*

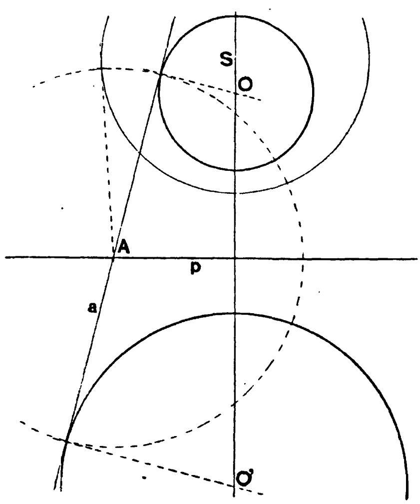


Obr. 6.

sestrojovati útvary, jež danými imaginárnými body jsou určeny. Provedeme *konstrukci kružnice z imaginárných bodů.* Kružnice je určena třemi body. Dva z těchto bodů nechť jsou imaginárné sdružené (a dány tedy jako průsečíky dané kružnice s danou přímkou p), třetí nechť je reálný (v. obr. 6.). To znamená se-

*) V minulém čísle nedopatřením bylo vytisknuto všude slovo »imaginární« chybně s dvěma *m*. Prosím čtenáře, aby si to opravili.

strojiti kružnici, která prochází daným bodem M a protíná danou přímku p v týchž dvou imaginárných bodech jako kružnice daná. Jinými slovy: kružnice hledaná má s kružnicí danou chordálu p (v. odst. 13.), čili náleží do svazku kružnic Σ určeného kružnicí danou a přímkou p. Všechny kružnice tohoto svazku mají své středy na kolmici spuštěné se středu S dané kružnice na p. Sestrojme libovolnou kružnici, jež má střed na p a protíná kolmo kružnici danou; ta protíná každou kružnici svazku Σ kolmo (v. odst. 13.). Body Q, R, v nichž tato kružnice seče zmíněnou kolmici, jsou základní body druhého svazku kružnic Σ', jež protínají všechny kružnice prvého svazku kolmo. Sestrojme tu kružnici svazku Σ', jež prochází bodem M; je určena body Q_1, R_2, M. Ta seče kolmo také hledanou kružnici. Tím je určena tečna hledané kružnice v bodě M; její střed O je pak ihned nalezen jako průsečík kolmice v M k této tečné a kolmice s bodu S na p spuštěné. Tím je hledaná kružnice sestrojena, ježto je znám její střed O a poloměr OM.



Obr. 7.

17. Podobně *sestrojme kružnici, jež je dána tečnou a dvěma imaginárnými body sdruženými* (určenými danou kruž-

nicí o středu S a přímkou p). To znamená zase najíti kružnici svazku Σ, jež se dotýká a. Prodlužme a, až protne p (v. obr. 7.) v bodě A a z tohoto bodu veďme tečnu k dané kružnici. Ježto A leží na chordále svazku Σ, jsou délky tečen ke kružnicím tohoto svazku vedených vesměs stejné, tedy také k hledané. I přeneseme tuto délku na a od bodu A na obě strany, čímž nabudeme dvou dotyčných bodů kružnic na a; tím jsou tyto kružnice nalezeny, ježto jsou známy jejich středy O, O' i poloměry.

Čtenář nechť si připomene, jak se provádí tato konstrukce v případě dvou bodů reálných, a kolik je v tom případu řešení!

18. Zcela podobně se řeší úloha:

Jest sestrojiti kružnici dotýkající se dané kružnice a procházející dvěma body (buď reálnými nebo imaginárnými sdruženými).

Řešení přenechávám čtenáři.

§ 5. **Průseky přímky s ellipsou.**

19. Ukážeme důležitost zavedení imaginárných bodů ještě na některých úlohách týkajících se *ellipsy.*

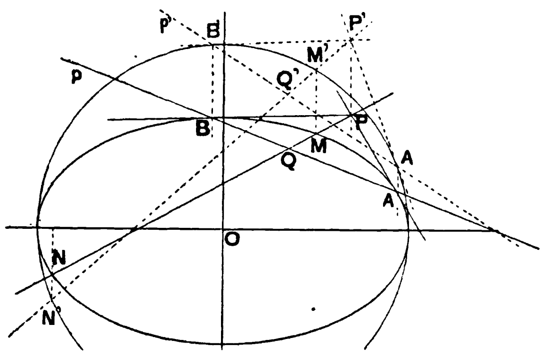
Přímka ellipsu buď protíná ve dvou bodech, nebo se jí dotýká, nebo nemá bodu s ní společného. Je-li tedy předložena úloha (zřejmě kvadratická) „určiti průsečíky přímky s ellipsou“, nastává zase otázka, zdali je možno v každém případě přisouditi těmto dvěma čarám dva a právě dva průsečíky.

