

# Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

---

Bohuslav Hostinský

Čtyři přednášky o různých problémech teoretické fysiky

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 61 (1932), No. 2, 33--80

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/121234>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1932

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## Čtyři přednášky o různých problémech teoretické fyziky.

*Bohuslav Hostinský.*

(Došlo 15. září 1931.)

Uveřejňuje tyto přednášky, které jsem konal ve dnech 4. až 7. května 1931 na přírodovědecké fakultě Karlovy university na pozvání jejího profesorského sboru, děkuji panu děkanovi fakulty, prof. B. Bydžovskému a svým pražským kolegům za to, že mne vyznamenali tímto pozváním, kterého si velice vážím.

### I. Nové směry ve statistické mechanice.

Rozdíl mezi metodami, které nazývám novými ve statistické mechanice, a metodami staršími naznačil bych stručně takto: Abychom pochopili vývoj nějakého složitého systému (na př. plynu, který se skládá z velikého množství molekul), vezmeme v úvahu nejprve pohyb molekul, jenž je stanoven jednak zákony mechaniky, jednak počáteční konfigurací molekul a jejich počátečními rychlostmi. Pak si představíme pohyby jiné, odpovídající po řadě různým jiným počátečním podmínkám. A z řady takovýchto „modelů“, z nichž každý odpovídá přesně určenému a do nekonečna prodlouženému pohybu molekul, hledí klasická mechanika činiti závěry o tom, jaký je skutečný vývoj plynu. Naproti tomu nové směry, které, jak myslím, odvozují se hlavně z Borelových prací,<sup>1)</sup> opouštějí v určitém smyslu pojem trajektorie přesně definované počátečními podmínkami; využívají důsledně počtu pravděpodobnosti a zakládají teorii na výpočtu pravděpodobností

<sup>1)</sup> E. Borel: *Introduction géométrique à quelques théories physiques* (Paris 1914), viz hlavně dodatky, kde jest otištěna práce o kinetické teorii plynů (*Annales de l'École Normale Supérieure* 1906).

E. Borel: *Mécanique statistique* (*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, IV, 2; 1915).

E. Borel: *Mécanique statistique classique* (*Traité du Calcul des probabilités* t. II, fasc. III; rédigé par F. Perrin, Paris 1925).

pro určité konfigurace nebo pro přechody z jedné konfigurace do druhé.

První naší úlohou bude zabývat se otázkou, jaký je rozdíl mezi pohybem bodu a mezi pohybem nekonečně malého elementu hmoty spojitě rozložené. Kdykoli se jedná o pohyb hmotné částice, jejíž tvar ani velikost se během času nemění, nečiní obtíží představovati si částici, pokud je dosti malá, jako pohyblivý bod. Ale jsou jiné případy, kdy musíme pozorně rozeznávat hmotný bod od elementu hmoty. Představme si, že uvnitř nádoby naplněné nestlačitelnou tekutinou (nebo v nekonečném prostoru) jest ustálený pohyb. Předpokládáme, že tekutina vyplňuje prostor spojitě a že tedy složky rychlosti, kterou má některý hmotný bod  $(x, y, z)$  tekutiny, jsou danými funkcemi souřadnic:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = h(x, y, z). \quad (1)$$

Podmínka nestlačitelnosti vyjadřuje se rovnicí

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0; \quad (2)$$

na stěnách nádoby je normální složka rychlosti rovna nule, tedy, jsou-li  $\lambda, \mu, \nu$  směrové kosiny normály ke stěně,

$$\lambda f + \mu g + \nu h = 0.$$

Rovnicemi (1) je v každém bodě  $(x, y, z)$  definován směr trajektorie; pohyb hmotného bodu, který se v počátečním okamžiku nalézá v dané poloze, je jimi jednoznačně stanoven. Tak jsou určeny trajektorie bodů, nikoli však dráhy nekonečně malých elementů tekutiny; to je třeba blíže objasnit. Budiž  $d\tau_A$  nekonečně malý element prostoru v poloze  $A$ ; vytkněme v něm libovolné body  $A_1, A_2, A_3, \dots$  a sledujme dráhy opsané hmotnými body, které na počátku (v okamžiku  $t = t_0$ ) se nacházely v polohách resp.  $A_1, A_2, A_3, \dots$ . Dráha každého z těch bodů je stanovena rovnicemi (1) a považujeme proto v libovolně zvoleném okamžiku  $t$  ( $t > t_0$ ) polohy  $B_1, B_2, B_3, \dots$  všech těch hmotných bodů za přesně definované. Každému geometrickému bodu zvolenému uvnitř  $d\tau_A$  v okamžiku  $t_0$  za počáteční polohu odpovídá takto v okamžiku  $t$  určitý jiný bod. Soubor bodů, odpovídajících všem bodům obsaženým v  $d\tau_A$ , naplňuje určitou část prostoru. Můžeme ji označiti  $d\tau_B$ , značíc písmenem  $B$  polohu toho hmotného bodu v okamžiku  $t$ , jenž byl v okamžiku  $t_0$  v poloze  $A$ ? Odpověď zní, že je to možno, pokud doba  $t - t_0$  není příliš dlouhá. Z podmínky nestlačitelnosti (2) plyne, že celkový objem našeho souboru bodů, který v okamžiku  $t_0$  vyplňoval element  $d\tau_A$ , se během času nemění. Netrvá-li pohyb příliš dlouho, nejenom objem zůstává

beze změny, nýbrž i tvar pohybujícího se elementu mnoho se nemění; nekonečně malý element  $d\tau_A$  přechází ve stejně veliký element  $d\tau_B$ . Ale po uplynutí velmi dlouhé doby ztrácí označení  $d\tau_B$  smysl, neboť vzájemné vzdálenosti jednotlivých bodů uvažovaného souboru stále rostou, takže soubor, ač nemění svého objemu, nabývá bizarního „houbovitého“ tvaru. Tato „houba“ se rozšíří po uplynutí dosti dlouhé doby obecně tak, že každý krychlový milimetr, zvolený kdekoli uvnitř nádoby, jí kus obsahuje, nechť byl původní element  $d\tau_A$  jakkoli malý. Lze-li tedy mluvit o určitých drahách jednotlivých bodů, nelze mluvit o tom, že by se elementy takové jako  $d\tau_A$  pohybovaly podél určitých trajektorií. Volíme-li předem dobu  $t - t_0$  jakkoli dlouhou, dá se ovšem element  $d\tau_A$  voliti tak malý, že mu odpovídá zase element  $d\tau_B$ , ale při dalším pohybu promění se element konečně v „houbu“.

Vzpomeňme, jak se mění kapička červeného inkoustu, kápnutá do litru vody; jednotlivé její částičky postupují difusí na všechny strany až se celý litr růžově zbarví. Kdyby tekutina byla kontinuum, skládal by se každý její element z bodů, jejichž dráhy by byly dány rovnicemi (1). Ale tekutina je složena z molekul, kapička červeného inkoustu dělí se difusí až na molekuly; pohyb molekul je pak něco docela jiného než pohyb oněch ideálních bodů.<sup>2)</sup>

Uvažujme nyní o pojmu hustoty nějaké tuhé látky. Kdyby látka byla přesně homogenní, rovnala by se hustota úhrnné hmotě dělené objemem. V případě, že látka není homogenní, zavádíme pojem hustoty proměnné od místa k místu; definujeme ji jako poměr hmoty obsažené v nekonečně malé části prostoru k jejímu objemu. Ale vezmeme-li ohled na molekulovou strukturu hmoty, musíme říci, že takový „nekonečně malý“ element, který má sloužit ke stanovení lokální hustoty, nesmí býti ani příliš velký ani příliš malý. Kdyby byl příliš velký, takže lokální hustota by byla v některých jeho místech větší než v jiných, nedefinovala by se hustota správně poměrem jeho hmoty k jeho objemu. Kdybychom naopak rozdělili prostor zaujatý danou látkou na velmi malé krychličky, mohlo by se státi, že by některé z nich padly do mezer mezi molekulami, takže by daly hustotu rovnou nule.

Po těchto přípravných úvahách všimněme si *definice entropie*. Je-li možno převést nějakou soustavu z dané počáteční konfigurace 1 do jiné konfigurace 2 zvratnými pochody, má integrál

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T},$$

<sup>2)</sup> Zajímavé úvahy o míchání kapalin uvádí J. W. Gibbs v díle: *Elementare Grundlagen der statistischen Mechanik* (přel. Zermelo, Leipzig 1905, kap. XII). Viz též H. Poincaré: *Calcul des probabilités* 2<sup>e</sup> édition (Paris 1912, p. 320).

kde  $dQ$  značí element dodaného tepla,  $T$  absolutní teplotu a kde integrace se vztahuje k nějakému zvratnému pochodu z 1 do 2, hodnotu stejnou pro všechny možné zvratné pochody vedoucí z 1 do 2. Z toho plyne, že  $dQ/T$  jest úplný diferenciál jakési funkce; a ta funkce je právě entropie. K této definici připojíme dvě poznámky.

Předně vzpomeňme, že ve všech spisech o thermodynamice se uvažuje vlastně jen o soustavách homogenních, t. j. takových, že jejich stav jest určen několika veličinami, na př. teplotou a tlakem; předpokládá se, že teplota je ve všech částech soustavy stejná a podobně o tlaku. Vůbec se nepřihlíží k případům, kdy je teplota od místa k místu proměnlivá. Ale zdá se, že někteří autoři, Clausiem počínaje, jsou nakloněni přisuzovati větám thermodynamickým platnost naprosto všeobecnou. Jen málo kde dočteme se o tom, jak obtížno je rozšířiti Clausiovu definici entropie na systémy nehomogenní. Poincaré o tom uvažoval<sup>3)</sup> a z jeho výkladů plyne, že nutno opatrně užívati pojmu entropie. Teoretikové, kteří podle Boltzmannova definují entropii, jakožto logarithmus pravděpodobnosti, mají oporu v této nové definici k rozšíření pojmu entropie na systémy nehomogenní. Definice entropie pravděpodobností má své obtíže, kterých prozatím nebudu rozebírat. Nás nyní zajímá otázka, je-li možno rozšířiti definici Clausiovu na systémy nehomogenní. Mějme na mysli na př. plyn uzavřený v nádobě, v němž teploty nejsou vyrovnány. Sledujme, jak se mění nějaká jeho část, která původně zaujímá element prostoru  $d\tau_A$ . Molekuly se pohybují, přicházejí do různých poloh; můžeme definovati v každém okamžiku  $dQ$  a  $T$  pro souhrn molekul, které v počátečním okamžiku  $t_0$  vyplňovaly element  $d\tau_A$ ? A můžeme vypočítati hodnotu hořejšího integrálu (entropii) pro tento souhrn molekul? Stran  $dQ$  není obtíže; přijaté teplo není nic jiného než přírůstek kinetické energie molekul. Ale definice teploty stává se během času pro náš souhrn molekul nemožnou. Neboť molekula, která svou kinetickou energii, čili své teplo, nese s sebou, nenese s sebou své teploty. Vždyť teplota  $T$  jest úměrná střední kinetické energii jedné molekuly a je v okamžiku  $t_0$  vypočítána podle těch molekul, které naplňovaly element  $d\tau_A$ . Pokud vývoj plynu netrvá dlouho, můžeme  $T$  počítati, neboť molekuly jsou ještě pohromadě. Ale jakmile se během času dostanou do větších vzdáleností, stane se, že jedna molekula bude v místě, kde je teplota  $T_1$ , druhá pak v místě, kde je jiná teplota  $T_2$  atd. Onen souhrn molekul, který původně byl uvnitř elementu  $d\tau_A$ , nemá pak vůbec žádné teploty. Výsledek je, že žádný element plynu nenese sebou své entropie ve smyslu (Clausiovy) definice integrálem; není možno definovati entropii nehomogenního plynu součtem entropií jeho částí.

<sup>3)</sup> H. Poincaré: Thermodynamique, Paris 1892, No. 174 a násl.

Druhá poznámka týká se časového průběhu celého děje, když plyn je sám sobě ponechán. Carnot, zakladatel thermodynamiky, projevil nejvíce důmyslu právě v tom, jak obratně užil nejobtížnějšího fyzikálního pojmu zvrtnosti přechodů; ačkoli není zvrtných dějů, přece lze podle Carnota realizovati je přibližně procesy pomalu probíhajícími, takže soustava má v každém okamžiku vyrovnanou teplotu, jen velmi pomalu se měnící. Thermodynamika je vlastně statika, ve které se srovnávají statické vlastnosti homogenních systémů; toto stanovisko zdůrazňuje zvláště Kohnstamm v novém zpracování thermodynamiky van der Waalsovy, kterou nazývá „thermostatikou“.<sup>4)</sup> Čas se nevyskytuje nikde v thermodynamických rovnicích. Chceme-li sledovati skutečný průběh thermických a vůbec fyzikálních změn, musíme vždy přibrati na pomoc principy docela jiné, než jsou obě základní věty thermodynamiky či správněji řečeno thermostatiky. Za těchto okolností, když definice entropie pro nehomogenní systémy ztrácí smysl, je ku podivu a usuzovati o „tepelné smrti“, ke které svět svým vývojem se blíží. Jest otázka, lze-li celý svět považovati za izolovaný systém v nekonečnu položený, a již z toho důvodu jsou všechny úvahy založené na pojmu „entropie všehomíra“ pochybené.<sup>5)</sup>

To, co jsme dříve uvedli o postupné deformaci tekutinových částic, dá se bez podstatných změn přenést do prostorů o libovolném počtu rozměrů; výsledky lze pak aplikovati na problémy *statistické mechaniky*.

Předpokládejme, že je dán nějaký složitý konservativní mechanický systém (na př. soustava molekul plynu), jehož konfigurace se určuje  $n$  parametry  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Pohybové rovnice ve tvaru Langrangeově nebo Hamiltonově určují jednoznačně pohyb systému, jsou-li v počátečním okamžiku  $t_0$  dány hodnoty souřadnic  $q_i$  i jejich derivací podle času. Obyčejně se užívá Hamiltonových rovnic 1. řádu, neznámými veličinami jsou  $q_i$  a „momenty“  $p_i$ , určené rovnicemi

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$$

$T$  je kinetická energie soustavy. Pohyb soustavy zobrazíme pohybem bodu  $M$  v  $2n$  rozměrném „fázovém prostoru“; jeho souřadnice jsou  $q_i$  a  $p_i$ . Veličiny  $p_i$  jsou lineární funkce derivací  $\dot{q}_i$ .

<sup>4)</sup> J. D. v. d. Waals - Ph. Kohnstamm: Lehrbuch der Thermostatik das heisst des thermischen Gleichgewichtes materieller Systeme, zugleich dritte Auflage des Lehrbuches der Thermodynamik derselben Verfasser. Leipzig 1927, I, II.

<sup>5)</sup> Srv. též Dr. J. Bašta: O energetickém hospodářství přírodním a průmyslovém (Masarykova Akademie práce, 1926).

Pohyb bodu  $M$  jest určen Hamiltonovými rovnicemi, je-li v okamžiku  $t_0$  známa jeho poloha ve fázovém prostoru, docela podobně, jako byl stanoven pohyb bodu v tekutině rovnicemi (1). Každým bodem fázového prostoru jde obecně jedna trajektorie. Obdoba jde ještě dále. Sestrojíme všechny trajektorie, jež v okamžiku  $t_0$  procházejí body ležícími uvnitř daného elementu  $d\tau_A$  ve fázovém prostoru. Po uplynutí libovolně dlouhé doby vyplní pohyblivé body určitou část prostoru, která má objem

$$\iint \dots \int dq_1 dq_2 \dots dq_n dp_1 dp_2 \dots dp_n,$$

přesně rovný objemu elementu  $d\tau_A$  (Liouvilleova věta). Pohyby bodů  $M$  ve fázovém prostoru jsou tudíž obdobny pohybům bodů v nestlačitelné tekutině. Platí zde totéž, co jsme řekli o postupné deformaci elementů tekutiny v obyčejném prostoru. Po uplynutí dosti dlouhé doby budou body, které původně ležely uvnitř  $d\tau_A$ , vyplňovati „houbovitě rozvětvenou“ část prostoru, která nemůže býti považována za element  $d\tau_B$ . Body mají zase zcela určité dráhy; elementy fázového prostoru však nikoli. Ač tato věc byla již vyložena,<sup>6)</sup> přece není známa všeobecně. Někteří autoři se domnívají, že element  $d\tau_A$  vytvoří svým pohybem jakousi „kanálovou plochu“ (podobně jako pohyblivá koule v obyčejném prostoru) a že tato kanálová plocha se nerozvětjuje a že tedy každý element  $d\tau_A$  postupuje podél určité dráhy. Kdyby tomu tak bylo, některé úvahy ve statistické mechanice by se zjednodušily; ve skutečnosti tomu však tak není. Body obsažené původně uvnitř elementu  $d\tau_A$  rozptylují se tak že po uplynutí dosti dlouhé doby naplňují rozvětvený útvar, jenž vniká do všech částí fázového prostoru.

