František Josef Studnička
Příspěvek k nauce o zlomcích řetězových neb řetězcích

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 3 (1874), No. 2, 61--70

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121180`

Po Keplerovi dlužno jmenovati *Benj. Ursina*, [1]) jenž dle návodu Nepperova r. 1624 obšírné tabulky od 10 k 10 sekundám vypočítal, *Adr. Vlacq-a*,[2]) který r. 1628 mezeru od 20.000 do 90.000 v deskách Briggsových vyplnil, *Jindř. Gellibranda*, *Nath. Roe-ho*, *Edm. Winganta*, *Pet. Krüger-a* a j., kteří všichni jeden vytknuli si účel: povýšiti logaritmy na nejvyšší stupeň dokonalosti. Snaze této vyhověno důkladnými jejich pracemi, zvláště však objevením vyšších řad, které vyhledávání logaritmů velice usnadnily.

Příspěvek k nauce o zlomcích řetězových neb řetězcích.

(Podává dr. *F. J. Studnička*.)

Předložen-li řetězový zlomek neb řetězec

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \cdots}}} \tag{1}$$

a značí-li Z_k jeho k tou hodnotu přibližnou, tedy

$$Z_k = \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \cdots + \frac{a_k}{b_k}}}} = \frac{P_k}{Q_k}, \tag{2}$$

bude patrně, zavedeme-li co pomocnou neb nulltou hodnotu přibližnou

$$Z_0 = \frac{P_0}{Q_0} = \frac{0}{1},$$

$$Z_1 = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{a_1}{b_1},$$

---

[1]) *Benjamin Ursinus* nar. r. 1587 ve Sprotavě v pruském Slezsku, učitel na jednom gymnasii berlínském, zemř. r. 1633. —

[2]) *Adrian Vlacq* byl knihkupec a mathematik holandský. —

$$Z_2 = \frac{P_2}{Q_2} = \frac{b_2 P_1 + a_2 P_0}{b_2 Q_1 + a_2 Q_0},$$
$$Z_3 = \frac{P_3}{Q_3} = \frac{b_3 P_2 + a_3 P_1}{b_3 Q_2 + a_3 Q_1},$$

a podlé toho všeobecně

$$Z_n = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}}{b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}} \qquad (3)$$

o čemž se i přesvědčíme tak zvanou zkouškou z n na $n+1$; s jedné strany obdržíme totiž, píšeme-li ve vzorci (3) $n+1$ místo n,

$$Z_{n+1} = \frac{b_{n+1} P_n + a_{n+1} P_{n-1}}{b_{n+1} Q_n + a_{n+1} Q_{n-1}},$$

s druhé strany pak, zavedeme-li do téhož vzorce (3)

$$b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \text{ místo } b_n,$$

$$Z_{n+1} = \frac{b_{n+1}[b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}] + a_{n+1} P_{n-1}}{b_{n+1}[b_n Q_{n-1} + a_n P_{n-2}] + a_{n+1} Q_{n-1}},$$

aneb použijeme-li vzorce (3) a dosadíme-li místo výrazů v závorkách obsažených příslušné hodnoty P_n a Q_n, totéž co prvé, čímž všeobecná platnost vzorce (3) jest odůvodněna.

Zároveň se pak z téhož vzorce obdrží pro čitatele i jmenovatele n-té hodnoty přibližné vzorec

$$P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}, \qquad (4)$$
$$Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}, \qquad (5)$$

z čehož plyne známá poučka, podle níž se určí P_n a Q_n, známe-li hodnoty předcházejících dvou čitatelů a jmenovatelů.