K zodpovědění této otázky je třeba předeslati několik pomocných vět.

20. Za známou pokládáme větu: *Jestliže v rovině ellipsy o délkách poloos a, b prodloužíme všechny délky rovnoběžné s vedlejší osou a měřené od hlavní osy* (nad osu i pod ni) *v poměru a : b, přejde ellipsa v kružnici o poloměru a, ellipse opsanou.**) Pravíme, že ellipsa a tato kružnice jsou sdruženy v *affinitě*; provésti tuto affinitu znamená prodloužiti délky ve zmíněném poměru; provésti obrácenou affinitu znamená tytéž délky v témže poměru zkrátiti.

*) V. Strnad, Geometrie pro reálky díl III., str. 104 (vyd. III.).

Z toho plyne velmi jednoduchá konstrukce reálných průsečíků přímky p s ellipsou, jejíž jsou dány obě poloosy a střed O (v. obr. 8.). Sestrojme opsanou kružnici a přímku p', jež s p se protíná na hlavní ose a na vedlejší ose utíná úsek, jenž se má k příslušnému úseku přímkou p uťatému jako $a : b$. Kolmice spuštěné z průseků A', B' přímky p' s kružnicí na hlavní ose protnou přímku p v průsecích A, B přímky s ellipsou.



Obr. 8.

Odůvodnění této konstrukce přenechávám čtenáři; plyne ihned z affinity obou útvarů.

21. Vytkněme v rovině (v. obr. 8.) určitý bod P', ležící mimo kružnici, a určeme jeho poláru p' vzhledem ke kružnici. Veďme bodem P' libovolný paprsek, jenž protne kružnici v bodech M', N', poláru v bodu Q'. Pak, jak známo, body P', Q' jsou harmonicky sdruženy vzhledem k bodům M', N'. Provedeme-li obrácenou affinitu, přejde kružnice v ellipsu, polára p' přejde v přímku p a body P', M', N', Q' v body P, M, N. Q ležící také na přímce. Je pak hned jasno, že sice vzdálenosti bodů P, M. Q, N jsou jiné než vzdálenosti bodů P', M', Q', N', avšak jejich poměry jsou stejné, takže na př. $QM : PM = Q'M' : P'M'$ atd. *Tvoří tedy body P, M, Q, N také harmonickou čtveřinu.* Přímka p' protne kružnici v dotyčných bodech tečen z P' vedených; protne tedy p ellipsu v dotyčných bodech tečen z P vedených (jak snadno lze vážiti). Je tedy p polára bodu P vzhledem k ellipse a z předchozího plyne věta: *vedeme-li*

daným bodem vně ellipsy libovolný paprsek, jenž protne ellipsu ve dvou reálných bodech, pak tyto body oddělují harmonicky oba průseky paprsku s ellipsou. Jinými slovy: harmonická vlastnost poláry u kružnice přenáší se také na ellipsu.

(Je jasno, jak lze na základě předchozích úvah sestrojiti tečné z bodu k ellipse, což přenechávám čtenáři.)

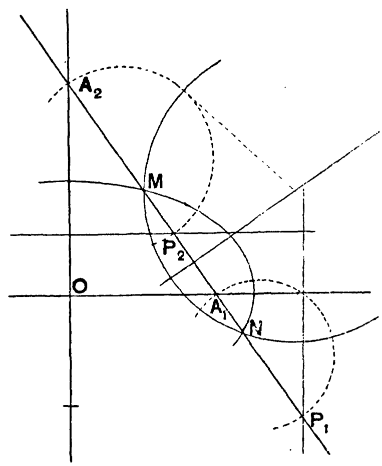
22. Je-li, dán bod P uvnitř kružnice, pak jeho polára p' není již spojnice dotyčných bodů tečen z P' vedených avšak zůstává v platnosti harmonická vlastnost poláry. Je tedy patrno (a důkaz je zcela totožný s předchozím), že vytkneme-li bod P uvnitř ellipsy, *geometrické místo bodů Q, jež s bodem P jsou harmonicky sdruženy vzhledem k průsekům paprsků z P vedených s ellipsou, je přímka p,* kterou také nazveme *polárou* bodu P vzhledem k ellipse.