Je zajímavo sledovati, jak si badatelé v kinetické teorii plynů a ve statistické mechanice pomáhali, tvoříce *matematické hypotesy*, které se později ukázaly nesprávnými a kterým někdy i sami jejich původci plně nevěří. *Základní problém kinetické teorie plynů* zní takto: v počátečním okamžiku je plyn nehomogenní, má v různých místech různé teploty; jak si máme představití spontánní vyrovnání teplot, které, jak zkušenost učí, se dostaví po určité době? Připouštíme, že molekuly plynů chovají se jako dokonale pružné koule a že stěny nádob jsou rovněž dokonale pružné. Jaký bude pohyb bodu  $M$ , jenž zobrazuje systém molekul plynu? Úloha je velmi složitá. Boltzmann činí tuto „ergodickou“ hypotetu:<sup>7)</sup> Bod  $M$  proběhne postupně všemi těmi body fázového

<sup>6)</sup> Viz pěkný výklad v knize Borelově: *Mécanique statistique classique* citované v pozn.<sup>1)</sup>

<sup>7)</sup> L. Boltzmann: *Vorlesungen über Gastheorie I, II* (Leipzig 1896—99). Srv. též francouzský přehled *Leçons sur la théorie des gaz*, Paris 1902—05 s poznámkami M. Brillonnina.

prostoru, které odpovídají konfiguracím o kinetické energii  $E$ ; soustava má na počátku pohybu úhrnnou kinetickou energii  $E$ , která se během času nemění. Z toho se pak usoudí: poněvadž velmi velká část té dráhy probíhá konfiguracemi, pro něž platí (přibližně) Maxwellův zákon o rozdělení rychlostí molekul, je velmi pravděpodobno, že po uplynutí velmi dlouhé doby dostaví se v plynu právě toto rozdělení rychlostí. Ale ukázalo se, že ergodická hypotese je nesprávná.<sup>8)</sup> Proto činěny byly pokusy nahraditi ji hypotésami jinými. Název „ergodický“ a „kvasiergodický“ z některých novějších spisů již vymizel. Ale v podstatě objevují se takové hypotésy dále, v jiných podobách. Tak v díle Jeansově<sup>9)</sup> o kinetické teorii plynů a ve Fowlerově statistické mechanice. Fowler zavádí hypotésu podobnou ergodické, vyvozuje z ní důsledky, ale přes to nazývá ji jen „pious hope“ (zbožná naděje).<sup>10)</sup> Skutečně nezbyvá teoretikům, kteří se snaží pochopiti vývoj plynu na základě do nekonečna prodloužených ideálních trajektorií, než uchýlovati se k novým, logicky neodůvodněným matematickým hypotésám, jako byla hypotésa ergodická. Domnívám se, že tato cesta je na-prosto neschůdná.

Obtíže, které se vyskytují při konstrukci takových hypotés a jejich aplikací, dají se odstraniti, přijmeme-li stanovisko, které zaujali Poincaré, Borel a Smoluchowski. Podle Poincaréa můžeme přirovnati problémy o postupné difuzi k úloze o míchání karet;<sup>11)</sup> když se postupně míchání opětuje, ptáme se jen na pravděpodobnosti, se kterými se různé sestavy karet vyskytují. Tak také v teorii plynů běží vlastně jen o pravděpodobnosti, nikoli o zjištění drah, které molekuly skutečně opisují. Borel vyslovil v práci o kinetické teorii plynů (uveřejněné v roce 1906; viz pozn.<sup>1)</sup>) názor, že samočinné vyrovnávání teploty v plynu má svou příčinu v tom, že plyn nikdy není úplně izolován od vnějších vlivů. I kdybychom nádobu s plynem izolovali tepelně naprosto dokonale, nemohli bychom nikdy odstraniti vnější vlivy, na př. gravitační síly. Když nějaká hmota, řekněme 1 kg, velmi vzdálená od nádoby s plynem, se trochu pohne, změní se gravitační pole uvnitř nádoby a molekuly plynu se uchýlí, třebaš velmi málo, od svých původních drah. Ale protože každá molekula prodělá za vteřinu biliony srážek s ostatními, hromadí se během času úchyly od ideálních

<sup>8)</sup> Viz na př. A. Rosental a M. Plancherel v *Annalen der Physik* 42, 1913, p. 796 a 1061.

<sup>9)</sup> J. H. Jeans: *The dynamical Theory of Gases*, 3rd edition, Cambridge 1921.

<sup>10)</sup> R. H. Fowler: *Statistical Mechanics*, Cambridge 1929, p. 12.

<sup>11)</sup> H. Poincaré: *Calcul des probabilités* 2e édition, 1912, p. 301. Pojednal jsem obsírně o této úloze v souvislosti s obecnějšími teoriemi Markovovými v práci o pravděpodobnosti zjevů, jež jsou spojeny v Markovovy řetězy (Sborník Přírodovědecký, VI, p. 289—340; Praha 1929).



trajektorií, jež by platily pro molekuly plynu absolutně izolovaného od všech vnějších vlivů, a po uplynutí delší doby probíhají molekuly po naprosto jiných drahách než jaké předvídáme podle zákonů mechaniky a podle počátečních podmínek.<sup>12)</sup>

Ptejme se nyní: Jak zní problém počtu pravděpodobnosti o spontánním vývoji plynu, původně nehomogenního, do stavu homogenního, kde teplota je ve všech místech stejná?

Představme si všechny možné případy, jak vůbec mohou býti rychlosti mezi molekuly rozděleny. Úhrnná kinetická energie je, nepůsobí-li na plyn vnější vlivy, konstantní. Může tedy nastati na př. ten případ, že jenom několik málo molekul má velmi velikou rychlost, kdežto ostatní mají rychlost jen zcela nepatrnou. Ale takovýchto extrémních případů je celkem málo; převážná část všech možných případů odpovídá stavům, ve kterých mnoho molekul má rychlost nelišící se mnoho od jakési střední hodnoty, takže těch molekul, které mají rychlosti buď extrémně velké nebo extrémně malé, je poměrně málo. Reservujeme slovo „konfigurace“ pro to, čemu se někdy říká také „mikroskopický stav“; konfigurace je definována, když je dána okamžitá poloha i okamžitá rychlost každé jednotlivé molekuly. Kdybychom mohli považovati všechny konfigurace za stejně pravděpodobné, měli bychom již podklad k důkazu, že rychlosti jsou v plynu rozděleny podle Maxwellova zákona. Je tedy třeba zjistiti, vyvinuje-li se plyn vskutku tak, že všechny konfigurace se stávají stejně pravděpodobnými. K tomu směřovala bez úspěchu ergodická hypotese; nové teorie dávají nám za ni výsledek mnohem přesnější. Počátkem roku 1928 uveřejnil jsem v *Comptes Rendus* dva články, ve kterých jsem ukázal, jak se dají počítati pravděpodobnosti pro opětované přechody bodu z jedné polohy do jiné; hned po uveřejnění mé práce psal o věci Hadamard, jenž krátce na to v článku o ergodickém principu ukázal, jak nová metoda nahradí to, co se dříve odvozovalo z ergodické hypotese.<sup>13)</sup> Později jsem shledal, že již Markov v letech 1908—1922 zabýval se, se stanoviska algebraického, obecnými úvahami o těchto problémech a že došel ke skvělým výsledkům.<sup>14)</sup> V teorii Brownova pohybu pracoval asi v téže době Smoluchowski, jenž ukázal, jak se pravděpodobnosti počítají užitím diferenciálních rovnic parciálních a rovnic

<sup>12)</sup> Krásný výklad Borelových názorů a kritikou diskusi základů kinetické teorie plynů podává G. Castelnuovo (*Calcolo delle probabilità*, Milano 1919, Cap. XIII; 2<sup>a</sup> edizione, Bologna 1928; II, Cap. XIV.

<sup>13)</sup> B. Hostinský: *Comptes Rendus* t. 186, p. 59—61, 487—489. J. Hadamard tamtéž, p. 189—192, 275—276.

<sup>14)</sup> Viz podrobný přehled základních Markovových prací a jejich zobecnění v článku B. Hostinský: O pravděpodobnosti zjevů, jež jsou spojeny v Markovovy řetězy (*Sborník Přírodovědecký VI*, Praha 1929, p. 289—340).

funkčních. Smoluchowského práce, založené hlavně na užití analýzy, jsou vlastně blízké pracem Markovovým. Markovovy formule, přeneseny z algebry do analýzy způsobem, který je dobře znám z prací Volterrových a Fredholmových, vedou přímo k některým výsledkům Smoluchowského. Tak jsem našel ve spojení obecných a dalekosáhlých teorií Markovových se hluboce promyšlenou Smoluchowského teorií Brownova pohybu základnu k obecné formulaci nejdůležitějších otázek statistické mechaniky. Zdá se, že v tomto směru lze očekávat velmi mnoho. Moje naděje byly nedávno potvrzeny, když jsem četl práci Kolmogorovovu o analytických metodách počtu pravděpodobnosti založených na funkčních rovnicích a s nimi souvisejících rovnicích diferenciálních.

Záslouhou Markovovou je, že ukázal, jak se počítá disperse v případě t. zv. řetězů. Povaha úlohy vysvitne z následujícího problému, kde běží o filologickou statistiku. Markov studoval statistiku samohlásek, jež se vyskytují ve 20.000 po sobě následujících hláskách ve výňatku z textu Puškinova Oněgina.<sup>15)</sup> Rozdělil je, v pořadí jak po sobě v textu následují, na 200 skupin po 100 hláskách a čítal, kolik je v každé skupině samohlásek. Nejvíce bylo skupin (celkem 43), kde byl střední počet samohlásek 43; v jiných skupinách nelišil se nikde počet samohlásek o více než o  $\pm 6$  od 43. Když však tvořil skupiny po 100 hláskách směrem sloupců textu napsaného do řádek, takže posloupnost hlásek v tomto pořadí nedávala vůbec žádného smyslu, dostal nejvíce skupin (celkem 17) se středním počtem samohlásek 42. Byly však skupiny, kde bylo samohlásek o 25 méně nebo o 31 více, než 42. Teoretický výklad je podle Markova takový: V prvním případě tvoří posloupnost hlásek daná textem básně „řetěz“; povaha úlohy vyžaduje zavést do počtu pravděpodobnost  $p_{11}$ , že po samohlásce následuje samohláska a pravděpodobnost  $p_{21}$ , že po souhlásce následuje samohláska. Markovova teorie dává pak tento výsledek (s. h. = střední hodnota)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{s. h.} \frac{(m - np)^2}{n} = p(1 - p) \frac{1 + p_{11} - p_{21}}{1 - p_{11} + p_{21}}$$

Zde značí  $n$  počet písmen ve skupině,  $p$  pravděpodobnost, že nějaká hláska je samohláskou,  $m$  počet samohlásek ve skupině. Veličiny  $p$ ,  $p_{11}$ ,  $p_{21}$  určí se statisticky, takže pravou stranu rovnice možno považovati za známou. Hodnota levé strany určí se čítáním samohlásek v jednotlivých skupinách. Numerický výpočet dal čísla 0·051, 0·06 pro levou resp. pravou stranu. Naproti tomu ve druhém případě (skupiny hlásek tvoří se v pořadí jak za sebou

<sup>15)</sup> A. A. Markov: *Izčíslenie věrojatnostej*, 4. vyd., Moskva 1924, p. 566.

následují ve sloupcích) následují samohlásky a souhlásky asi v takovém pořadí, jak bychom je dostávali, kdybychom je vytahovali postupně z osudí, kde by byly smíšeny v příslušné proporci. Nyní můžeme užítí klasického Bernoulliho vzorce, který jest obsažen v předešlém, jakožto speciální případ pro  $p_{11} = p_{21}$ . Vychází

$$\text{s. h. } \frac{(m - np)^2}{n} = p(1 - p).$$

Číselné hodnoty levé resp. pravé strany jsou zde 0·289, 0·245. Tím jest objasněn rozdíl v „dispersi“ v jednom a ve druhém případě. Jiný příklad k užítí pojmu Markovova řetězu vyskytuje se v úloze, o které se dovidám od kol. Posejpa. Některé vlastnosti  $X$ -paprsků zdají se nasvědčovati tomu, že emise kvant neděje se rovnoměrně; dopadne-li v určitý okamžik jedno kvantum, je veliká pravděpodobnost, že po velmi krátké době dopadne druhé. Kvanta jsou tedy snad spojena v jakési „řetězy“.

V zítřejší přednášce pojednám o pravděpodobnosti přechodů a o výpočtu středních hodnot v teorii Brownova pohybu. Dnes naznačím, jak si představuji *základy kinetické teorie plynů s nového hlediska* podle té věty, kterou jsem dokázal r. 1928 a která má býti podle Hadamarda náhradou za ergodickou hypotesu.

Pozorujme v okamžicích  $t = \vartheta, 2\vartheta, 3\vartheta, \dots$ , kde  $\vartheta$  je krátký časový interval, konfiguraci plynu izolovaného od vnějších vlivů. Buďtež  $A_1, A_2, \dots, A_r$  všechny možné konfigurace, ve kterých se plyn vůbec může nacházeti (pro jednoduchost upouštím od úvahy o konfiguracích spojitě proměnných) a budiž  $p_{ik}$  pravděpodobnost, že, když plyn v okamžiku  $m\vartheta$  je v konfiguraci  $A_i$ , bude v okamžiku  $(m + 1)\vartheta$  v konfiguraci  $A_k$ . Dokázal jsem, že, když všechna  $p_{ik} > 0$  a když

$$p_{ki} = p_{ik}, \quad (3)$$

platí tato věta: Pravděpodobnost přechodu z konfigurace  $A_i$  do  $A_k$  za  $n\vartheta$  vteřin, kde  $n$  je celé číslo, blíží se konstantní limitě  $1:r$ , když  $n$  roste do nekonečna; limita ta nezávisí ani na konfiguraci  $A_i$ , kterou měl plyn na počátku, ani na konfiguraci konečné. Tak stávají se po uplynutí velmi dlouhé doby všechny konfigurace stejně pravděpodobnými; a o ten důkaz právě běží, když se má odůvodniti Maxwellův zákon o rozdělení rychlostí a když se má podle Boltzmannova definovati entropie plynu jakožto logaritmus pravděpodobnosti. Není jasno, proč by měly míti během času, jak Boltzmann předpokládá, všechny konfigurace stejnou pravděpodobnost, když jedna se vyvíjí ze druhé podle zákonů mechaniky. Statisticky se nedají zjišťovati pravděpodobnosti jednotlivých stavů (počáteční stav je dán libovolně, další plynou z něj zákonitým vývojem); naproti tomu daly by se zjišťovati pravděpodobnosti

přechodů, které mohou nastati za určitou dobu z jednoho stavu do druhého.

Mám za to, že v nové koncepci statistické mechaniky je právě nejvýznamnější to, že za základní pojem se bere pravděpodobnost přechodu z jedné dané konfigurace do jiné dané za určitou dobu. V některých případech — jak následuje podle toho, co bylo shora řečeno, z podmínky (3) — má smysl mluvit i o pravděpodobnostech konfigurací nebo stavů; tyto poslední jsou však odvozeny z pravděpodobností přechodů.

Připomínám ještě, že podle amerického chemika G. N. Lewise<sup>16)</sup> vyskytují se docela podobné výpočty v problémech o chemických rovnováhách. Je-li na př. voda s vodní párou v rovnováze, znamená to, že soustava je v naprostém klidu. Ustavičně přecházejí částice vody v páru a naopak. Jsou zase určité konfigurace  $A_1, A_2, \dots$  a systém, když je v rovnováze, přechází z jedné konfigurace do druhé. Podle Lewise je zde rovnice (3) základní větou chemické mechaniky. Lewis pak dokazuje z této rovnice, že všechny konfigurace jsou stejně pravděpodobné. Toto však plyne přímo z oné věty, kterou jsem shora uvedl (o přechodech v teorii plynů) a která dává to, co se dříve žádalo od ergodické hypotézy. Po uplynutí dlouhé doby stávají se všechny konfigurace, nezávisle na tom, jaká byla konfigurace počáteční, stejně pravděpodobnými, což právě je základ k dalším výpočtům.

Citovaná Lewisova práce je věnována odvození Planckova zákona o záření černého tělesa; tam také je třeba definovati určité pravděpodobnosti a základnou výpočtu jsou opět konfigurace „stejně pravděpodobné“.

Ke konci dovolím si přednášku stručně resumovati a připojit několik slov o užití počtu pravděpodobnosti se stanoviska filosofického.

Viděli jsme, že je třeba věnovati zvláštní pozornost otázkám o pohybu malých částic tekutiny. Dnes je nade vší pochybnost zjištěno, že hmota nevyplňuje prostor spojitě, nýbrž že sestává z molekul. Ale přes to nebylo by vhodno opustiti staré teorie, které předpokládají spojitě rozložení hmoty; tyto teorie přinesly v hydrodynamice a v akustice dobré výsledky. Ve fázovém prostoru statistické mechaniky setkáváme se s podobným tvořením pojmů. Podle nového pojetí statistické mechaniky opouštíme výpočet ideálních trajektorií a počítáme jen s pravděpodobnostmi přechodů z jedné konfigurace do druhé. V důsledku toho upouštíme také od pokusu definovati nějakou veličinu (entropii), která by se zvětšovala během celého skutečného pohybu.

<sup>16)</sup> G. N. Lewis: Quantum kinetics and the Planck equation (Physical Review 35, p. 1533—37, June 15, 1930).

Poněvadž význam statistiky a počtu pravděpodobnosti v aplikacích fyzikálních i jinde stále roste, projevil se v poslední době zejména mezi fysiky zájem o filosofický základ statistických metod. Někteří fysikové jsou přesvědčeni, že pozorovací chyby nedají se žádnými prostředky stlačit pod určité meze a usuzují z toho, že v oněch mezích jest „indeterminismus“ (nebo: indeterminace). Poněvadž v těch mezích nedá se nic přesně pozorovati, nemůžeme ověřovati vztah mezi příčinou a účinkem. Podle nich znamená to, že princip kauzality neplatí. Domnívám se, že toto stanovisko se zakládá na omylu; z toho, že přesnost pozorování jest omezena, neplyne, že by princip kauzality měl býti nahrazen principem indeterminace. Naopak, každá aplikace počtu pravděpodobnosti předpokládá zákonitost přírodního dění, princip kauzality. Toto hledisko, naznačené u Poincaréa, bylo znamenitě vyloženo ve článku K. Vorovky<sup>17)</sup> a myslím, že právě dnes, kdy tolik (a podle mého názoru neoprávněně) se mluví o indeterminismu, zaslouží si Vorovkovy názory o počtu pravděpodobnosti, aby byly studovány.