Abychom však tyto hodnoty neodvisle od předešlých ustanovili, použijme soustavy rovnic ze vzorce (4) a (5) odvozených a vylučme střední čitatele a jmenovatele. Obdržíme tu ze vzorce (4) pro $n = 2, 3, \ldots n$

$$\begin{array}{l}
a_1 b_2 - P_2 + 0 + 0 + \ldots + 0 \quad + 0 \quad = 0 \\
a_1 a_3 + b_3 P_2 - P_3 + 0 + \ldots + 0 \quad + 0 \quad = 0 \\
0 + a_4 P_2 + b_4 P_3 - P_4 + \ldots + 0 \quad + 0 \quad = 0 \\
\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\
\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\
\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\
0 + 0 + 0 + 0 + \ldots + b_{n-1} P_{n-2} - P_{n-1} = 0 \\
-P_n + 0 + 0 + 0 + \ldots + a_n P_{n-2} + b_n P_{n-1} = 0;
\end{array}$$

vyloučíme-li pak z této soustavy $(n-1)$ rovnici obsahující $(n-2)$ neznámé $P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}$, obdržíme známým způsobem

$$\begin{vmatrix} a_1 b_2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_1 a_3 & b_3 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & b_4 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{n-1} & -1 \\ -P_n & 0 & 0 & \ldots & a_n & b_n \end{vmatrix} = 0$$

aneb rozložíme-li determinant tento ve dva, považujíce prvky prvního sloupce za složené ze dvou částí, z nichž jedna jest 0, a vyloučíme-li pak a_1 co společný faktor,

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & b_4 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n & b_n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & b_4 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{n-1} & -1 \\ P_n & 0 & 0 & \ldots & a_n & b_n \end{vmatrix} = 0.$$

V posledním determinantu jest však sloupec první vyplněn nullami až na poslední prvek, hodnota jeho rovná se tedy tomuto prvku, násobenému s příslušným subdeterminantem, jenž maje na pravé straně příčky samé 0 rovná se součinu příčkových prvků neb $(-1)^{n-2}$; jest tedy hodnota posledního determinantu

$$(-1)^n P_n \,.\, (-1)^{n-2} = + P_n,$$

a řešíme-li tudíž poslední rovnici podlé P_n, bude

$$P_n = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & b_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & a_n & b_n \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Podobně obdržíme ze vzorce (5) pro $n = 1, 2, 3, \ldots, n$ napřed soustavu n rovnic

$$\begin{array}{llllllll}
b_1 - Q_1 & +0 & +0 & + \ldots & +0 & & +0 & =0 \\
a_2 + b_2 Q_1 - Q_2 & +0 & + & \ldots & +0 & & +0 & =0 \\
0 + a_3 Q_1 & + b_3 Q_2 - Q_3 & + & \ldots & +0 & & +0 & =0 \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
0 + 0 & +0 & +0 & + \ldots & + b_{n-1} Q_{n-2} - Q_{n-1} & & & =0 \\
-Q_n + 0 & +0 & +0 & + \ldots & + a_n \; Q_{n-2} + b_n Q_{n-1} & & & =0
\end{array}$$

a vyloučením $(n-1)$ veličiny $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$ z této soustavy

$$\begin{vmatrix}
b_1 & -1 & 0 \ldots 0 & 0 \\
a_2 & b_2 & -1 \ldots 0 & 0 \\
0 & a_3 & b_3 \ldots 0 & 0 \\
\cdot & & & \cdot \\
\cdot & & & \cdot \\
\cdot & & & \cdot \\
0 & 0 & 0 \ldots b_{n-1} & -1 \\
-Q_n & 0 & 0 \ldots a_n & b_n
\end{vmatrix} = 0,$$

a podobným obratem, jako prvé, konečně

$$Q_n = \begin{vmatrix}
b_1 & -1 & 0 \ldots 0 & 0 \\
a_2 & b_2 & -1 \ldots 0 & 0 \\
0 & a_3 & b_3 \ldots 0 & 0 \\
\cdot & & & \cdot \\
\cdot & & & \cdot \\
\cdot & & & \cdot \\
0 & 0 & 0 \ldots b_{n-1} & -1 \\
0 & 0 & 0 \ldots a_n & b_n
\end{vmatrix} \qquad (7)$$

Pomocí vzorce (6) a (7) možná tedy n-tou přibližnou hodnotu řetězce (1) vyjádřiti co podíl dvou determinantů.