Zároveň je z předchozího patrno, jak lze užitím pomocné kružnice K k libovolnému bodu P' sestrojiti poláru vzhledem k ellipse.

Zvláště jednoduchá je konstrukce poláry, je-li bod P na některé ose. Je-li na př. na ose hlavní, je jasno, že jeho polára je rovnoběžna s osou vedlejší, a obdržíme ji, když určíme bod, jenž je s P harmonicky sdružen dle obou vrcholů ellipsy. Zcela stejně si počínáme, je-li P na ose vedlejší.

23. Jestliže k libovolnému bodu A přímky p sestrojíme poláru vzhledem k ellipse, jež protne p v bodě B, nazveme zase *A, B dvojicí bodů na p polárně sdružených vzhledem k ellipse.* Provedeme-li affinitu, kterou přejde ellipsa v kružnici K, přejde každá dvojice A, B ve dvojici bodů A', B' polárně sdružených vzhledem ke kružnici K. Ale všechny tyto dvojice na p' tvoří koncové body průměrů kružnic svazku (toho totiž, jehož kružnice protínají K kolmo, v. odst. 15.), a platí tedy pro jich vzdálenosti a', b' od pevného bodu P' vztah $a'b' =$ konst. Jestliže opět přejdeme od kružnice k ellipse, přejde bod P' v bod P; ale poměr délek na p' a jim odpovídajících na p je stálý (viz napřed), i je patrno, že také pro vzdálenosti a, b bodů A, B od P platí $ab =$ konst. (konstanta jiná než nahoře). Tvoří tedy také dvojice A, B koncové body průměrů kružnic svazku (dle odst. 10., věta druhá); ale pak víme, že existuje jediná dvojice bodů,

jež všechny dvojice A, B odděluje harmonicky (v. odst. 12.). Tato dvojice je reálná nebo imaginárná. Jestliže p protíná ellipsu v bodech reálných, pak právě tyto body tvoří onu dvojici, jak je ihned patrno z odst. 21. *Jestliže však ellipsa neprotíná přímku v bodech reálných, nemůže existovati reálná dvojice žádané vlastnosti, ale pak existuje (jak víme) jediná dvojice imaginárných bodů sdružených, jež harmonicky oddělují všechny ony dvojice.* Chceme-li tedy úloze: „určiti průsečíky přímky s ellipsou" přisouditi v každém případě řešení, musíme

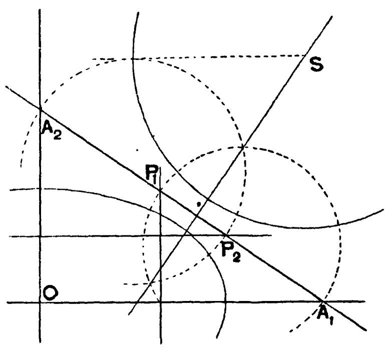


Obr. 9.

prohlásiti tuto dvojici za průseky ellipsy s přímkou. I máme větu: *průseky (ať reálné nebo imaginárné) ellipsy s přímkou jsou ty dva body, jež harmonicky oddělují všechny dvojice polárně sdružených bodů na přímce.*

24. Na základě toho lze sestrojiti průseky dané přímky s ellipsou, uvážíme-li, že stačí na dané přímce určiti dvě ony dvojice, o nichž je řeč v předchozím odstavci. Volíme ovšem takové dvě dvojice, jež se snadno sestrojí. Ellipsa je dána středem a délkami obou poloos.

I. Případ reálných průseků (v. obr. 9.). Daná přímka nechť protne obě osy v bodech A_1, A_2. Sestrojíme (dle odst. 22.) poláry obou těchto bodů; ty protnou danou přímku v bodech P_1, P_2. A_1P_1; A_2P_2 jsou dvě dvojice polárně sdružené dle ellipsy; sestrojíme-li známým způsobem (konstrukce je v obr. 9. naznačena) dvojici M, N harmonicky sdruženou vzhledem k oběma těmto dvojicím, obdržíme tím dle předchozí věty průseky ellipsy s přímkou. Ovšem je tato konstrukce zbytečně složitá; užijeme vždy raději konstrukce uvedené v odst. 20. (nebo některé jiné, jež se pro tuto úlohu udávají). Avšak výhoda této konstrukce je v tom, že jí lze užíti i v případě, kdy p protíná ellipsu v bodech imaginárných (v. obr. 10.).