## II. Teorie Brownova pohybu.

Brownovým pohybem nazýváme pohyb malých částic suspen-dovaných v klidné tekutině; je to pohyb, jenž se jeví jako naprosto nepravidelný, jenž ustavičně mění směr a jenž pochází od nárazů molekul tekutiny na částice. Pohyby molekul samých jsou jemnější než pohyby viditelných částic, které mají mnohem větší rozměry než ony. Ale povaha molekulových pohybů je docela podobná povaze pohybů, které pozorujeme na částicích; takovou představu si činíme o Brownově pohybu. Během dosti dlouhé doby může se molekula nebo částice dostat daleko od svého původního místa; Brownův pohyb není nic jiného než spontánní difuze, míchání tekutiny.<sup>1)</sup> Abychom mohli sledovati difusi během času, představíme si, že některé molekuly jsou zvláštním způsobem označeny, aby se lišily od ostatních, řekněme zkrátka, že jsou „červené“. Úloha zní: sledovati, jak se v různých místech tekutiny mění koncentrace červených molekul během času. *Základní zákon o difuzi* v homogenní tekutině stanoví, že počet červených molekul, které projdou za nekonečně krátkou dobu  $dt$  infinitesimální ploškou  $q$ , jest úměrný spádu koncentrace ve směru k plošce kolmém a součinu  $q dt$ . Zákon ten je docela obdobný Fourierovu zákonu o vedení tepla v tuhých vodičích; koncentraci molekul odpovídá

<sup>17)</sup> K. Vorovka: Filosofický dosah počtu pravděpodobnosti (Česká Mysl, 1913).

<sup>1)</sup> O základních vlastnostech Brownova pohybu viz Haas-Lorentz: Die Brown'sche Bewegung, Braunschweig, 1913; J. Perrin: Les atomes, Paris.

zde teplota. Omezíme se na úvahy o Brownově pohybu lineárním; je to difuze v přímce (v trubici), kterou volíme za osu  $Ox$ ; koncentrace  $u$  (počet červených molekul připadajících na 1 cm délky) bude funkcí úsečky  $x$  a času  $t$ . Diferenciální rovnice problému pro případ, že nepůsobí vnější síly, zní

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

kde konstanta  $D$  je t. zv. koeficient difuze. V dnešní přednášce nechávám stranou otázku, na čem  $D$  závisí a jak se určuje jeho hodnota; naším úkolem bude učiniti si představu o průběhu difuze na základě rovnice (1). Poznamenejme, že, kdyby působila vnější síla, bylo by nutno připojiti na pravé straně rovnice (1) další člen.

K určení funkce  $u$ , která vyhovuje rovnici (1), je třeba ještě předepsati *a*) podmínky na stěnách nádoby a *b*) podmínky počáteční. Budeme předpokládati, že molekuly (nebo částice) se na stěně nádoby nezachytnou, když se jí dotknou, nýbrž že se od ní odrážejí, jak skutečně bylo pozorováno v některých případech. Pak bude normální složka koncentračního proudu (t. j. derivace koncentrace ve směru normály) u stěny rovna nule. Pokud se týče počátečních podmínek, budeme je vždy voliti takto: V okamžiku  $t = 0$  jsou všechny červené molekuly koncentrovány v bodě  $x = x_0$ , kde jest ovšem koncentrace nekonečně velká. Uvedenými podmínkami bude koncentrace stanovena; koncentraci dělenou celkovým počtem červených molekul označíme  $u(x_0, x, t)$ . Veličina  $u(x_0, x, t) dx$  udává pravděpodobnost, že molekula, která v okamžiku  $t = 0$  byla v poloze  $x = x_0$ , bude po  $t$  vteřinách obsažena v intervalu  $(x, x + dx)$ .  $u$  (čili hustota pravděpodobnosti) vyhovuje podmínkám

$$u > 0, \quad \int_a^b u dx = 1$$

pro libovolné hodnoty  $x_0$  a  $t$ . Smoluchowski<sup>2)</sup> rozřešil a diskutoval některé speciální případy, jež dávají dobrou představu o povaze problému. Když jsem srovnával jeho práce s Markovovou teorií řetězů, shledal jsem, že je jen třeba zavésti do Markovových úvah spojitě proměnné veličiny a na místo součtů integrály, abychom dostali z nich obecnou teorii Brownova pohybu. Tak jsem odvodil z Markovových prací dvě základní věty, kterých Smoluchowski nikde v obecné formě ani nevyslovuje ani nedokazuje; ale jeho

<sup>2)</sup> Viz hlavně jeho práce o Brownově pohybu (Bulletin international de l'Académie de sciences de Cracovie, A, 1913, p. 418; Annalen der Physik (4) 43, 1915, p. 1103) otištěné v jeho sebraných spisech a v Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 207.

výsledky, ke kterým dospěl ve speciálních problémech, souhlasí úplně s oněmi obecnými větami. Budu dnes postupovati tak, že nejprve uvedu první základní větu s dodatkem, který, jak se mně zdá, má pro kinetické teorie zvláštní význam, pak uvedu příklady Smoluchowského a konečně se zmíním o dalších generalisacích.

*První základní věta* zní takto: Budiž  $\tau$  kladné číslo a  $u(x, y, t)$  funkce, která je kladná a spojitá pokud  $x$  a  $y$  jsou v intervalu  $(a, b)$  a pokud  $t \geq \tau$ , a která vyhovuje funkční rovnici Smoluchowského

$$u(x, y, t + t') = \int_a^b u(x, z, t) u(z, y, t') dz \quad (2)$$

pro hodnoty  $x, y$ , obsažené v  $(a, b)$  a pro  $0 < t \leq \tau$ ,  $0 < t' \leq \tau$ , jakož i podmínce

$$\int_a^b u(x, y, t) dy = 1 \quad (3)$$

pro všechny hodnoty  $x$  obsažené v intervalu  $(a, b)$ . Pak platí, že

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, y, t) = \varphi(y),$$

kde funkce  $\varphi(y)$  nezávisí na  $x$ .

Princip důkazu, který je vlastně „překladem z algebry do analýzy“ Markovova důkazu,<sup>3)</sup> naznačme takto: Zvolme  $\vartheta$  tak, aby  $0 < \vartheta < \tau$  a poloźme  $t = \tau$ ,  $t' = n\vartheta$ , kde  $n$  je celé kladné číslo. Rovnice (2) zní pak

$$u(x, y, (n + 1)\vartheta) = \int_a^b u(x, z, \vartheta) u(z, y, n\vartheta) dz. \quad (2a)$$

Přihlížejíce k rovnicím (2a) a (3) a k podmínce  $u > 0$ , odůvodníme snadno, že při pevném  $u$  jest  $u(x, y, (n + 1)\vartheta)$  jakási střední hodnota mezi čísly  $u(z, y, n\vartheta)$ , při čemž „váhy“, jichž se užívá k výpočtu střední hodnoty, jsou  $u(x, z, \vartheta) dz$ . Z toho plyne: roste-li  $n$ , maximum  $M_n(x)$  funkce  $u(x, y, n\vartheta)$  proměnné  $x$  při pevném  $y$  nemůže se zvětšovati a její minimum  $m_n(x)$  nemůže se zmenšovati. A dále se dokáže, že

$$|M_n(x) - m_n(x)| < c \cdot h^n,$$

kde  $h$  je konstanta,  $0 < h < 1$ . Tím je věta dokázána pro případ, že  $t$  roste do nekonečna hodnotami  $\vartheta, 2\vartheta, 3\vartheta, \dots$ ; důkaz dá se doplniti vzhledem ke spojitosti funkce  $u$  pro případ, že  $t$  roste spojitě.

K této větě uvádím nyní dodatek: Vyhovuje-li funkce  $u$  všem uvedeným podmínkám a splňuje-li mimo to ještě relaci

<sup>3)</sup> A. A. Markov: *Izvestija fys.-mat. obščestva, Kazaň, (2) 15, p. 135; 1907.*

$$\int_a^b u(x, y, t) dx = 1 \quad (4)$$

pro každé  $y$  obsažené v intervalu  $(a, b)$ , platí, že

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, y, t) = \frac{1}{b-a}.$$

Důkaz plyne z toho, že pro  $t = +\infty$  jest podle (2)

$$\varphi(y) = \int_a^b \varphi(z) u(z, y, t') dz,$$

kterážto rovnice má vzhledem k (4) řešení  $\varphi(z) = \text{const.}$

Podmínka (4) je splněna, když interpretujeme  $u(x, y, t)$ , jakožto teplotu tyče, která v okamžiku  $t = 0$  byla zahřáta na jediném místě (o souvislosti funkční rovnice (2) s rovnicí (1) pro vedení tepla promluvíme později). Představte si, že tyč, ve které v počátečním okamžiku je teplota nestejně rozdělena, je tepelně izolována a sledujte její teploty; jež se dostaví po uplynutí 1, 2, 3, ... vteřin. Po první vteřině bude teplota v každém místě  $A$  rovna arithmetickému středu z teplot, které jednotlivá místa původně měla; tyto teploty samy fungují jako „váhy“ při výpočtu arithmetického středu. Na konci první vteřiny budou tedy teploty již poněkud vyrovnány, zmenší se rozdíl mezi maximem a minimem teploty v tyči. A tyto poněkud již vyrovnané teploty fungují zase jako váhy při výpočtu teplot na konci druhé vteřiny jakožto arithmetických středů atd. Po uplynutí dlouhé doby vyrovnají se tak teploty v celé tyči na konstantní hodnotu.

Přistupme nyní k některým *speciálním příkladům lineárního Brownova pohybu*; vycházíme z rovnic (1) resp. (5), jejichž souvislost s rovnicí (2) později objasníme.

I. Rovnice (1) má kladné řešení ( $a = -\infty$ ,  $b = +\infty$ )

$$u(x_0, x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}},$$

jež má tyto vlastnosti: vyhovuje podmínce (3); pro  $x = x_0$  je  $u = \infty$ , když  $t = 0$ ; pro  $x \neq x_0$  je  $u = 0$ , když  $t = 0$ . Formule udává pravděpodobnost (přesněji řečeno: hustotu pravděpodobnosti), že molekula, která s počátku byla v bodě  $x_0$ , bude po  $t$  vteřinách v poloze  $x$ . Je to difuze podél osy  $Ox$  na obě strany neomezené.

II. Děje-li se difuze jen po kladné straně osy  $Ox$ , t. j. v trubici s jedním koncem v bodě  $x = 0$  ( $a = 0$ ,  $b = +\infty$ ), jest ( $x_0 > 0$ )

$$u(x_0, x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \left[ e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} + e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4Dt}} \right].$$



Tato formule odvodí se tak, že formuli z předešlého příkladu I zrcadlíme na rovině  $x = 0$  (píšeme v ní  $-x_0$  na místo  $+x_0$ ) a takto proměněnou formuli přičteme k původní. Jinými slovy: pravděpodobnost, že bod, jenž byl původně v poloze  $x_0$ , dostane se po uplynutí doby  $t$  do polohy  $x$ , rovná se součtu dvou členů; první odpovídá přechodu přímému, druhý pak přechodu po odraze na stěně  $x = 0$  (je to tak, jako by bod vycházel z virtuálního obrazu  $x = -x_0$  původní polohy). Na kraji trubice je splněna podmínka

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{čili} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \text{pro } x = 0.$$

III. Necht' se difuze děje v trubici konečné délky sahající od  $x = a = 0$  do  $x = b$ . Řešení odvodíme zase z formule I., zrcadlíce bod  $x_0$  ( $0 < x_0 < b$ ) postupně na obou krajích trubice, vzniklé obrazy zase zrcadlíme atd. do nekonečna (zrovna tak, jako v elektrostatice při metodě elektrických obrazců); souřadnice obrazů jsou  $\pm (2nb \pm x_0)$ , kde  $n$  je celé číslo a kde znamení  $\pm$  jsou libovolně kombinována, takže předešlá formule dává pro každé  $n$  celkem čtyři obrazy. Vychází

$$u(x_0, x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{[x \pm 2nb \pm x_0]^2}{4Dt}}.$$

Podmínce (3) je vyhověno a dá se dokázat, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x_0, x, t) = \frac{1}{b}.$$

Poznamenejme, že ve shodě s dodatkem k první základní větě, je zde splněna též podmínka (4).

Na krajích trubice jsou splněny podmínky

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{čili} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{pro } x = 0 \quad \text{i pro } x = b.$$

IV. Na rozdíl od předešlých příkladů, kdy molekuly nepodléhaly vnějším silám, předpokládáme nyní, že malé části difundují ve vertikální nekonečně dlouhé trubici pod vlivem tíže. Dolní konec trubice budiž při  $x = 0$ , osa  $Ox$  necht' míří svisle vzhůru. Zde neplatí rovnice (1); nutno přidati na její pravé straně člen, jenž vystihuje vliv tíže. Předpokládáme, že každá částice v tekutině suspendovaná dostane vlivem tíže konstantní rychlost  $c$  směrem dolů. Počet částic, jež při koncentraci  $u$  vstoupí za jednu vteřinu do jednoho délkového  $cm$  trubice, jest  $c \partial u / \partial x$ ; to je přírůstek koncentrace pocházející od vlivu tíže. Máme tedy rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (5)$$

Na kraji  $x = 0$  přistupuje podmínka, aby proud skládající se z rychého difusního proudu a z proudů pocházejícího od tíže byl nulový. To se vyjádří rovnicí

$$D \frac{\partial u}{\partial x} + cu = 0 \text{ pro } x = 0.$$

Smoluchowski našel řešení:

$$u(x_0, x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \left[ e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} + e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4Dt}} \right] \cdot e^{-\frac{c(x-x_0)}{2D} - \frac{c^2 t}{4D}} + \frac{c}{D\sqrt{\pi}} e^{-\frac{cx}{D}} \int_{\frac{x_0+x-ct}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Diskuse tohoto řešení je zvláště zajímavá. Je-li  $t$  velmi malé, převládá napravo první člen; průběh koncentrace je asi takový, jako v případě II. Roste-li  $t$ , zmenšuje se první člen a zvětšuje se druhý; postupně uplatňuje se vliv tíže (koeficient  $c$ ) a máme

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x_0, x, t) = \frac{c}{D} e^{-\frac{cx}{D}}.$$

To znamená, že po uplynutí nekonečně dlouhé doby částice usazují se nejvíce u dna ( $x = 0$ ), podle předešlé formule; koncentrace ubývá s výškou podle exponenciální funkce. Formule je totožná se známou formulí barometrickou, neboť jest

$$-\frac{cx}{D} = \log \frac{D}{c} + \log u.$$

Interpretujme zase  $u$ , jakožto hustotu pravděpodobnosti pro přechod z  $x_0$  do  $x$  za dobu  $t$ . Po uplynutí nekonečně dlouhé doby má nejnižší poloha  $x = 0$  největší pravděpodobnost (hustotu pr.), že bude částicí dosažena. Střední vzdálenost částice od  $x = 0$  jest však

$$\int_0^{\infty} x \frac{c}{D} e^{-\frac{cx}{D}} dx = \frac{D}{c}.$$

Částice, jež v počátečním okamžiku byly v  $x_0$ , oscilují po uplynutí nekonečně dlouhé doby kolem  $x = D/c$ . Některé vystupují dosáhnou dno  $x = 0$ , zase do výše a druhá věta termodynamiky, jak se někdy uvádí, že totiž entropie = logaritmu pravděpodobnosti stále se zvětšuje, zde neplatí. V našem příkladě nastává pro  $t = \infty$  maximum entropie čili maximum  $\log u$  pro  $x = 0$  a je rovno  $\log c/D$ . Stoupá-li částice, entropie se zmenšuje. Poznamenejme k této úvaze Smoluchowského, že pojem entropie má vlastně význam jen pro systémy složité, ne pro jediný pohybující se bod.

Vratme se nyní k základní větě, kterou jsem shora uvedl o Smoluchowského rovnici (2). Úlohy I až IV byly řešeny užitím diferenciální rovnice (1) nebo (5); rovnice (2) jsme vůbec neužili. Jaký je význam této rovnice a jak souvisí s teorií difuze? Smoluchowski odvodil rovnici (2) touto úvahou: Je-li  $u(x, z, t) dz$  pravděpodobnost přechodu z polohy  $x$  do nějaké polohy obsažené v intervalu  $(z, z + dz)$  za  $t$  vteřin, jest  $u(x, z, t) dz \cdot u(z, y, t') dy$  pravděpodobnost složeného přechodu z  $x$  přes bod intervalu  $(z, z + dz)$  do bodu položeného v intervalu  $(y, y + dy)$  za úhrnnou dobu  $t + t'$  vteřin. Integrujeme-li nyní vzhledem ke všem možným přechodním polohám  $z$ , dostaneme úhrnnou pravděpodobnost  $u(x, y, t + t') dy$  přechodu z  $x$  do bodu v intervalu  $(y, y + dy)$ , což právě vede k rovnici (2).

V předešlých úlohách měli jsme různé parciální rovnice (1) a (5) a různé podmínky na krajích, po případě i problémy bez podmínek. Ale ve všech případech platí ona obecná vlastnost pravděpodobnosti vyjádřená vztahem (2). Čtyři funkce  $u(x_0, x, t)$ , jež dávaly řešení úloh I až IV, vyhovují všechny rovnici (2), jak se můžeme dosazením přesvědčiti. Tyto příklady stačí, aby ukázaly, jak rovnice (2) platí pro funkce vyhovující různým parciálním rovnicím. Za předpokladu, že platí rovnice (2) a (3) dá se  $u(x_0, x, t)$  interpretovati jakožto teplota v izolované tyči (koncové body  $x = a$ ,  $x = b$ ) v místě  $x$  a v čase  $t$ , když pro  $t = 0$  celý tepelný obsah tyče byl koncentrován v jediném bodě  $x_0$ . V tomto případě i v obecnějších úlohách lze pak aplikovati úvahu o chladnutí tyče, jak jsem ji shora uvedl; platí tu vždy také rovnice (4).