Abychom pak poznali, jak se má P_n k Q_n, rozložme determinant (7) podlé prvků prvního sloupce; obdržíme tu podlé známého pravidla

$$Q_n = b_1 \begin{vmatrix} b_2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & \dots & a_n & b_n \end{vmatrix} + (-1)^{n-1} a_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_n & b_n \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

aneb označíme-li subdeterminant stupně prvního patřící k prvku b_1 krátce B_1 a subdeterminant stupně druhého patřící k prvku prvního sloupce -1 krátce B_{12}, jelikož jest doplňkem determinantu s příčkovými prvky $b_1\ b_2$,

$$Q_n = b_1 B_1 + (-1)^{n-1} a_2 (-1)^{n-3} B_{12},$$

z čehož jde

$$Q_n = b_1 B_1 + a_2 B_{12},$$

kdežto porovnáním se vzorcem (6) se obdrží

$$P_n = a_1 B_1 .$$

Podle toho jest tedy též

$$Z_n = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{a_1 B_1}{b_1 B_1 + a_2 B_{12}} \tag{8}$$

Rozložíme-li podobným spůsobem jako Q_n též

$$B_1 = \frac{P_n}{a_1},$$

obdržíme snadno dále

$$B_1 = b_2 B_{12} + a_3 B_{123},$$

kde význam subdeterminantu stupně třetího B_{123} jest podlé předešlého patrný, a dosadíme-li tuto hodnotu do vzorce (8),

$$Z_n = \frac{a_1 b_2 B_{12} + a_1 a_3 B_{123}}{(b_1 b_2 + a_2) B_{12} + b_1 a_3 B_{123}} . \tag{9}$$

Stejným spůsobem bude patrně dále

$$B_{12} = b_3 B_{123} + a_4 B_{1234}$$

a všeobecně

$$B_{12\dots k} = b_{k+1} B_{12\dots k+1} + a_{k+2} B_{12\dots k+2}$$

a tudíž, dosadíme-li do vzorce (9),

$$Z_n = \frac{(a_1 b_2 b_3 + a_1 a_3) B_{123} + a_1 b_2 a_4 B_{1234}}{(b_1 b_2 b_3 + a_2 b_3 + b_1 a_3) B_{123} + (b_1 b_2 + a_2) B_{1234}} \tag{10}$$

a t. d.

z čehož jde na jevo, jak možná vyčíslení determinantu stupně n-tého nahraditi snadnějším vyčíslením determinantů stupňů nižších.

Jest-li ve zvláštním případě, jakž při obyčejném přeměňování zlomků v řetězce se obdrží,

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1\,,$$

promění se vzorec (7) v jednodušší

$$Q_n = \begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 1 & b_2 & -1 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_3 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots b_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 & b_n \end{vmatrix}, \qquad (11)$$

jehož subdeterminant B_1 vyjadřuje přímo P_n, takže

$$P_n = B_1\,. \qquad (12)$$

V tomto případě jest tedy n-tá přibližná hodnota řetězce vyjádřena poměrem subdeterminantu k prvnímu prvku patřícímu k determinantu (11), kterýž tu jest *protiměrným.* *)

Ze vzorce (8) obdržíme tu pak

$$Z_n = \frac{B_1}{b_1 B_1 + B_{12}}\,, \qquad (13)$$

ze vzorce (9) podobně

$$Z_n = \frac{b_2 B_{12} + B_{123}}{(b_1 b_2 + 1) B_{12} + b_1 B_{123}}\,, \qquad (14)$$

ze vzorce (10) pak

$$Z_n = \frac{(b_2 b_3 + 1) B_{123} + b_2 B_{1234}}{(b_1 b_2 b_3 + b_3 + b_1) B_{123} + (b_1 b_2 + 1) B_{1234}} \qquad (15)$$

a t. d.