Obr. 10.

II. Sestrojíme i v tom případě body A_1, A_2, k nim poláry, čímž nabudeme bodů P_1, P_2. Obě dvojice A_1, P_1; A_2, P_2 se navzájem oddělují; existuje tedy jediná dvojice imaginárných bodů sdružených, jež harmonicky odděluje obě tyto dvojice. Avšak tu dovedeme sestrojiti, t. j. dovedeme udati kružnici (určitěji celý svazek kružnic), jež protíná danou přímku v obou imaginárných bodech sdružených. Tím jsou oba imaginárné průsečíky přímky s ellipsou sestrojeny, neboť imaginárné body pokládáme za sestrojeny, je-li dána přímka a kružnice, jež ji v těchto bodech protíná (v obr. přímka A_1A_2 a kružnice o středu S).

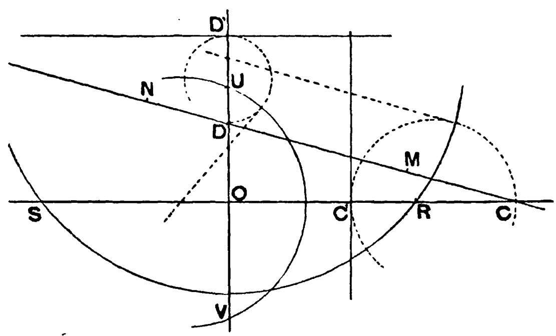
Zároveň vychází z předchozího na jevo, že *ellipsa a pomocná kružnice mají na přímce dané tytéž dvojice polárně sdružených bodů.*

§ 6. Ellipsa určená imaginárnými body.

25. Obrátíme se k úloze opačné: ke *konstrukci ellipsy z dvou imaginárných bodů sdružených (a jiných potřebných určujících částí)*. Sestrojiti ellipsu znamená pro nás, určiti její střed a obě poloosy; neboť v tom případě dovedeme najíti její ohniska a sestrojiti pak libovolný počet jejích bodů.

26. Provedeme napřed zase tutéž úlohu pro body reálné. Dokážeme větu:

Ellipsa je určena jednoznačně, dán-li její střed, směr jedné (a tedy i druhé) osy a dva reálné body.

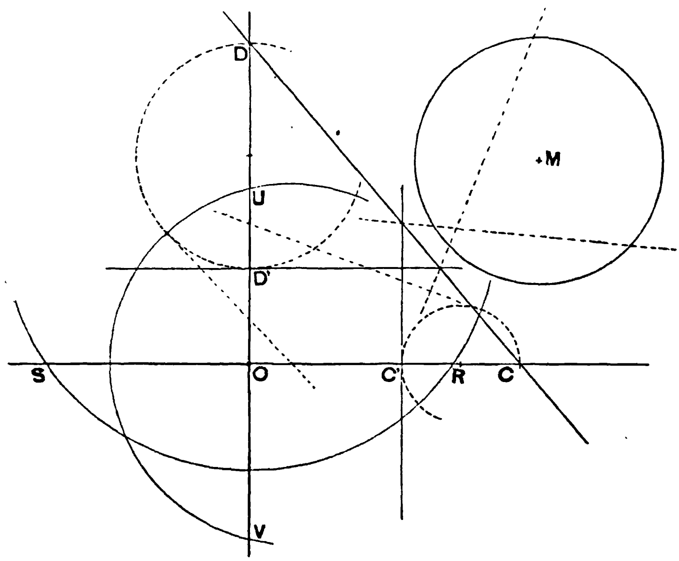


Obr. 11.

Důkaz provedeme tím, že ellipsu skutečně sestrojíme (ve smyslu právě vyloženém). Vyloučíme případ, že by jeden nebo oba body ležely na jedné nebo druhé ose; v tom případě se ovšem obecná konstrukce, jak ji udáme, značně zjednoduší, což ponechávám úvaze čtenářově.