*Druhá základní věta* týká se t. zv. střední kvadratické úchytky nějaké veličiny od střední hodnoty. Předpokládáme, že pohybující se bod (molekula, částice), jenž v okamžiku  $t = 0$  je v poloze  $x = x_0$ , udává hodnotu nějaké veličiny; hodnota ta, kterou označíme  $a(x)$ , závisí na okamžité poloze bodu (je funkcí úsečky  $x$ ). Střední hodnota funkce  $a(x)$  po uplynutí doby  $t$  je dána formulí

$$\text{s. h. } [a(x)]_t = a(x_0, t) = \int_a^b u(x_0, x, t) a(x) dx, \quad (6)$$

kde  $u(x_0, x, t)$  je jako dříve pravděpodobnost přechodu z  $x_0$  do  $x$  za dobu  $t$ . Přibližná hodnota oné střední hodnoty najde se takto: Sledujme částici, která byla v okamžiku  $t = 0$  v bodě  $x_0$  a zaznamenáme její polohu  $\xi_1$  po  $t$  vteřinách; pak sledujme jinou částici, která zase vychází z bodu  $x_0$  a zaznamenáme její polohu  $\xi_2$  po  $t$  vteřinách atd. Máme-li  $N$  takových záznamů, jest

$$\text{s. h. } [a(x)]_t \doteq \frac{a(\xi_1) + a(\xi_2) + \dots + a(\xi_N)}{N}.$$

Roste-li  $N$  do nekonečna, blíží se s. h. limitní hodnotě

$$\lim_{t=\infty} \text{s. h. } [\alpha(x)]_t = \int_a^b \varphi(x) \alpha(x) dx = \bar{\alpha}, \quad (6a)$$

která nezávisí na počáteční poloze  $x_0$ .

Pozorujme nyní polohy jedné a téže částice v okamžicích  $t = \vartheta, 2\vartheta, 3\vartheta, \dots, N\vartheta$ ; příslušné její polohy budtež  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ . Součet  $\alpha(\xi_1) + \alpha(\xi_2) + \dots + \alpha(\xi_N)$  měl přibližnou hodnotu  $N\bar{\alpha}$ ; součet  $\alpha(x_1) + \alpha(x_2) + \dots + \alpha(x_N)$  liší se od předešlého a klademe si za úlohu vyšetřiti

$$\text{s. h. } [\alpha(x_1) + \alpha(x_2) + \dots + \alpha(x_N) - N\bar{\alpha}]^2.$$

Kdyby se hodnoty  $x_1, x_2, \dots, x_N$  volily „náhodně“ tak, jako na př. se táhnou čísla v loterii, nebyl by výpočet těžký. Máme počítati tyto střední hodnoty:

$$\text{s. h. } [\alpha(x_k)]^2 \text{ a s. h. } [\alpha(x_k) \cdot \alpha(x_l)].$$

V okamžiku  $k\vartheta$  může míti  $x$  kteroukoli z hodnot mezi  $a$  a  $b$ ; každá má svou pravděpodobnost  $u(x_0, x, k\vartheta)$  a tedy

$$\text{s. h. } [\alpha(x_k)]^2 = \int_a^b u(x_0, x, k\vartheta) [\alpha(x)]^2 dx.$$

Až potud jde výpočet tak, jako by se hodnoty  $x_k$  určovaly na způsob tahů z loterie. Ale v případě s. h.  $[\alpha(x_k) \alpha(x_l)]$  nemůžeme takto postupovati. Neboť má-li  $x$  v okamžiku  $k\vartheta$  nějakou hodnotu  $x_k$ , je hustota pravděpodobnosti  $u(x_k, x_l, t)$ , že po  $t$  vteřinách bude míti hodnotu  $x_l$ . Máme zde „závislé pravděpodobnosti“ čili Markovův řetěz a výpočet je složitý. Markov rozřešil problém pro nespojitě proměnné a ukázal, že v tomto případě podíl střední hodnoty a čísla  $N$  má určitou limitu, když  $N$  roste do nekonečna (stran podrobností o Markovově teorii viz mou práci citovanou v pozn. <sup>14</sup>) k první přednášce). V našem případě spojitě proměnné  $x$  (lineární Brownův pohyb) dává Markovův vzorec, nahradíme-li součty integrály, druhou základní větu

$$\begin{aligned} & \lim_{N=\infty} \text{s. h. } \frac{[\alpha(x_1) + \alpha(x_2) + \dots + \alpha(x_N) - N\bar{\alpha}]^2}{N} = \\ & = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^k [\alpha(x_i) - k\bar{\alpha}]^2 u_k(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_k \right.}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b u_k(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_k} \quad (7) \end{aligned}$$

kde jest položeno

$$u_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{vmatrix} u(x_1, x_1, \vartheta) & u(x_1, x_2, \vartheta) & \dots & u(x_1, x_k, \vartheta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u(x_k, x_1, \vartheta) & u(x_k, x_2, \vartheta) & \dots & u(x_k, x_k, \vartheta) \end{vmatrix}.$$

V čitateli i ve jmenovateli formule (7) jsou nekonečné řady podobné známým řadám Fredholmovým. Poznamenejme, že nalezená limita střední hodnoty závisí na veličině  $\vartheta$ , t. j. na časovém intervalu, jenž odděluje dvě po sobě následující pozorování pohybující se částice.

Ptejme se nyní, co dá formule (7), když  $\vartheta$  roste do nekonečna. Podle první základní věty jest

$$\lim_{\vartheta = \infty} u(x, y, \vartheta) = \varphi(y).$$

V determinantu  $u_k$  budou tedy pro  $\vartheta = \infty$  v libovolně zvoleném sloupci vesměs stejné elementy. Determinanty  $u_k$  ( $k = 2, 3, 4, \dots$ ) se proto všechny anulují; toliko determinant prvního stupně  $u_1$  bude různý od nuly:

$$u_1 = u(x_1, x_1, \vartheta)_{\vartheta = \infty} = \varphi(x_1),$$

a pravá strana vzorce (7) přechází, poněvadž

$$\int_a^b \varphi(x_1) dx_1 = 1,$$

ve výraz

$$\int_a^b [\alpha(x) - \bar{\alpha}]^2 \varphi(x) dx, \quad (7a)$$

což je podle (6) střední hodnota veličiny  $[\alpha(x) - \bar{\alpha}]^2$  po uplynutí nekonečně dlouhé doby. Formule (7a) odpovídá právě případu, kdy by hodnoty  $x_1, x_2, \dots$  byly voleny tak, jako se táhnou čísla v loterii. Když chceme výpočet naší střední hodnoty numericky provést, nahradíme nejprve integrál (7a) součtem; rozdělíme interval  $(a, b)$  dělicími body  $s_1, s_2, \dots$  na  $m$  stejných dílů o délce  $\Delta s$  a místo (7a) píšeme přibližnou hodnotu

$$\sum_{i=1}^m [\alpha(s_i) - \bar{\alpha}]^2 \varphi(s_i) \Delta s.$$

Představme si nyní *Brownův pohyb* po úsečce  $(a, b)$ . Po uplynutí nekonečně dlouhé doby  $\vartheta$  (řekněme: velmi dlouhé doby), určíme polohu  $x_1$ ; bude to jedna z hodnot  $s_i$ . Pak po uplynutí další stejně dlouhé doby bude bod v poloze  $x_2$  ( $x_2$  rovná se opět nějaké z hodnot  $s_i$ ) atd. Číslo  $\varphi(s_i) \Delta s$  je rovno pravděpodobnosti, že po velmi dlouhé době  $\vartheta$  bude částice v intervalu  $(s_i, s_i + \Delta s)$ , a hořejší součet dá skutečně střední hodnotu čili matematickou naději veličiny  $[\alpha(x) - \bar{\alpha}]^2$  ve shodě s elementárním pravidlem

o výpočtu matematických nadějí. Tím, že jsme zavedli  $\vartheta$  nekonečně velké, že jsme tedy nekonečně oddálili dva po sobě následující okamžiky, ve kterých polohu částice pozorujeme, odstranili jsme vliv aktuální polohy na pravděpodobnost, se kterou se nějaká jiná poloha očekává po uplynutí nekonečně dlouhé doby  $\vartheta$ . Pravděpodobnosti jednotlivých poloh jsou nezávislé jedna na druhé.

Ale v obecném případě konečně dlouhé doby  $\vartheta$  nemají vlastně jednotlivé polohy  $x_1, x_2, \dots$  určitých pravděpodobností. Jsou jenom pravděpodobnosti přechodů za určitou dobu, čímž stává se výpočet střední hodnoty (7) složitým.

Vliv doby, po kterou trvá přechod, na čtverec uražené dráhy, sledujeme v případě úlohy III. Střední hodnota čtverce pošinutí z polohy  $x_0$  do polohy  $x$  za dobu  $t$  je stanovena podle obecného vzorce (6) takto:

$$\text{s. h. } (x - x_0)t^2 = \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(x \pm 2nb \pm x_0)^2}{4Dt}} \cdot (x - x_0)^2 dx. \quad (8)$$

Závislost tohoto výrazu na  $t$  nedá se vyšetřiti bez podrobnějšího výpočtu. Všimneme si zde jen krajních případů:  $\lim t = 0$  a  $t = \infty$ . V prvním případě převládá  $(x - x_0)$  je nekonečně malá veličina zároveň s  $t$ ) v součtu člen

$$e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}};$$

ostatní konvergují k nule a máme pro malé  $t$

$$\text{s. h. } (x - x_0)t^2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_a^b e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} (x - x_0)^2 dx, \quad a < x_0 < b.$$

Když zavedeme integrační proměnnou  $u$  rovnicí

$$x = 2\sqrt{Dt} \cdot u + x_0,$$

vychází

$$\lim_{t=0} \text{s. h. } \frac{(x - x_0)t^2}{t} = \frac{4D}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} u^2 du = 2D$$

aneb

$$\text{s. h. } (x - x_0)^2 = 2Dt. \quad (8a)$$

V druhém případě, po uplynutí nekonečně dlouhé doby máme

$$\lim_{t=\infty} u(x_0, x, t) = \frac{1}{b}$$

a

$$\text{s. h. } (x - x_0)_{t=\infty}^2 = \int_a^b \frac{(x - x_0)^2}{b} dx = \frac{(b - x_0)^3 + (x_0 - a)^3}{3b}. \quad (8b)$$

Vzorec (8a) platí vždy při lineárním Brownově pohybu, pokud  $t$  je velmi malé; aplikoval by se tedy na př. v úlohách I, II a IV. Vliv stěn a sil působících na částičky neuplatní se na počátku pohybu. Vzorec (8a) odvozený též Einsteinem, byl kontrolován experimentálně. S rostoucím  $t$  přestává však platiti (8a) a v naší úloze III, přejde (8a) pro  $t$  nekonečně veliké ve vzorec (8b).

V přednáškách, jež jsem měl r. 1930 na Institut Poincaré, zavedl jsem pojem „vlny pravděpodobnosti“. Pravděpodobnost přechodu se „odráží“ na stěně, neboť jakmile doba přechodu je delší, takže částička může dojíti ke stěně a vrátiti se pak zpět, pravděpodobnost přechodu se pozměňuje, neplatí již vzorec (8a), nýbrž vzorec složitější. Později pak, když  $t$  je ještě větší, přijdou v úvahu opětované odrazy, výraz pro pravděpodobnost přechodu se dále komplikuje, až zase po uplynutí nekonečně dlouhé doby máme jednoduchý výsledek (8b). V příkladě I (difuze po neomezené přímce) platí vzorec (8a) neomezeně pro libovolné  $t$ .

V některých problémech (také z jiných oborů fyziky) záleží na teoretickém stanovení fluktuací, t. j. odchylek, kterých doznává nějaká proměnná veličina během času od své střední hodnoty. V některých pracích Smoluchowského a Fürthových<sup>4)</sup> jsou počítány různé střední hodnoty a pravděpodobnosti s ohledem na „závislost pravděpodobnosti“ (dědičnost, persistence). Obecná teorie fluktuací s ohledem na „dědičnost“ založila by se na rovnici (7).

Obě základní věty předpokládají, že interval  $(a, b)$  má konečnou délku, takže jich nelze bezprostředně aplikovati na Brownův pohyb po neomezené přímce.

Rovnice Smoluchowského zobecní se bezprostředně pro pohyb částice v tekutině trojrozměrné. Budiž  $V$  vnitřek uzavřené nádoby vyplněné tekutinou a  $A, B$  dva body uvnitř  $V$ . Pravděpodobnost  $u(A, B, t) d\tau_B$ , kde  $d\tau_B$  značí element objemu v poloze  $B$ , že částice přejde z  $A$  do vnitřku  $d\tau_B$  za  $t$  vteřin, vyhovuje funkci rovnici

$$u(A, B, t + t') = \iiint_V u(A, M, t) u(M, B, t') d\tau_M.$$

Ve fázovém prostoru statistické mechaniky dá se užití obdobné rovnice. Obě základní věty a všechny jejich důsledky platí i v těchto případech bez podstatné modifikace. Jen je třeba nahraditi integrace od  $a$  do  $b$  integracemi v oboru  $V$ .

Ve všech úvahách jsme předpokládali, že pravděpodobnost přechodu za určitou dobu nezávisí na okamžiku, kdy přechod začíná. Tak tomu je v klidné tekutině; když teď vidím částici nebo

<sup>4)</sup> Viz Smoluchowského práce citované v pozn. <sup>2)</sup> R. Fürth: Zeitschrift für Physik 2 (1920), p. 244, 40 (1927), p. 351, 364; Schwankungsercheinungen in der Physik (Braunschweig 1920).

molekulu v poloze  $A$  a když jest určitá hustota pravděpodobnosti pro přechod z  $A$  do  $B$  za hodinu, budu považovati někdy později pravděpodobnost tohoto přechodu za stejnou jako dnes. Ale kdyby v nádobě s tekutinou byly *proudy proměnlivé během času*, byla by pravděpodobnost přechodu ve směru proudu větší než ve směru kolmém k proudu a bylo by nutno zavést funkci  $u(A, B, t, \tau)$ , která závisí nejen na poloze počáteční  $A$ , na poloze konečné  $B$  a na době přechodu  $t$ , nýbrž také na okamžiku  $\tau$ , kdy se bod nalézá v poloze  $A$ . Tato funkce vyhovuje funkční rovnici, kterou udal Chapman<sup>5)</sup> ve svých studiích o difusi. Rovnice ta zní:

$$u(A, B, t + t', \vartheta) = \iiint_V u(A, M, t, \vartheta) u(M, B, t', \vartheta + t) d\tau_M. \quad (9)$$

Smysl její je tento: hustota pravděpodobnosti, že částice, jež se v okamžiku  $\vartheta$  nalézá v  $A$ , přejde za  $t + t'$  vteřin do  $B$ , rovná se hustotě totální pravděpodobnosti pro všechny možné přechody z  $A$  do  $M$  za  $t$  vteřin, odtud pak do  $B$  za dalších  $t'$  vteřin;  $M$  může býti libovolný bod v oboru  $V$  vyplněném tekutinou.

V práci, kterou jsem uveřejnil 2. března t. r.,<sup>6)</sup> vyslovil jsem větu, že za určitých předpokladů (když funkce  $u$  je v jistém oboru argumentů kladná a spojitá a pod.) platí

$$\lim_{t=\infty} u(A, B, t + t', \vartheta) = \varphi(B), \quad (10)$$

což je zobecnění první základní věty. Jsou-li tedy v tekutině proudy, které se během času mění, po uplynutí nekonečně dlouhé doby může se částice dostat do kterékoli polohy  $B$  uvnitř nádoby a to s hustotou pravděpodobnosti, která závisí toliko na  $B$ .

Poznamenejme, že Chapmanova rovnice dá se upravit na souměrný tvar takto: Je-li  $t_1$  okamžik, kdy je v  $B$  ( $t_1 < t_2 < t_3$ ), jest

$$t_1 = \vartheta, \quad t_2 = \vartheta + t, \quad t_3 = \vartheta + t + t';$$

píšeme-li

$$u(A, B, t + t', \vartheta) = \Phi(A, B, t_1, t_3),$$

nabývá (9) tvaru

$$\Phi(A, B, t_1, t_3) = \iiint_V \Phi(A, M, t_1, t_2) \Phi(M, B, t_2, t_3) d\tau_M.$$

Současně s mou prací vyšel 2. března sešit Math. Annalen, kde Kolmogorov<sup>7)</sup> dokazuje (pod názvem „ergodický princip“) větu (10) jakožto zobecnění věty, kterou Hadamard se mnou

<sup>5)</sup> S. Chapman: Proceedings of the Royal Society, London; A. 119, 1928, p. 39.

<sup>6)</sup> B. Hostinský: Comptes Rendus, t. 192, p. 546.

<sup>7)</sup> A. Kolmogoroff: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Math. Annalen 104, 1931, Heft 3 (vydáno 2. března, p. 415—458)).



uveřejnil r. 1928. Důkaz Kolmogorovův je vlastně založen na téže myšlence jako Markovův důkaz první základní věty. Veliký význam Kolmogorovy práce je v tom, že objasňuje souvislost mezi funkčními rovnicemi tvaru (2) a (9) na jedné straně a diferenciálními rovnicemi parciálními i obyčejnými různých typů na druhé straně. Kolmogorov zobecňuje tak výsledky Smoluchowského a ukazuje, jak lze pro nejrůznější zcela nespojitě děje zavésti pravděpodobnosti, jež jsou spojitými funkcemi souřadnic a času a jež vyhovují obyčejným nebo parciálním diferenciálním rovnicím.

Ukázal jsem v dnešní přednášce, jak se aplikují obecné myšlenky Markovovy v teorii Brownova pohybu. Hlavní výsledky jsou obsaženy ve dvou základních větách a v zobecněné větě, týkající se rovnice Chapmanovy.

Ke konci dodal bych poznámky o souvislosti s teoriemi algebraickými: Smoluchowského rovnice (2) je vlastně analytickým překladem této věty o skládání lineárních substitucí. Je dána lineární homogenní substituce  $S^{(1)}$  o  $r$  proměnných

$$y_i = \sum_{k=1}^r a^{(1)ik} x_k, \quad i = 1, 2, \dots, r;$$

koeficienty necht' vyhovují podmínkám

$$\sum_{k=1}^r a^{(1)ik} = 1, \quad a_{ik} > 0.$$

Provedme tuto substituci  $n$ kráte po sobě. Dostaneme složenou substituci  $S^{(n)}$  o koeficientech  $a^{(n)ik}$  a platí pro libovolné celistvé indexy  $m, n$

$$a^{(m+n)ik} = \sum_{s=1}^r a^{(m)is} a^{(n)sk}.$$

Tato rovnice vyjadřuje vztah, že substituce  $S^{(m)}$  ( $m=1, 2, 3, \dots$ ) tvoří grupu; symbolický součin  $S^{(m)} \cdot S^{(n)}$  rovná se  $S^{(m+n)}$ .

Když přejdeme od nespojitých indexů ke spojitě proměnným veličinám  $x, y$  a od iteračního indexu  $n$  ke spojitě proměnnému času  $t$ , dostaneme z předešlé grupy grupu funkčních transformací lineárních, kterou uvedl Hadamard<sup>8)</sup> ve svých přednáškách, konaných v Praze a v Brně 1928, jakožto příklad problému blízkého Huygensovu principu. Rovnice (2) a (9) dávají totiž základ k formulaci problémů takového druhu: pochopiti konečný stav nějakého systému, jakožto výsledek buď daného stavu začátečního aneb stavů přechodních, ke kterým by systém dospěl ve svém vývoji mezi okamžikem počátečním a okamžikem konečným.

<sup>8)</sup> J. Hadamard: Huyghensův princip (Časopis pro pěstování mat. a fys. 58, 1929, p. 346—366).

Celý ten časový vývoj pravděpodobnosti podle (2) nebo podle (9) je vlastně opětování lineárních funkčních transformací typu

$$F(x) = \int_a^b u(x, y, t) f(y) dy,$$

kde  $u$  je daná funkce a  $f$  funkce proměnná, na kterou se transformace aplikuje. Algebraické pravidlo o koeficientech  $a_{ik}^{(n)}$  shora podané definuje symbolické násobení matic (je to vlastně pravidlo o násobení determinantů); rovnice (2) a (9) vyjadřují symbolické násobení lineárních funkčních transformací. A časový vývoj pravděpodobností, jenž je těmi rovnicemi definován, odpovídá, jak se domnívám, docela těm „vlnám pravděpodobnosti“<sup>9)</sup> o kterých jedná L. de Broglie ve své vlnové mechanice. Tyto až dosud poněkud neurčité úvahy, měly by se zpracovati právě z tohoto hlediska: Jsou dány dvě vlny, dvě různé konfigurace fotonů, světelných kvant; jaká je pravděpodobnost, že vlna přejde z jedné konfigurace do druhé za určitou dobu? Odpověď na tuto otázku vedla by, jak se domnívám, k přesnější formulaci nejasných dosud otázek o pravděpodobnostech ve vlnové mechanice.

Vidíte, že pojmy zavedené Markovem a Smoluchovským mají význam pro aplikace v rozmanitých směrech a myslím, že právě u nás by bylo na místě věnovati zvláštní pozornost pracem těchto dvou velkých slovanských badatelů, studovati je a pokračovati směrem jimi naznačeném v řešení nad míru zajímavých problémůch o pravděpodobnostech.

### III. Planckův zákon o záření.

Podle Kirchhoffa přísluší každé látce určitá mohutnost absorpcí  $a$  a určitá mohutnost emisí  $e$ . Dopadne-li na látku světlo nebo vůbec elektromagnetická vlna, část zářivé energie se odráží na povrchu tělesa, část tělesem projde a šíří se dále, část pak se tělesem pohlcuje a mění se v něm v teplo, po případě v jiný druh energie. Číslo  $a$  udává poměr této absorbované energie k celé energii dopadající; přesná definice běže ohled na délku vlny dopadajícího světla, na úhel, pod kterým vlna dopadá na povrch tělesa a  $j$ . Emisní mohutnost  $e$  závisí pak na tom, jak mnoho energie vyzáří element na povrchu tělesa za určitou dobu; při tom zase se běže ohled na úhel, který svírá směr vysílaných paprsků s normálou k povrchu tělesa, na délku vlny a  $j$ . Kirchhoff ukázal, že poměr  $e/a$  je pro všechny látky stejný a že závisí toliko na teplotě  $T$  a na frekvenci  $\nu$  vlny. Pro dokonale černé těleso, t. j. těleso, jež pohlcuje všechno záření naň dopadající, jest  $a = 1$ , takže onen

<sup>9)</sup> L. de Broglie; Introduction à l'étude de la Mécanique ondulatoire, Paris 1930.

poměr se redukuje na  $e$ ; platí  $e = f(\nu, T)$ . Podle výkladu, který se dnes všeobecně přijímá, není  $f(\nu, T)$  nic jiného, než hustota elektromagnetické (zářivé) energie čili energie elektromagnetických kmitů obsažená v  $1 \text{ cm}^3$  dutiny v rozžhavené peci; pec má teplotu  $T$  a jest izolována tak, že teplo ani neuchází ani nepřichází. Kirchhoff sám neurčil tvar funkce  $f(\nu, T)$ . Po něm řada badatelů (Wien, Stefan) přispěla k jejímu určení, jednak teoretickými úvahami, jednak přímým měřením záření; energie záření připadající na úzký obor spektra mezi frekvencemi  $\nu$  a  $\nu + d\nu$  měří se bolometricky a pod. Tyto výzkumy dovolily redukovat  $f(\nu, T)$  na funkci jediné proměnné a Planckovi podařilo se v roce 1900 odvodit úplnou formuli, která se výtečně osvědčila v teoretických úvahách a která také přesnými měřeními byla potvrzena.

Dovolím si uvést v dnešní přednášce některé základní myšlenky; které vedly k jejímu odvození a některé poznámky k němu.

Znázorníme-li při určité teplotě závislost  $f$  na  $\nu$ , dostaneme diagram, který na první pohled upomíná na „frekvenční křivky“, jakých se užívá ve statistice. Tak když sledujeme u velkého počtu jedinců výskyt nějakého znaku kvantitativně měřitelného, udává pořadnice frekvenční křivky počet jedinců, pro které příslušná úsečka měří velikost onoho znaku. Planckův důkaz a všechny jeho obměny, které později od různých autorů byly vypracovány, vycházejí z úvah statistických. Poněvadž zde běží o úlohu související s problémem o rozdělení rychlostí, které mají molekuly plynu uvedu nejprve některé vzorce z kinetické teorie plynů.

Molekuly plynu, jenž je tepelně izolován při určité teplotě  $T$  v uzavřené nádobě, pohybují se rovnoměrně a přímočaře; srážejí se a narážejí na stěny nádoby, při čemž nastávají odrazy podle zákonů o rázu dokonale pružných těles. Molekuly mají jakousi střední rychlost, která souvisí s teplotou  $T$ , a nás zajímá hlavně odpověď na tuto otázku: Kolik je molekul, jejichž rychlost leží v mezích  $c$  a  $c + dc$ ? Podle Maxwella je pravděpodobnost, že nějaká molekula náhodně vybraná má v libovolném pevném směru složku rychlosti obsaženou v mezích  $u$  a  $u + du$ , rovna výrazu

$$p = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{1}{k} e^{-\frac{3u^2}{2k^2}} du, \quad (1)$$

kde  $k^2$  je „střední kvadratická rychlost“ (střední hodnota kvadrátu rychlosti). Složky rychlosti jsou rozděleny podle Gaussova zákona chyb; to je smysl rovnice (1). Je-li  $N_1$  počet molekul v  $1 \text{ cm}^3$ , jest mezi nimi  $pN_1$  takových, že složka rychlosti v předepsaném směru leží v mezích  $u$  a  $u + du$ . Označme nyní písmeny  $u_i, v_i, w_i$ , složky rychlosti ve směrech  $Ox, Oy, Oz$   $i$ -té molekuly a budiž  $N$  úhrnný počet všech molekul v nádobě. Kinetická energie  $i$ -té

molekuly, je-li  $m$  její hmota, jest

$$\frac{1}{2} m (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2).$$

Úhrnná kinetická energie všech molekul dohromady nemění se během času a tedy platí

$$u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + u_2^2 + \dots + w_N^2 = Nk^2. \quad (2)$$

Podle Borela<sup>1)</sup> můžeme interpretovati vzorec (1) geometricky takto: Rovnice (2) definuje kulovou plochu v prostoru o  $3N$  rozměrech, opsanou kolem počátku souřadnic poloměrem  $k\sqrt{N}$ . Protněme tuto plochu dvěma rovnoběžnými rovinami kolnými k ose  $Ou_1$ :

$$u_1 = u, \quad u_1 = u + du,$$

kde  $du$  je nekonečně malá veličina. Vzorec (1) udává pak, pro případ, že číslo  $N$  je veliké, poměr  $p$  plochy pásu kulového obsaženého mezi oněmi dvěma rovinami k celému povrchu koule (2). Podle toho pravděpodobnost  $p$ , že  $x$ -ová složka rychlosti první molekuly (nebo kterákoli složka rychlosti jiné molekuly) leží v mezích  $u$  a  $u + du$ , rovná se pravděpodobnosti, že bod zvolený na povrchu koule (2) leží uvnitř onoho pásu. Poznamenejme, že  $p$  je maximální pro  $u = 0$  a že rapidně klesá, když se  $u$  zvětšuje.

Různými způsoby bývá odůvodňováno, že pravděpodobnosti  $p$  pro různé složky jsou navzájem nezávislé; přijměme tento předpoklad. Pak bude pravděpodobnost, že složky rychlosti molekuly ve směrech  $Ox, Oy, Oz$  mají hodnoty obsažené resp. v mezích  $(u, u + du), (v, v + dv), (w, w + dw)$ , rovna  $p^3$  čili

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{1}{k}\right)^3 e^{-\frac{3(u^2 + v^2 + w^2)}{2k^2}} du dv dw.$$

Zaveďme do počtu prostou hodnotu  $c$  rychlosti, která souvisí se složkami  $u, v, w$  podle rovnice  $c^2 = u^2 + v^2 + w^2$  a užieme polárních souřadnic v prostoru  $(u, v, w)$ . Je-li  $d\Omega$  tělesný úhel, ve kterém vidíme element kulové plochy opsané kolem počátku poloměrem  $c$ , bude element objemu  $c^2 dc d\Omega$ , takže naše poslední formule přejde v

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{1}{k}\right)^3 e^{-\frac{3c^2}{2k^2}} c^2 dc d\Omega$$

a integrací podle  $\Omega$  dostaneme vzorec

$$4\pi \left(\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{1}{k}\right)^3 e^{-\frac{3c^2}{2k^2}} c^2 dc \quad (3)$$

<sup>1)</sup> E. Borel: Introduction géométrique á quelques théories physiques, Note I (Paris 1914).

pro pravděpodobnost, že rychlost molekuly leží v mezích  $c$  a  $c + dc$ . Koeficient, jímž se ve formuli (3) násobí  $dc$ , je součinem dvou činitelů; exponenciální činitel klesá z maximální hodnoty  $= 1$  (které nabývá pro  $c = 0$ ) s rostoucím  $c$ , druhý činitel  $c^2$  pak současně roste. Z toho již je patrné, že koeficient s rostoucím  $c$  roste až do určitého maxima, načež klesá.<sup>2)</sup>

Předpokládáme, že molekula nemá jiné energie mimo energii  $E$  translačního pohybu, která je

$$E = \frac{1}{2} m (u^2 + v^2 + w^2).$$

Uvedme ještě známý vzorec

$$\frac{1}{2} m k^2 = \frac{R}{N} T;$$

zde je  $N$  Avogadrovo číslo (pro jednoduchost si představíme, že v nádobě je právě jedna grammolekula plynu, takže  $N$  značí úhrnný počet molekul),  $R$  plynová konstanta. Pak lze na místo (3) psáti

$$K e^{-\beta E}, \quad \beta = \frac{N}{RT}. \quad (3a)$$

Podle Gibbse přisuzuje se formuli (3a) platnost zcela obecná. Vytkneme-li v jakékoli fyzikální soustavě nějaký její element, je (3a) pravděpodobnost, že element, jenž může mít různá množství energie, má právě energii  $E$ . Poznamenejme, že do konstanty  $K$  jsme vzali také součin  $du, dv, dw$ ; předpokládáme tedy v „prostoru rychlostí“  $u, v, w$  určité dělení na malé elementy.

Přistupme nyní k odvození Planckovy formule. Podle Plancka vyměňují si jednotlivé elementy černého tělesa energii a to tak, že v každém místě všechny barvy spektra udržují se ve stále intenzitě. Ovšem intenzita je stálá jen statisticky; jen střední hodnoty intenzit počítané pro přiměřeně dlouhou dobu jsou stálé.

Povaha elektromagnetického záření v dutině černého tělesa je taková, jaká by byla v dutině dokonalého vodiče, kde jsou ustáleny elektromagnetické kmity ve vakuu. Běží o to, jaké frekvence mohou mít kmity v takové dutině. Každá složka elektrické nebo magnetické síly vyhovuje v té dutině rovnici

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \Delta X,$$

kde  $c$  je rychlost světla. Představme si dutinu v podobě krychle o hraně  $a$ . Jeden vrchol je v počátku, hrany jsou rovnoběžny s osami  $Oxyz$ . Jsou-li stěny krychle dokonale vodivé, jsou elektromagnetické kmity ve vakuu uvnitř krychle dány rovnicemi tako-

<sup>2)</sup> Šťran podrobností viz pěkný úvod do kinetické teorie plynů v knížce E. Bloch: Théorie cinétique des gaz, Paris (Collection Armand Colin).

véhoto tvaru:

$$X = A \cos \frac{\pi \alpha x}{a} \cos \frac{\pi \beta y}{a} \sin \frac{\pi \gamma z}{a} \cos (2\pi \nu t + \tau).$$

Zde značí  $\alpha, \beta, \gamma$  libovolná celá čísla. Frekvence kmitů je pak určena vztahem

$$\nu^2 = \frac{c^2}{4} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{a^2}.$$

Každé skupině celých čísel  $\alpha, \beta, \gamma$  odpovídá jeden kmit.<sup>3)</sup> Různých kmitů, jejichž frekvence jest  $\leq \nu$ , je tolik, kolik mřížových bodů, t. j. bodů s celistvými souřadnicemi, leží uvnitř koule o poloměru

$$\sqrt{\frac{4a^2\nu^2}{c^2}} = \frac{2a\nu}{c}.$$

Vezmeme-li ohled ještě na to, že ne všem změnám znamének u veličin  $\alpha, \beta, \gamma$  odpovídají nové kmity, musíme dělití objem koule čtyřmi. Vychází pak

$$\frac{8}{3}\pi \frac{a^3 \nu^3}{c^3},$$

jakožto počet elektromagnetických kmitů o frekvenci  $\leq \nu$ . V mezikouli o středu  $O$  a o krajních poloměrech  $2a\nu/c$  a  $2a(\nu + d\nu)/c$  je mřížových bodů přibližně tolik, kolik jednotek má objem mezikouli, tedy

$$\frac{8\pi a^3 \nu^2}{c^3} d\nu,$$

takže na  $1 \text{ cm}^3$  jich tam připadá

$$\frac{8\pi \nu^2}{c^3} d\nu. \quad (4)$$

To je formule Rayleigh-Jeansova pro počet vibrací na  $1 \text{ cm}^3$ , o frekvencích obsažených v mezích  $\nu$  a  $\nu + d\nu$ . Této formule užívají všechny teorie záření. Poznamenejme, že výpočet právě uvedený je přibližný a že  $d\nu$  není nekonečně malé číslo, nýbrž jen číslo malé proti  $\nu$ ;  $d\nu$  musí býti dosti veliké, aby v oné kulové vrstvě (jejíž tloušťka jest úměrná  $d\nu$ ) opravdu nějaké mřížové body byly.

Planck předpokládá nyní, že energie, kterou má elektromagnetický kmit o frekvenci  $\nu$ , mění se jen po kvantech o velikosti  $h\nu$ , kde  $h$  je konstanta. Podrobněji řečeno: v úzkém pruhu spektra, které dostaneme rozkladem černého záření, má frekvence  $\nu$  (po případě frekvence velmi málo od ní se lišící) energii, která

<sup>3)</sup> Viz na př. M. Planck: Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, 2. Aufl., Leipzig, § 169.

se rovná buď nule nebo  $h\nu$ , nebo  $2h\nu$ , ... Změny v energii, rovné vždy celistvému násobku kvanta  $h\nu$ , dějí se velmi rychle, ale tak, že střední energie vypočtená pro dobu nekonečně dlouhou, je stále stejná. Hledejme střední energii takového kmitu. Výpočet je známý, také L. Brillouin<sup>3)</sup> ve svých přednáškách, které nedávno u nás měl, jej podal, takže naznačím jen výsledek. Střední energie bude podle Gibbsova pravidla

$$\frac{\sum_{m=0}^{\infty} k e^{-\beta m h \nu} m h \nu}{\sum_{m=0}^{\infty} k e^{-\beta m h \nu}} = \frac{h \nu}{e^{\beta h \nu} - 1}. \quad (5)$$

Hledaná energie záření, obsažená v pruhu spektra mezi frekvencemi  $\nu$  a  $\nu + d\nu$ , je rovna počtu vibrací násobenému střední energií jedné vibrace, tedy

$$dW = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} d\nu \cdot \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} = \frac{8\pi h\nu^3 \cdot d\nu}{c^3(e^{\beta h\nu} - 1)},$$

a hustota záření je dána Planckovou formulí:

$$u = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3(e^{\beta h\nu} - 1)}. \quad (6)$$

Zase máme zde součin dvou činitelů: Jeden činitel  $\nu^3$  roste s  $\nu$ , druhý pak  $(e^{\beta h\nu} - 1)^{-1}$  ubývá s  $\nu$ . Součin má pro určitou frekvenci  $\nu$  maximum. Vytkněme stručně předpoklady, o něž se opírá odvození formule (6):

1. Počet všech jednoduchých elektromagnetických kmitů, jejichž frekvence jsou v mezích  $\nu$  a  $\nu + d\nu$ , rovná se počtu takových kmitů v dutině vodiče.