Budiž (obr. 11.) O střed hledané ellipsy, jímž procházejí obě kolmé osy; M, N oba dané body, jimiž má ellipsa procházeti. Spojnice MN protne hlavní osu v bodu C, vedlejší v bodu D. Určeme bod harmonicky sdružený s C dle M, N; kolmice s něho na osu spuštěná je polára bodu C vzhledem k hledané ellipse (jak ihned vysvítá z odst. 22.). Nechť protne hlavní osu v bodu C'. Podobně určeme bod harmonicky sdružený s D dle

M, N; kolmice s něho spuštěná na osu vedlejší je polára bodu D; nechť protne vedlejší osu v bodu D'. Pak je jasno, že oba vrcholy ellipsy na hlavní ose ležící, R, S, jsou harmonicky sdruženy vzhledem k oběma bodům C, C' (neboť toto je dvojice polárně sdružených bodů na přímce, jejíž průseky s ellipsou jsou R, S). Mimo to víme, že tyto body jsou souměrné dle středu O. I je jasno, že nabudeme bodů R, S konstrukcí známou z odst. 13. I., jen zjednodušenou. Sestrojíme kružnici mající CC' za průměr. Každá kružnice sekoucí kolmo tutò kružnici protne hlavní osu ve dvou bodech harmonicky sdružených vzhledem k C, C'; ježto R, S mají býti souměrné dle O, musíme voliti kolmou kružnici, jejíž střed je na ose vedlejší. Ta protne



Obr. 12.

hlavní osu v hledaných bodech R, S. Je jasno, že každá kružnice kolmá ke kružnici o průměru CC' a mající střed na ose vedlejší prochází těmito dvěma body dle věty v odst. 11. I. Zcela stejně najdeme vrcholy ellipsy U, V na ose vedlejší.

Tím je ellipsa ve smyslu nahoře udaném sestrojena, a zároveň předložená věta dokázána.

27. Obraťme se k úloze: sestrojiti ellipsu danou středem O, směrem jedné (a tedy i druhé) osy a dvěma imaginárnými body sdruženými (obr. 12.).

Oba imaginárné body jsou dány kružnicí o středu M a přímkou, jež s ní nemá reálných bodů společných. Ježto tato kružnice a hledaná ellipsa mají protnouti danou přímku v týchž dvou bodech, musí každá dvojice bodů na ní polárně sdružených dle této kružnice býti zároveň dvojicí polárně sdružených bodů dle ellipsy (dle odst. 24., na konci). Přímka daná nechť protne osy v bodech C, D. Určeme body k nim polárně sdružené vzhledem ke kružnici; ty jsou s nimi polárně sdružené také vzhledem k ellipse a proto kolmice s nich spuštěné na osy jsou poláry obou bodů vzhledem k ellipse. Avšak dvojicemi bodů C, C' a D, D' jsou vrcholy ellipsy určeny a lze je sestrojiti jako v případě předchozím.

28. Doporučuji čtenáři, aby způsobem, jenž v předchozím byl vyložen, řešil úlohy: *a*) určiti průsečíky přímky s parabolou (reálné i imag.); *b*) sestrojiti parabolu určenou osou a dvěma body (reálnými nebo imaginárnými); *c*) určiti průsečíky koule s přímkou; *d*) sestrojiti kouli ze čtyř bodů: α) dva reálné, dva imaginárné sdružené; β) dva a dva imaginárné sdružené.

Kometa Halleyova.

Po průchodu přísluním v noci ze dne 19. na 20. duben jasnost komety značně stoupla, neboť již v posledních dnech dubnových došly z různých míst zprávy, že spatřena byla pouhým okem. Ještě dne 18. dubna bylo možno ji spatřiti jen dalekohledem. Toho dne mezi čtvrtou a pátou hodinou ranní pozoroval ji F. Quénisset na hvězdárně v Juvisy u Paříže dalekohledem světlosti 0·24 *m*. Velikost její byla 3. až 2., barva nažloutlá, jádro brillantní a velmi zřetelné; hlava zářila intensivněji na straně Slunci přivrácené a vysílala na opačnou stranu dva krátké vějířovitě se rozvírající ohony. Až do 19. května blížila se kometa stále k Zemi nabývajíc většího lesku. Dle výpočtů M. Ebella (Astr. Nachr. 4400), provedených na základě pozorování z r. 1835—1836, dosáhla největší jasnosti v polovici května,