2. Energie takového kmitu jest úměrna celistvému násobku kvanta  $h\nu$ .

3. Střední hodnota energie kmitu se vypočte užitím Gibbsovy formule (3a).

4. Energie záření pro frekvence mezi  $\nu$  a  $\nu + d\nu$  se rovná počtu všech kmitů násobenému střední energií jednoho z nich.

Planckova formule (6) byla tolikráte aplikována a potvrzena, že je na místě otázka, zda a do jaké míry jsou jejím potvrzením také nepřímě potvrzeny předpoklady, na kterých se zakládá její odvození. Klademe si především *tyto dvě otázky*: Existuje zářivá energie opravdu jen v kvantech? Jsou kvanta určité frekvence

<sup>3)</sup> Viz A. Schäfer: Einführung in die theoretische Physik, II. Bd. I. Teil. Theorie der Wärme, § 113; Berlin 1921. L. Brillouin: Les statistiques quantiques (Conférences d'actualités scientifiques et industrielles XV, Paris 1930).

sama o sobě ve statistické rovnováze či mohou se měnit ve kvanta jiné frekvence?

*První otázku* zodpověděl už sám Planck, když před lety připustil, že absorpce energie může se dít také po částech kvant nebo spojitě; emisi připouští výhradně nespojitou.

Pokud se týče *druhé otázky*, všimněme si první části důkazu, totiž odvození formule (4). Vlastně se předpokládá statistická rovnováha pro kvanta každé frekvence zvláště. Hledá se rozdělení kvant o frekvenci  $\nu$  mezi jednotlivé mřížové body obsažené v mezikouli o tloušťce úměrné veličině  $d\nu$ . Vzpomeňme, že ta tloušťka není infinitesimální; obsahuje mnoho mřížových bodů. Avšak každý z těch bodů odpovídá obecně jiné frekvenci, třeba rozdíl, menší než  $d\nu$ , jsou malé proti  $\nu$ . Z toho následuje, že důkaz připouští přeměnu kvant z jedné frekvence na jinou, při čemž se ovšem vyskytnou jakési zbytky, které se po případě zase spojí v jiná kvanta atd. Kdybychom totiž trvali důsledně na tom, že každé frekvenci  $\nu$  náleží vždy přesně kvantum  $h\nu$  nebo jeho celistvý násobek, nepochopili bychom, jak se děje výměna energie mezi jednotlivými částmi systému, která se všeobecně připouští. Systém není v klidu, všude v něm se odehrává ustavičně emise a absorpce. A tu je na snadě myšlenka: když je možno, aby kvantum  $h\nu$  přešlo v kvantum  $h\nu'$  uvnitř onoho mezikouli s nějakým malým zbytkem nebo deficitem  $|h(\nu' - \nu)| < h d\nu$ , je také možno, že po řadě takových přeměn přispěje kvantum  $h\nu$  k vytvoření kvant o frekvencích docela jiných než  $\nu$ . Připomínám, že v teorii t. zv. Comptonova efektu se připouští, že kvanta (odpovídající paprskům X) mohou měnit svou frekvenci; ovšem zároveň se mění i jejich energie, kterou přijímají od molekul, po případě jim odevzdávají.

Učíme předpoklad, že *okamžité rozdělení energie mezi různé frekvence* (při dané teplotě) *má vliv na pravděpodobnost, se kterou čekáme přechody kvant z jedné frekvence do druhé*. Matematicky vyjádříme věc takto: Pozorujme stav celého černého tělesa v okamžicích  $t = \vartheta, 2\vartheta, 3\vartheta, \dots$ , kde  $\vartheta$  je velmi krátký časový interval. V okamžiku  $\vartheta$  budiž dáno rozdělení energie ve spektru o hustotě rovné funkci  $f_1(\mu)$  frekvence  $\mu$ . Rozdělení energie platné v okamžiku  $2\vartheta$  bude dáno funkcí  $f_2(\nu)$  frekvence  $\nu$ , která se odvodí takto:

$$f_2(\nu) = \int k^{(1)}(\mu, \nu) f_1(\mu) d\mu.$$

Zde  $k^{(1)}(\mu, \nu)$  udává vliv jednotkové hustoty energie o frekvenci  $\mu$ , vyskytující se v okamžiku  $\vartheta$ , na hustotu energie o frekvenci  $\nu$ , vyskytující se v okamžiku  $2\vartheta$ . Budiž

$$k^{(1)}(\mu, \nu) > 0, \quad \int k^{(1)}(\mu, \nu) d\nu = 1.$$

Předešlé integrace podle  $\mu$  a podle  $\nu$ , jakož i integrace v následu-



jších vzorcích, vztahují se k celému spektrálnímu oboru. Definujeme-li

$$k^{(n)}(\mu, \nu) = \int k^{(n-1)}(\mu, \sigma) k^{(1)}(\sigma, \nu) d\sigma,$$

bude rozdělení energie v okamžiku  $3\vartheta$  dáno formulí

$$f_3(\sigma) = \int k^{(1)}(\nu, \sigma) f_2(\nu) d\nu = \int k^{(2)}(\mu, \sigma) f_1(\mu) d\mu$$

a v okamžiku  $(n+1)\vartheta$  obecně

$$f_{n+1}(\sigma) = \int k^{(n)}(\mu, \sigma) \cdot f_1(\mu) d\mu.$$

Podle základní věty Markovovy (viz přednášku o Brownově pohybu) jest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k^{(n)}(\mu, \sigma) = \varphi(\sigma)$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\sigma) = \varphi(\sigma) \int f(\mu) d\mu = E \cdot \varphi(\sigma),$$

kde  $E$  je totální energie spektra, neproměnná během času. Poslední formule udává hustotu energie jakožto funkci frekvence  $\sigma$  po nekonečně dlouho trvající výměně energií. Výsledné rozdělení energie závisí podle toho jen na totální energii  $E$  a na zákonu přechodů daném funkcí  $k^{(1)}(\mu, \nu)$ , nikoli však na počátečním rozdělení  $f_1(\mu)$  energie ve spektru. Funkce  $\varphi(\nu)$  musí být ovšem totožná s funkcí (6). Takto se nám jeví *Planckova formule jako formule limitní*; ona definuje stav, ke kterému se blíží černé těleso, v němž původně je dán stav neustálený, neodpovídající formuli (6). Docela podobně odpovídá Maxwellova formule o rozdělení rychlostí ustálenému stavu, který očekáváme jakožto výsledek (nekonečně dlouho trvajícího) vývoje z počátečního neustáleného stavu.

Tento náčrtek, jenž má ukázati, jak by se dala odvoditi Planckova formule s obecnějšího hlediska, potřeboval by podrobnějšího zpracování.

Ke konci ještě několik slov o pojmu kvanta energie. Einstein<sup>4)</sup> a jiní teoretikové sledovali dále názor, že zářivá energie se sdílí jen po kvantech  $h\nu$ , kde  $\nu$  značí frekvenci, se kterou kvantum bylo vyzářeno. Je těžko představit si mechanismus vysílání energie a mnoho badatelů přemýšlelo o tom, proč má být energie vysílána jenom po kvantech a proč ta kvanta mají být úměrna frekvenci. Jednoduchá úvaha z akustiky, kterou si dovolím nyní uvést, dává možnost pochopiti, jaký je snad *smysl úměrnosti mezi energií a mezi frekvencí*.

Představme si nejprve zdroj akustických vln nekonečně vzdálený. Vlny, jež pozorujeme, jsou rovinné a za předpokladu nevířivého pohybu je hydrodynamický potenciál  $\varphi$  ve vzduchu

<sup>4)</sup> A. Einstein: Annalen der Physik (4) XVII, 1905, p. 132; Physikalische Zeitschrift 18, 1917, p. 121.

(pro nekonečně malé pohyby) dán rovnicí

$$\varphi = A \cos 2\pi\nu (x - at);$$

vlna se šíří rychlostí  $a$  v kladném směru osy  $Ox$ ,  $\nu$  je frekvence a  $A$  amplituda kmitů. Rychlost, se kterou se částice vzduchová pohybuje v místě  $x$ , jest

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2\pi\nu A \sin 2\pi\nu (x - at).$$

Tlak  $p_0$ , jenž by panoval, kdyby se vlna nešířila, zvětšuje se při kmitání o  $\delta p$  a platí<sup>5)</sup> (je-li  $\rho_0$  hustota vzduchu klidného)

$$\delta p = \rho_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 2\pi\nu\rho_0 a A \sin 2\pi\nu (x - at).$$

Je-li  $dW$  práce, jež spočívá v tom, že za tlaku  $p_0 + \delta p$  pošunují se částice vzduchu ploškou  $1 \text{ cm}^2$  kolmou k  $Ox$  o délku  $d\xi$ , jest a tedy

$$\begin{aligned} dW &= (p_0 + \delta p) d\xi, \\ \frac{dW}{dt} &= p_0 2\pi\nu A \sin 2\pi\nu (x - at) + 4\pi^2\nu^2\rho_0 a A^2 \sin^2 2\pi\nu (x - at) = \\ &= 2(\pi\nu A)^2 \rho_0 a + P, \end{aligned}$$

kde  $P$  jsou periodické členy, úměrné výrazu  $\sin 2\pi\nu (x - at)$ . Za dobu  $t$ , která se rovná velkému počtu period, jest energie, prošlá ploškou  $1 \text{ cm}^2$  kolmou k  $Ox$ , rovna

$$W = 2(\pi\nu A)^2 \rho_0 a t,$$

takže na jednu periodu připadne za tuto dlouhou dobu  $t$  průměrně energie

$$W_p = \frac{W}{t\nu} = 2\pi^2 A^2 \rho_0 a \nu.$$

Ploškou  $1 \text{ cm}^2$  kolmou ke směru šíření projde za dobu jedné periody množství energie úměrné frekvenci.

Můžeme aplikovati tento výsledek také na vlny elektromagnetické? Z Maxwellových rovnic není bezprostředně patrné, že by to bylo možno. Ale myslím, že bychom bez újmy předpokladům Planckovy teorie o záření černého tělesa mohli přibrati další, že totiž energie vyzářená atomem během jedné periody jest úměrná frekvenci. Tento poslední předpoklad nijak nestanoví způsob, kterým se emise světla děje. Atom může vyzářovati energii o frekvenci  $\nu$  třeba spojitě nebo po částech, které jsou rovny  $h\nu$  nebo menší než  $h\nu$ ; ale za každou periodu emituje se

<sup>5)</sup> Viz Lord Rayleigh: The Theory of Sound, second edition, II No 245 (London, 1896).

(snad jen průměrně) energie úměrná frekvenci. Když si všimneme blíže Planckova myšlenkového postupu, shledáváme, že vlastně celý důkaz zabývá se, abych tak řekl, distribucí kvant do daných přihrádek a že při tom nepřichází v úvahu, děje-li se emise a absorpce spojitě či nespojitě a může-li energie existovati jen v kvantech  $h\nu$  či také v menších částech. Není snadno usuzovati z úspěchu Planckova zákona zpět o tom, co z jeho platnosti plyne pro mechanismus emise a absorpce.

Jsem si vědom toho, že úvahy, které jsem dnes přednesl o možnosti pojímání Planckovu formuli jako zákon limitní a o interpretaci úměrnosti mezi energií a frekvencí, zajisté by musily býti dříve srovnány ještě s jinými fakty, než bychom na nich mohli dále stavěti. Ale v těchto obtížných kapitolách o teorii záření nutno pokusiti se objasniti základní vztahy z různých hledisek, chceme-li získati přesnější názor. V zítřejší poslední přednášce dovolím si Vám referovati ještě o jiných teoretických úvahách, jež směřují k výkladu t. zv. kvantových vztahů.

#### IV. Elektrony a šíření světla.

Studium otázek o šíření světla a elektromagnetických vln vůbec vedlo v důsledku známých teorií o atomistické struktuře elektriny k jakémusi dualismu. Klasická undulační teorie světla zůstává stále základem k vysvětlení optických zjevů; interference a ohyb světla nedají se vyložití bez pojmu vlny. Ale některé jiné zjevy zdají se nasvědčovati tomu, že světlo je povahy korpuskulární. Paprsky světla určují dráhu malých světelných impulsů; je-li světlo ve velké vzdálenosti od svítícího zdroje slabé, znamená to, že by impulsy zeslábly, nýbrž jen to, že jich tam připadá na  $1 \text{ cm}^3$  méně než v blízkosti zdroje.<sup>1)</sup> V nejnovější době pokoušejí se přestítelé vlnové mechaniky vypracovati teorii světla tak, aby obě hlediska, undulační i korpuskulární, byla uvedena v souvislost. V dnešní přednášce promluvíme o některých problémech vlnové mechaniky, které se týkají šíření světla a pohybu elektronů.

Jedním z hlavních podnětů k novým výkladům optických zjevů byly *úvahy o emisních spektrech*.<sup>2)</sup> R. 1860 objevili Kirchhoff a Bunsen spektrální analýsu. Tu byl na snadě a skutečně také se vytvořil názor, že čáry ve spektrech rozžhavených plynů vznikají obdobně jako harmonické tóny, které vydává na př. struna. Struna má své akustické spektrum, t. j. může vydávati harmonické tóny

<sup>1)</sup> J. J. Thomson: *Elektrizität und Materie*, 2. Aufl., Braunschwig 1909. (Anglický originál vyšel r. 1904.)

<sup>2)</sup> Z mnohých knih, které dávají přehled o moderních teoriích spekter, uvádím dílo: E. Bloch: *L'ancienne et la nouvelle Théorie des Quanta* (Paris 1930).

určitých frekvencí. Podobně by tedy podle onoho názoru kmital i atom rozžhaveného plynu; každá čára ve spektru plynu odpovídala by jednomu způsobu kmitání jeho atomů. Ale čím podrobněji byly sledovány zákonitosti spekter, tím více klonili se fyzikové k názoru, že mechanismus světelné emise je jiný a složitější než chvění struny. Snahy teoretiků směřovaly mimo jiné k tomu, aby byly vyloženy t. zv. serie spektrálních čar. Je známo, že ve spektrech vyskytují se čáry, které odpovídají frekvencím  $\nu$  podle formule

$$\nu = \frac{R}{m^2} - \frac{R}{n^2},$$

kde  $R$  je konstanta a  $m, n$  jsou celá čísla. Měníce  $n$  při konstantním  $m$  dostáváme čáry jedné serie; každé  $m$  dává tak jednu serii. Bohrova teorie spekter i vlnová mechanika směru Schrödingerova shodují se v tom, že přiřadí každý z obou členů stojících na pravé straně hořejší formule periodicky se opakujícím zjevu, jakémusi kmitání; optická frekvence  $\nu$  je pak určena oběma těmi kmitavými ději, jež odpovídají prvnímu resp. druhému členu. Podle Bohra odpovídá každý člen oběhu elektronu kolem kladného jádra atomu. Frekvence oběhů, stanovené čísla  $m$  resp.  $n$ , nejsou frekvence optické; světlo o optické frekvenci  $\nu$ , určené vzorcem, vznikne, když elektron přeskočí z dráhy ( $n$ ) do dráhy ( $m$ ). Podle Schrödingera<sup>3)</sup> odehrává se vně vibrujícího atomu jakýsi děj vystižený matematicky funkcí  $\psi$ ; tato funkce vyhovuje parciální rovnici druhého řádu a je obdobná funkcím, jež vyjadřují ustálené kmitavé zjevy v akustice a v optice. Jednoduchými podmínkami vybírá se pak ze všech možných funkcí  $\psi$  zcela určitá řada funkcí  $\psi_1, \psi_2, \dots$  podobně jako máme určitou řadu funkcí definujících ustálené jednoduché kmity struny nebo vzduchu uzavřeného ve skříňce. A teprve kombinace dvou funkcí  $\psi_m$  a  $\psi_n$ , jejichž fyzikální význam vůbec není přesně definován, vede k optické frekvenci, k určité spektrální čáře, kterou vibrující atom vysílá.

Dovolují si zde upozorniti na jednu Sommerfeldovu práci z r. 1912,<sup>4)</sup> ve které se mimo jiné jedná o řešení klasické rovnice pro kmity

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \Delta U \quad (1)$$

v oborech sahajících do nekonečna. Interpretujeme-li  $c$  jakožto rychlost zvuku a  $U(x, y, z, t)$  jakožto složku rychlosti, platí rovnice (1) pro nekonečně malé kmity vzduchu. Je-li  $c$  rychlost světla,

<sup>3)</sup> E. Schrödinger: Abhandlungen zur Wellenmechanik, 2. Aufl., Leipzig 1928 (otisk prací z let 1926—27).

<sup>4)</sup> A. Sommerfeld: Die Green'sche Funktion der Schwingungsgleichung (Jahresber. d. d. Mathem. Vereinigung XXI, 1912, p. 309—353).

platí táž rovnice pro složku síly elektrické nebo magnetické v izolátoru. Zůstaňme prozatím u problému akustického. Je veliký rozdíl mezi teorií kmitů v oboru v nekonečnu položeném a mezi teorií kmitů v oboru sahajícím do nekonečna. Mějme na př. vzduch uzavřený ve skřínce. Připojíme-li k rovnici (1) podmínku, že normální složka rychlosti má být na stěnách rovna nule, jsou už tím stanoveny frekvence  $\nu_1, \nu_2, \dots$  jednoduchých kmitů, kterých je vzduch ve skřínce schopen (akustické spektrum); rovněž jest určeno ke každému  $\nu_k$  příslušné rozdělení amplitud a nejobecnější nekonečně malý pohyb vzduchu ve skřínce vzniká superposicí oněch jednoduchých kmitů. Jednoduché kmity vyjádřené vzorcem  $U = A \sin 2\pi\nu t$  jsou nemožny, není-li  $\nu$  rovno některé z frekvencí  $\nu_k$ . V prostoru nemezeném jsou však možny kmity o libovolné frekvenci, jak ukazuje příklad

$$U = \frac{\sin 2\pi\nu(t - r/c)}{r} - \frac{\sin 2\pi\nu(t + r/c)}{r},$$

kde  $r$  značí vzdálenost bodu od počátku  $O$ . Výraz  $U$  je rozdíl dvou členů; každý z nich vzat sám o sobě stává se nekonečně velikým v  $O$  (pro  $r = 0$ ), ale jejich rozdíl, který možno psáti také takto

$$U = 2 \frac{\sin 2\pi\nu r/c \cdot \cos 2\pi\nu t}{r},$$

je konečný i pro  $r = 0$  a představuje stojaté kmitání o zcela libovolné frekvenci  $\nu$  s amplitudou konečnou v každém bodě prostoru. Oba členy v hořejší formuli pro  $U$  liší se svým fysikálním významem: První člen odpovídá vlnám, které by se utvořily, kdyby bodový zdroj umístěný v  $O$  vysílal vlny o frekvenci  $\nu$  po nekonečně dlouhou dobu. Druhý člen odpovídá vlnám odraženým na sférickém zrcadle o středu  $O$  a nekonečně velikém poloměru. Takového zrcadla není, tudíž druhý člen (aspoň s platností pro libovolně veliké  $r$ ) nemá fysikálního významu. Sommerfeld ukazuje, jak i v jiných úlohách (na př. v případě kmitů vně koule) se mají vyloučiti takovéto členy a jak po jejich vyloučení docházíme k nespojitému akustickému spektru i pro obory sahající do nekonečna. Další zpracování a aplikace Sommerfeldových úvah měly by význam právě tak pro akustiku a pro teorii radiotelegrafických anten jako pro Schrödingerovu vlnovou mechaniku, jejíž problémy jsou po stránce matematické velmi blízké problémům citované práce z r. 1912.

Připomínám nyní jednu vlastnost rovnice (1), zjednodušené pro případ rovinných vln ( $U$  je funkcí proměnných  $x$  a  $t$ ) na tvar

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \dots \text{pro rovinné vlny.} \quad (1)$$

Je-li v okamžiku  $t = 0$

$$U = \varphi\left(-\frac{x}{c}\right), \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \varphi'\left(-\frac{x}{c}\right),$$

kde  $\varphi$  je libovolná funkce a  $\varphi'$  její derivace, platí v každém okamžiku  $t$

$$U = \varphi\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

To znamená, že vlna, která má v počátečním okamžiku libovolný tvar, šíří se beze změny tvaru. Když na př. pro  $t = 0$  jest  $U = A \cos(-2\pi x/c)$  jen v omezené části osy  $Ox$  a všude jinde  $U = 0$ , pak periodické rozdělení hodnot  $U$  v kterémkoli pozdějším okamžiku  $t$  podle formule

$$U = A \cos 2\pi r \left(t - \frac{x}{c}\right)$$

platí zase v omezené části osy  $Ox$ , ostatně je všude  $U = 0$ . Vlna se pošinouje jako celek beze změny tvaru s rychlostí  $c$  s diskontinuitou v čele vlny. Posléze uvedená formule bere se často také s neomezenou platností pro všechny hodnoty  $x$  a  $t$ ; pak vyjadřuje vlnění rozšířené ve směru osy  $Ox$  do nekonečna.

Zakladatel *vlnové mechaniky* Louis de Broglie vytkl si ve své doktorské disertaci z r. 1924<sup>6)</sup> za úkol přiřaditi každému pohybujícímu se hmotnému bodu vlnu o určité frekvenci. *Hlavní výsledek* jeho úvah vyslovíme takto: Pohybuje-li se hmotný bod o hmotě  $m_0$  rychlostí  $v$ , je jeho pohyb doprovázen (ve vakuu) elektromagnetickou vlnou o délce  $\lambda = h/m_0v$ , kde  $h = 6.55 \cdot 10^{-27}$  je Planckova konstanta. Zavedeme-li do počtu frekvenci  $\nu$  rovnici  $\nu\lambda = c$ , kde  $c = 3 \cdot 10^{10}$  je rychlost světla ve vakuu, můžeme psáti de Broglieův vztah též takto

$$m_0v = \frac{h\nu}{c}. \quad (2)$$

Tato rovnice, odvozená r. 1924, vedla k největšímu úspěchu vlnové mechaniky, když r. 1927 několik badatelů dokázalo experimentálně, že *katodové paprsky, t. j. elektrony v pohybu, jsou skutečně doprovázeny krátkými vlnami právě podle rovnice (2).*<sup>7)</sup> Myšlenkový postup de Broglieových úvah nastíním stručně takto: V pohyblivém systému souřadnic, jenž se pohybuje ve vakuu vůči pevnému

<sup>6)</sup> L. de Broglie: Recherches sur la théorie des quanta (Annales de Physique (10) III. 1925, p. 22—128). Viz též jeho spis *Ondes et mouvements* (Collection de Physique mathém. fasc. I, Paris 1926) jakož i jeho novější zpracování vlnové mechaniky v pracích citovaných v pozn. 9.

<sup>7)</sup> Viz pěkný přehled hlavních výsledků v knize G. P. Thomson: *The Wave Mechanics of Free Electrons*, London 1930.

systému přímočaře a rovnoměrně rychlostí  $v$ , je stojaté vlnění o frekvenci  $\nu_0$  rozšířené do celého prostoru. Pozorovateli, jenž se nepohybuje vůči pevnému systému, jeví se ono vlnění nikoli stojatým, nýbrž postupným a jeho frekvence  $\nu$  liší se od frekvence  $\nu_0$ . De Broglie uvažuje o případě, že je dáno současně nekonečně mnoho vln o frekvencích málo se lišících od  $\nu_0$ . V pevném systému bude tedy skupina postupných vln o různých frekvencích  $\nu$  a každé frekvenci  $\nu$  patří jiná rychlost šíření. Užije-li se pojmu skupinové rychlosti (viz dále), který zavedli angličtí fyzikové, dojde se k tomuto výsledku: Ačkoli každý rozruch šíří se ve vakuu rychlostí  $c$ , energie skupiny vln postupuje menší rychlostí, „skupinovou rychlostí“, která se právě rovná rychlosti  $v$  pohyblivého systému. Výpočty de Broglieovy opírají se o vzorce známé z teorie relativity. V nejstarších pracích předpokládá, že vlnění řídí se rovnicí (1); v pojednání z r. 1926 praví, že

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U + \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 U = 0 \quad (1a)$$

jest obecná rovnice pro šíření všech vln ve skupině, která je přiřazena pohyblivému bodu o hmotě  $m_0$ .<sup>8)</sup> Rovnice (1a) užívá pak i ve svých dalších spisech.<sup>9)</sup> Nepřekvapuje, že úvahy mohou být založeny buď na rovnici (1) nebo na rovnici (1a); neboť ve vlnové mechanice uvažuje se zásadně o jednoduchých vlnách definovaných vzorcem  $\sin(at + bx)$  (pro rovinné vlny), kterýžto vzorec při vhodné volbě konstant  $a$  a  $b$  vyhovuje rovnici (1) i rovnici (1a). Zbývá nyní užití kvantové relace, která stanoví, že energie bodu spojeného s pohyblivým systémem rovná se  $h\nu$ , a dostáváme vzorec (2). Zvláště zajímavým způsobem odvozuje de Broglie tento vztah v práci z r. 1930, kde klade t. zv. Jacobiovu funkci pro pohyb hmotného bodu úměrnou fázi, t. j. argumentu funkce sinus ve formuli pro vlnu.<sup>10)</sup> De Broglie netají se s tím, že vlnová mechanika setkává se dosud se značnými obtížemi a v krásně psané předmluvě ke spisu *Introduction à l'étude de la Mécanique ondulatoire*<sup>9)</sup> jakož i v řadě zajímavých populárních článků<sup>11)</sup> vykládá bez výpočtů základy své teorie. Shrňme ještě jednou hlavní výsledek: Každý hmotný bod je spojen se soustavou stojatých vln,

<sup>8)</sup> L. de Broglie: *Équation générale de propagation pour le point matériel libre* (Journal de Physique (6), VII. 1926, p. 321—337).

<sup>9)</sup> L. de Broglie: *La Mécanique ondulatoire* (Mémorial des Sciences phys. fasc. 1., Paris 1928); *Introduction à l'étude de la Mécanique ondulatoire*, Paris 1930.

<sup>10)</sup> L. de Broglie: *Sur les équations et les conceptions générales de la Mécanique ondulatoire* (Bulletin de la Société math. de France 48, 1930, p. 1—28).

<sup>11)</sup> Některé z nich byly otištěny v brožurě L. de Broglie: *Recueil d'exposés sur les ondes et corpuscules* (Paris 1930).

kteřá se s ním pohybuje jako jeden celek. Klidnému pozorovateli jeví se vlny jako postupné o frekvenci  $\nu$ , která souvisí s hmotou  $m_0$  bodu a s jeho rychlostí  $v$  podle rovnice (2).

Poznamenávám ještě toto: Teorie de Broglieova neodůvodňuje „kvantového vztahu“ mezi energií a frekvencí; prostě jej přejímá. Podle Einsteinovy práce z r. 1917<sup>12)</sup> je tato kvantová relace v úzkém vztahu s jinou podobnou: každému světelnému kvantu o frekvenci  $\nu$  náleží hybnost  $h\nu/c$ ; to jsou ty impulsy, nárazy, o kterých psal Thomson r. 1904. Přijmeme-li, jak se to činí bez zvláštního odůvodnění ve vlnové mechanice, že hybnost  $m_0v$  hmoty  $m_0$ , která má rychlost  $v$ , rovná se hybnosti světelného kvanta  $h\nu$ , které odpovídá kmitům o frekvenci  $\nu$  doprovázejícím pohyb hmoty, dostaneme právě vztah (2).

Srovnám nyní de Broglieovy vlny vyhovující rovnici (1a) s *elektromagnetickými vlnami v kabelu*. Předpokládám, že kabel je neomezený, rovný, homogenní a že leží v ose  $Ox$ ; na 1 cm délky nechť připadá kapacita  $K$  (vůči Zemi), samoindukce  $L$  a odpor  $R$ . Pak vyhovují intenzita proudu i napětí, jakožto funkce veličin  $x$  a  $t$ , jedné a téže rovnici (viz na př. knihu Breisigovu citovanou v pozn.<sup>13)</sup>)

$$KL \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + KR \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0.$$

Pišme  $V$  ve tvaru

$$V = U \cdot e^{-\frac{R}{2L}t};$$

funkce  $U$  vyhovuje, jak se přesvědčíme dosazením do předešlé rovnice, pozměněné rovnici

$$KL \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{R^2 K}{4L} U = 0. \quad (1b)$$

Napětí  $V$  je tedy rovno součinu z  $U$  a z exponenciálního faktoru, jenž vyjadřuje útlum závislý toliko na čase a nikoli na  $x$ . Šíření vln kabelem je vystiženo v podstatě rovnicí (1b).

Z teorie plyne především tento důsledek: Je-li počáteční rozruch v kabelu omezen jen na určitou úsečku konečné délky, šíří se rozruch tak, že čelo vlny postupuje kabelem rovnoměrně rychlostí  $1/\sqrt{KL}$ . Vedle funkcí, které určují průběh takovýchto po-

<sup>12)</sup> A. Einstein: Zur Quantentheorie der Strahlung (Physikalische Zeitschrift 18, 1917, p. 121—128).

<sup>13)</sup> Viz F. Breisig: Theoretische Telegraphie 2. Aufl. Braunschweig, 1924, p. 307, 331—333. J. B. Pomey: Cours d'Electricité théorique II, Paris 1928, p. 57—58. Stran řešení telegrafické rovnice viz též J. Hadamard: Huyghensův princip (přednášky konané v Praze a v Brně 1928; Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 58; 1929, p. 346—366, hlavně odst. 5 a 7).



stupně se šířících rozruchů, má rovnice (1b) také řešení tvaru

$$A \cos 2\pi\nu \left( t - \frac{x}{v} \right); \quad (3)$$

dosadíme-li (3) na místo  $U$ , do (1b), vychází vztah mezi konstantami  $v$  a  $\nu$

$$v^2 = \frac{4\pi^2\nu^2}{4\pi^2KL\nu^2 + \frac{KR^2}{4L}} < \frac{1}{KL}. \quad (4)$$

Jaký je význam vzorce (3)? Jakému ději odpovídá? Kdybychom měli v omezené části kabelu v okamžiku  $t = 0$  sinusové rozdělení napětí, měnilo by se napětí (nehledě k útlumu) během času tak, že by vůbec přestávalo být sinusovým; tvar vlny se mění při šíření kabelem. Je-li tedy dovoleno považovati formuli

$$U = A \cos 2\pi\nu \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

za definici postupné vlny o frekvenci  $\nu$  a rychlosti  $c$  ve shodě se zákonem (1) o šíření rovinných vln, není možno míti (3) za formuli pro šíření postupných vln v kabelu, kde platí rovnice (1b). Periodicky proměnná elektromotorická síla o frekvenci  $\nu$  vynutí sice v kabelu vlnu (3), jež má měřitelnou délku  $\lambda = v/\nu$ , ale rychlost  $v = \lambda\nu$  je jen zdánlivá, není to rychlost, se kterou nějaká vlna opravdu postupuje. Vyloučíme-li  $\nu$  ze vzorce (4), dostáváme vztah mezi  $v$  a  $\lambda$

$$v^2 = - \frac{R^2}{16\pi^2L^2} \lambda^2 + \frac{1}{KL}. \quad (4')$$

Klasické Kundtovy obrazce v trubicích, kde stojatá vlna vzniká superposicí vlny postupné s vlnou odraženou, dovolují přímo změřiti délku vlny  $\lambda$  v plynu a počítati pak ze známé frekvence  $\nu$  rychlost zvuku podle relace  $c = \lambda\nu$ . Ale v případě kabelu to tak nejde, poněvadž rychlost  $v$ , odvozená z direktního pozorování ustálených vln, je jen zdánlivá. To je dobře známo elektrotechnikům (viz Breisig, Pomey)<sup>13</sup>; připomněl jsem tuto věc proto, že v případě elektronových vln jsou poměry docela podobné.

Představme si nyní, že v kabelu není jen jediná vlna o frekvenci  $\nu$ , nýbrž že je tam současně celá skupina vln (3) s frekvencemi, které se málo liší od  $\nu$ ; předpokládáme, že  $v$  je funkcí frekvence  $\nu$  (v případě kabelu je závislost  $v$  na  $\nu$  dána vzorcem (4); následující úvaha platí obecně, nezávisle na tomto vzorci).

V okamžiku  $t = 0$  nechť se všechny vlny shodují v bodě  $O$  (pro  $x = 0$ ) co do fáze; jsou v maximu. Různost frekvencí způsobuje, že během času nastávají interference. Položme si otázku: jakou

rychlostí  $u$  musí se pozorovatel pohybovati podél osy  $Ox$ , aby ve všech místech své dráhy zastihl vlny ve stejné fázi?

Uvažujme nejprve o případě, že jsou dány toliko dvě vlny; jedna má délku  $\lambda$  a rychlost (t. j. konstantu ve formuli (3))  $v$ , druhá pak délku  $\lambda'$  a rychlost  $v'$ . Má-li pozorovatel zastihnouti obě vlny ve stejné fázi, je třeba, aby

$$\frac{v}{\lambda} t - \frac{x}{\lambda} = \frac{v'}{\lambda'} t - \frac{x}{\lambda'}$$

čili aby

$$\frac{x}{t} = v - \lambda \cdot \frac{v' - v}{\lambda' - \lambda}$$

Tímto vzorcem jest určena hledaná rychlost  $u = x/t$ , která se nazývá „skupinovou rychlostí“.

Předpokládejme nyní, že vedle vlny určené veličinami  $\lambda$  a  $v$  je nekonečně mnoho jiných, jejichž délky se málo od  $\lambda$  liší a pro něž platí vztah  $v = f(\lambda)$ ; hořejší vzorec pro skupinovou rychlost přechází v

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} \quad (4')$$

Vraťme se nyní k formuli (4') platné pro vlny v kabelu; dosadíme-li do vzorce pro skupinovou rychlost, vychází

$$uv = \frac{1}{KL}$$

Poněvadž  $v$  je menší než rychlost  $(KL)^{-1}$ , kterou se šíří čelo vlny v kabelu, jest  $u$  větší než tato rychlost. Veličina  $v$  jest ovšem jen zdánlivá rychlost postupné vlny a tedy  $u$  je také vlastně rychlost zdánlivá v tomto smyslu: za předpokladu, že vlny odpovídající formuli (3) jsou rozšířeny po celém kabelu, pozorovatel, jenž se pohybuje rychlostí  $u$ , sleduje (přibližně) maximum energie. V tom smyslu jest  $u$  rychlostí energie.

Máme nyní srovnati vlny v kabelu s elektronovými vlnami. G. P. Thomson vykonal v letech 1927—28 pokusy,<sup>15)</sup> kterými potvrdil existenci elektronových vln de Broglieových (pohybující

<sup>14)</sup> Touto podmínkou zaručuje se udržení stejné fáze jen po přiměřené krátkou dobu  $t$ ; po uplynutí dlouhé doby přestane shoda vln co do fáze a pojem skupinové rychlosti ztrácí smysl. Výjimku činí případ, kdy  $v$  je lineární funkcí  $\lambda$ . O skupinové rychlosti viz knihu T. H. Havelock: The propagation of disturbances in dispersive media, Cambridge 1914, hlavně p. 20 a násl.

<sup>15)</sup> G. P. Thomson: Diffraction of Cathode Rays by a thin Film (Nature 119, 1927, p. 890); Experiments on the Diffraction of Cathode Rays (Proc. of the Roy. Soc. London, Ser. A. 117, 1927, p. 600—609; 119, 1928, p. 651—663). Viz též pozn. 7.

se hmotný bod je zde nahrazen elektronem). Jeho otec J. J. Thomson podal teorii těchto pokusů na základě Maxwellových rovnic.<sup>16)</sup> Uvedu tuto teorii v úpravě Thomsona mladšího.<sup>17)</sup>

J. J. Thomson vychází z hypotézy, že elektron se skládá z velkého počtu částic o náboji  $\varepsilon$  a hmotě  $\mu$  a ze stejného počtu částic o náboji  $-\varepsilon'$  a o hmotě  $\mu'$ . Maxwellovy rovnice pro vakuum, kde je  $N$  takových nábojů jednoho i druhého druhu v  $1 \text{ cm}^3$  (supradispersivní prostředí), znějí

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi \sum \varepsilon \frac{dx_r}{dt} &= \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \\ \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} &= \frac{\partial \gamma}{\partial t} \\ \mu \frac{d^2 x_r}{dt^2} &= X_\varepsilon + \left( \gamma \frac{dy_r}{dt} - \beta \frac{dz_r}{dt} \right) \varepsilon. \end{aligned}$$

Zde značí  $X, Y, Z$  složky elektrické síly;  $\alpha, \beta, \gamma$  složky magnetické síly;  $x_r, y_r, z_r$  jsou souřadnice elektrického bodu (částice); sumace se vztahuje ke všem částicím obsaženým v  $1 \text{ cm}^3$ . Ke třem vypsaným rovnicím je připojiti šest dalších, které se z nich obdrží cyklickou záměnou písmen  $X, Y, Z$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$ ;  $x_r, y_r, z_r$ . Eliminací posledních šesti veličin obdržíme — vynechajíc členy  $\left( \gamma \frac{dy_r}{dt} - \beta \frac{dz_r}{dt} \right) \varepsilon$  vedle  $X_\varepsilon$  — pro složku  $Y$  elektrické síly rovnici

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \Delta Y + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + \frac{p_0^2}{c^2} Y = 0,$$

kde

$$p_0^2 = 4\pi c^2 \left( \frac{N\varepsilon^2}{\mu} + \frac{N\varepsilon'^2}{\mu'} \right)$$

a z toho (za předpokladu, že  $Y$  závisí jen na  $x$  a na  $t$ )

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{p_0^2}{c^2} Y = 0 \text{ pro rovinné vlny.} \quad (1c)$$

Tato rovnice má stejný tvar s rovnicí (1a) za obdobné suposice

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{4\pi^2 m_0^2 c^2}{h^2} U = 0 \text{ pro rovinné vlny.} \quad (1a).$$

Rovnice (1c) liší se od rovnice (1b) pro kmity v kabelu jen znamením posledního členu. Tato okolnost nemění však hlavních

<sup>16)</sup> J. J. Thomson: Beyond the Electron (Cambridge 1928).

<sup>17)</sup> Viz jeho spis (pozn. 7), kap. VIII.

důsledků teorie, které jsem dříve uvedl pro rovnici (1b). V případě rovnice (1c) platí zase, že čelo vlny šíří se vždy rychlostí  $c$ ; rovnici (1c) vyhovuje opět výraz (3), avšak relace mezi „rychlostí“  $v$  a délkou vlny  $\lambda$  zní zde

$$v^2 = \frac{p_0^2 \lambda^2}{4\pi^2} + c^2 > c^2, \quad \lambda = \frac{2\pi}{p_0} \sqrt{v^2 - c^2},$$

jak seznáme dosazením pravé strany (3) do (1c) na místo  $Y$ .

K rychlosti  $v$  patří skupinová rychlost  $u$  podle vztahu

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = \frac{c^2}{v} < c.$$

Vyjádřeme nyní frekvenci  $\nu$  vln jakožto funkci skupinové rychlosti  $u$ . Vychází

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{c^2}{\lambda u} = \frac{p_0}{2\pi \sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

*Pokusy G. P. Thomsona* záležely v tom, že nechal procházeti katodové paprsky nadměru tenkým lístkem kovu, jehož molekuly vytvořily na fotografické desce za lístkem postavené ohybový zjev (soustředné kruhy střídavě temné a světlé, jejichž poloměr závisí na frekvenci  $\nu$ ). *J. J. Thomson interpretuje skupinovou rychlost  $u$  jakožto rychlost katodových paprsků* (která se určuje z napětí v trubici vysílající paprsky); *poslední rovnice dává vztah*

$$2\pi\nu \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2} = p_0,$$

který právě byl potvrzen Thomsonem mladším. Mezi hmotou  $m_0$  klidného elektronu a hmotou  $m$ , kterou má, když se pohybuje rychlostí  $u$ , je relace<sup>18)</sup>

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

takže

$$h\nu = mc^2, \quad (5)$$

kde konstanta  $h$  jest určena vzorcem

$$h = \frac{2\pi m_0 c^2}{p_0}. \quad (6)$$

Rovnice (5) je známý *kvantový vztah* mezi energií  $mc^2$  elektronu a frekvencí záření  $\nu$ , které jej doprovází. Dosadíme-li do rovnice (1c)

<sup>18)</sup> Vztah ten se odvozuje obyčejně z principu relativnosti. Poznámám, že jej odvodil J. J. Thomson v poněkud jiné formě ve svých starších pracích: *Philosoph. Magazine* (5) XI. 1881, p. 229–249; *Recent researches in Electricity and Magnetism* (Oxford 1893, p. 21). Viz též konec této přednášky.

pro rovinné vlny na místo  $p_0$  hodnotu plynoucí ze vzorce (6), stává se (1c) identickou s de Broglieovou rovnicí (1a).

Z rovnic pro  $\nu$  plyne dále, že

$$m\nu = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \cdot \frac{2\pi c^2 \sqrt{1 - u^2/c^2}}{\lambda p_0} = \frac{h}{\lambda}$$

čili

$$m\nu = \frac{h\nu}{c}, \quad (7)$$

což je *druhý kvantový vztah*; zavedeme-li zde označení  $\nu$  pro rychlost (na místo  $u$ ) a píšeme-li  $m_0$  na místo  $m$ , přechází (7) v rovnici (2).

*Výsledek je ten:* Z Maxwellových rovnic a z hypotézy o konstituci elektronu vyplývá de Broglieova rovnice pro šíření vln doprovázejících katodové paprsky. Z toho pak obě kvantové relace (5) a (7), z nichž druhá je v podstatě totožná s de Broglieovou formulí (2). Kdybychom znali konstituci elektronu (t. j. hodnoty čísel  $N$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$ ,  $\mu$ ,  $\mu'$ ), dovedli bychom vypočítati konstantu  $p_0$ , která se vyskytuje v rovnici vyjadřující výsledky pokusů G. P. Thomsona, a podle vzorce (6) také Planckovu konstantu  $h$ .

J. J. Thomson jde ještě dále a uvažuje takto: částice, ze kterých se skládá elektron (elektrické body, subelektrony), jsou rozděleny kolem středu elektronu souměrně, pokud na ně nepůsobí elektrostatické pole; budiž  $N_0$  počet subelektronů kladných (nebo záporných) obsažených v  $1 \text{ cm}^3$ . Když však jest elektron v elektrostatickém poli o potenciálu  $F$ , a  $e$  jeho náboj, poruší se symetrie v rozdělení subelektronů a na  $1 \text{ cm}^3$  připadá jich pak

$$N = N_0 \left( 1 + \frac{2eF}{m_0 c^2} \right).$$

Do předešlých vzorců je pak třeba zavést modifikovanou hodnotu

$$p_0^2 \left( 1 + \frac{2eF}{m_0 c^2} \right)$$

na místo  $p_0^2$ . Formule pro stojatou vlnu rovinnou

$$Y = A \sin 2\pi\nu t \cdot \Psi(x)$$

dosazena do (1c) dává

$$\frac{p^2 - p_0^2}{c^2} \Psi + \frac{d^2 \Psi}{dx^2} = 0,$$

klademe-li  $p = 2\pi\nu$ ; tuto rovnici považujeme ve smyslu de Broglieově za „rovnici pro šíření vln“.

Dosaďme sem na místo  $p_0$  hořejší hodnotu modifikovanou. Vychází

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \left[ \frac{p^2}{c^2} - \frac{p_0^2}{c^2} \left( 1 + \frac{2eF}{m_0c^2} \right) \right] \Psi = 0.$$

Je-li  $u$  rychlost elektronu a  $E'$  jeho kinetická energie, jest

$$E' = \frac{m_0u^2}{2}$$

a poněvadž čtverce frekvencí mají se k sobě jako čtverce hmot elektronu, je dále

$$\frac{p^2}{p_0^2} = \frac{1}{1-u^2/c^2}, \quad \frac{p^2 - p_0^2}{c^2} = \frac{u^2p_0^2}{c^4} = \frac{4\pi^2m_0^2u^2}{h^2} = \frac{8\pi^2m_0}{h^2} E'$$

a tedy

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m_0}{h^2} (E' - F) \Psi = 0.$$

Tato rovnice, pokud běží o rovinné vlny, je totožná s rovnicí de Broglieovou

$$\Delta\Psi + \frac{8\pi^2m_0}{h^2} (E' - F) \Psi = 0$$

platnou pro pohyb částičky v silovém poli definovaném funkcí  $F$ .

Toto odvození podal J. J. Thomson;<sup>16)</sup> v knize Thomsona mladšího<sup>17)</sup> je taktéž uvedeno.

Ke konci zmíním se ještě o *některých výsledcích originální a rozsáhlé badatelské činnosti J. J. Thomsona*, pokud mají vztah k našemu tématu.<sup>18)</sup>

V dubnu 1881 vyšla v Philosophical Magazine práce, ve které uvažuje o pohybu zelektrovaných vodičů, zejména o pohybu koule. Podnětem k této teoretické studii, která je dodnes základní prací v nauce o elektronech, byly experimenty Crookesovy a Goldsteinovy o katodových paprscích. Tyto paprsky byly již tehdy pojímány jako pohybující se elektrické částičky a tu Thomson, vycházející z Maxwellových rovnic a z představ, které si učinil o vlastnostech elektrostatických silových trubic spojených s nabitou koulí, ukazuje, že elektromagnetická energie v prostoru kolem pohybující se koule zvětšuje její setrvačnost. Hmotu zelektrované koule pohybující se malou rychlostí zvětšuje se o veličinu

$$\frac{4}{15} \frac{e^2}{ac^2},$$

kde  $a$  je poloměr koule,  $e$  její náboj (v jednotkách elektromagnetických) a  $c$  rychlost světla. V pozdějších pracích, zejména v knize o nových výzkumech o elektríně a o magnetismu (1893) propracoval

teorii dále, a to pro libovolně veliké rychlosti koule; na str. 21 uvedené knihy uvádí úplnou formuli pro zdánlivé zvětšení hmoty pohybem. Uvádím zde tři důsledky z této formule:

a) Pokud poměr  $\beta$  rychlosti koule k rychlosti  $c$  světla je malý, je zdánlivé zvětšení hmoty dáno výrazem

$$\frac{1}{c^2} \left( \frac{2}{3} \frac{e^2}{a} + \frac{4}{15} \frac{e^2}{a} \beta^2 + \dots \right).$$

První člen této formule liší se od formule z r. 1881, kde byl koeficient  $\frac{4}{15}$  místo nynějšího  $\frac{2}{3}$ .

b) Blíží-li se rychlost koule rychlosti světla, roste zdánlivá hmota do nekonečna a Thomson praví: „Není možno zvětšiti rychlost nabitého tělesa, jež se pohybuje dielektrikem, na hodnotu větší, než je rychlost světla.“

c) V případě elektronu, jenž má hmotu jen elektromagnetickou, je poměr hmoty elektronu v pohybu  $m$  ke hmotě jeho v klidu  $m_0$  roven (pro nepřilíš veliké rychlosti)

$$\frac{m}{m_0} = \left( \frac{2}{3} \frac{e^2}{a} + \frac{4}{15} \frac{e^2}{a} \beta^2 \right) : \left( \frac{2}{3} \frac{e^2}{a} \right) = 1 + \frac{2}{5} \beta^2 + \dots,$$

kdežto teorie relativnosti dává

$$(1 - \beta^2)^{-1} = 1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \dots$$

Teorie kvantových vztahů, kterou jsem dříve uvedl podle Thomsonovy knížky o elektronu,<sup>16)</sup> je podrobněji vypracována spolu s jinými problémy v řadě jeho prací, jež vyšly v letech 1928—1930 v Philosophical Magazine. Uvádím z nich ještě jeden překvapující výsledek: elektrické částice (subelektrony v elektronu) mohou vibrovati tak, že v jejich okolí se mění elektrická síla během času periodicky, kdežto magnetická síla je při tom trvale rovna nule. Že to je možno, seznáme, dosadíme do nahoře napsaných Maxwellových rovnic ( $f$  je funkce souřadnic  $x, y, z$ )

$$X = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos pt, \quad Y = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos pt, \quad Z = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \cos pt, \quad \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

$$x_r = - \sqrt{\frac{1}{p}} \frac{\varepsilon}{\mu} X, \quad y_r = - \sqrt{\frac{1}{p}} \frac{\varepsilon}{\mu} Y, \quad z_r = - \sqrt{\frac{1}{p}} \frac{\varepsilon}{\mu} Z.$$

Elektron jakožto soustava subelektronů byl by tedy schopen ryze elektrických kmitů, při kterých magnetická síla se vůbec nemění. Zůstává tu však matematická obtíž: V součtu, jenž se vyskytuje v první Maxwellově rovnici, nedávají všechny částice stejné hodnoty pro  $dx_r/dt$ ; je možno nahraditi všechny tyto hodnoty jakousi střední hodnotou, která se vyjme před znamení součtu?

J. J. Thomson a jeho syn byli oprávněni napsati, že vlnová mechanika de Broglieova je ryze matematická a že úvahy J. J. Thomsona vedou od určitých fyzikálních předpokladů k stejným výsledkům; je to vlastně zvláštní teorie disperse. Potvrzuje se zde názor, že ve staré teorii Maxwellově a v teorii elektronů, která se k ní připojuje, je mnoho problémů zajímavých se stanoviska nejnovějších výzkumů a že k výkladu některých zjevů může se užiti oněch starých teorií právě tak jako vlnové mechaniky.

### Quatre conférences sur différents problèmes de la physique mathématique.

(Résumé.)

#### I. Nouveaux principes de la mécanique statistique.

Pour suivre l'évolution d'un système physique il faut tenir compte, suivant E. Borel, de ce que des perturbation très petites, dues aux influences extérieures, se produisent à chaque moment et que leurs effets s'accumulent au cours du temps.

La distance de deux molécules d'un gaz, même très petite à l'instant initial, devient grande plus tard; il est impossible de définir (en employant la définition classique de Clausius) l'entropie d'un système non homogène comme la somme d'entropies de ses parties. Les difficultés que l'on rencontre en introduisant l'hypothèse ergodique peuvent être évitées par l'emploi convenable des chaînes de Markoff et des équations fonctionnelles introduites dans le Calcul des probabilités par Smoluchowski, Chapman et Kolmogoroff.

#### II. Théorie du mouvement Brownien.

La théorie peut être basée soit sur les équations aux dérivées partielles soit sur les équations fonctionnelles, comme l'a montré Smoluchowski. L'avantage de l'emploi de l'équation fonctionnelle de Smoluchowski consiste à ce qu'on obtient des résultats généraux en partant de la théorie des chaînes de Markoff. Il suffit de remplacer, dans les formules algébriques dues à Markoff, certaines sommes par des intégrales pour obtenir des formules relatives au mouvement Brownien. La première formule fondamentale (principe ergodique) montre que la densité de probabilité pour le passage du point mobile d'une position à une autre ne dépend que de la position finale, si la durée du passage est infiniment longue. La seconde formule fondamentale donne la dispersion.



### III. Loi de Planck sur le rayonnement.

Toutes les démonstrations de la formule de Planck sont basées sur des considérations statistiques, sur certaines hypothèses relatives à la distribution des quanta. Étant donnée que la formule de Planck a été vérifiée par des mesures directes et qu'elle a été employée dans beaucoup de recherches théoriques avec succès, il y a lieu de se demander si ces succès peuvent être regardés comme une démonstration indirecte des principes qui ont servi à l'établissement théorique de la formule.

Il faut admettre que les quanta relatifs à une fréquence peuvent se transformer à des quanta relatifs à des autres fréquences. Étant donné, dans une enceinte isolée, un état initial du rayonnement non conforme à la formule de Planck on peut concevoir que le système évolue spontanément vers un état où la formule est valable; la formule apparaît ainsi comme une loi asymptotique. Quel sens faut-il attribuer à la proportionnalité entre l'énergie et entre la fréquence? D'après certaines analogies acoustiques on peut penser qu'un quantum d'énergie rayonnante d'une fréquence déterminée correspond à l'énergie émise pendant une période.

### IV. Les électrons et la propagation de la lumière.

L'étude des vibrations (acoustiques, infiniment petites, ou électromagnétiques) dans un domaine situé à distance finie donne des résultats profondément différents de ceux qui se présentent dans le cas d'un domaine s'étendant à l'infini. Dans ce dernier cas, les vibrations propres d'une fréquence quelconque satisfont à l'équation aux dérivées partielles (1). Mais pour obtenir le spectre discontinu de celles qui sont intéressantes au point de vue physique, il faut introduire certaines conditions supplémentaires (Sommerfeld, 1912); comme on le fait dans la mécanique ondulatoire. Pour interpréter correctement les formules de la mécanique ondulatoire il faut distinguer celles qui se rapportent à une onde dont le front se déplace réellement de celles qui conviennent à un état oscillatoire établi dans tout l'espace. Rapprochement des ondes électroniques aux ondes électromagnétiques sinusoïdales dans un câble; dans le premier cas la vitesse de groupe est plus petite que la vitesse de propagation, dans le second cas l'inverse a lieu. Exposé de la théorie donnée par J. J. Thomson des ondes électroniques et des relations quantiques; résumé d'autres recherches de J. J. Thomson sur les électrons.