Abychom ukázali, jak se tu počítá, dejme tomu, že má se určiti pravá hodnota zlomku

$$Z_5 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}}}}}$$

Použijeme-li vzorce (14), musíme znáti

$$B_{12} = \begin{vmatrix} 3, & -1, & 0 \\ 1, & 4, & -1 \\ 0, & 1, & 5 \end{vmatrix} = 68,$$

*) Viz *Studnička* „O determinantech" pag. 46.

$$B_{123} = \begin{vmatrix} 4, & -1 \\ 1, & 5 \end{vmatrix} = 21,$$

načež obdržíme snadno

$$Z_5 = \frac{2 \, . \, 68 + 21}{3 \, . \, 68 + 21} = \frac{157}{225};$$

použijeme-li vzorce (15), nutno nám znáti B_{123} a $B_{1234} = 5$, načež obdržíme

$$Z_5 = \frac{7 \, . \, 21 + 2 \, . \, 5}{10 \, . \, 21 + 3 \, . \, 5} = \frac{157}{225},$$

jako prvé. V druhém případu jest tedy počítání snadnější, poněvadž tu jest vyčíslení potřebných determinantů jednodušší.

Jest-li však řetězec mnohočlenný, jest-li tedy n velké, nevedl by tento spůsob rychle k cíli, jelikož bychom pokračujíce spůsobem, jakým jsme si zjednali vzorce (13), (14) a (15), přišli k velmi složitým výrazům pro ten případ, že bychom chtěli dojíti k jednoduchému subdeterminantu $B_{12 \ldots k}$.

V tomto případě bylo by prospěšnější vyjádřiti determinant (11) pomocí determinantů s práznou příčkou, čímž bychom obdrželi *) všeobecně, zavedeme-li označení

$$Q_n = \Delta_n$$

a jmenujeme-li tentýž determinant s příčkou prázdnou Δ_n^0,

$$\Delta_n = \Delta_n^0 + \Sigma K_1 \Delta_{n-1}^0 + \Sigma K_2 \Delta_{n-2}^0 + \ldots$$
$$+ \Sigma K_{n-2} \Delta_2^0 + K_n,$$

kdež značí K_m kombinaci m prvků příčkových a Δ_m^0 příslušný ku K_m subdeterminant s příčkou prázdnou; poněvadž pak determinant Δ_m^0 jest též protiměrný a protiměrný determinant stupně lichého s příčkou prázdnou má hodnotu 0 **), promění se poslední vzorec v

$$Q_n = \Delta_n = K_n + \Sigma K_{n-2} \Delta_2{}^0 + \Sigma K_{n-4} \Delta_4{}^0 + \ldots$$
$$+ \begin{cases} \Sigma K_2 \Delta_{n-2}^0 + \Delta_n^0 \text{ pro } n \textit{ sudé} \\ \Sigma K_1 \Delta_{n-1}^0 \quad \text{,, } n \textit{ liché}; \end{cases}$$

a poněvadž v tomto zvláštním případě hodnoty determinantů s prázdnou příčkou jsou vesměs buď 0 neb 1 podle toho, k jaké kombinaci patří, promění se součet

$$\Sigma K_{n-k} \Delta_k^0 \text{ v } \Sigma K'_{n-k},$$

*) ibid. pag. 27. **) ibid. pag. 47.

kdež čárkou naznačeno, že jen takové kombinace se mají vzíti, k nimž přísluší subdeterminant hodnoty 1, načež bude

$$Q_n = \Delta_n = K_n + \Sigma K'_{n-2} + \Sigma K'_{n-4} + \dots$$
$$+ \begin{cases} \Sigma K'_2 + 1 & \text{pro } n \textit{ sudé} \\ \Sigma K'_1 & \text{,, } n \textit{ liché}. \end{cases} \tag{16}$$

Jak se má všeobecně ustanoviti

$$\Sigma K'_{n-2k},$$

nelze tak snadno jednoduchým pravidlem vyjádřiti, poněvadž pro větší n a k jest zákon velmi složit; jen pro $k = 1$ obdrží se jednoduchý vzorec

$$\Sigma K'_{n-2} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}{b_k b_{k+1}} \tag{17}$$

a pro $k = 2$ o něco složitější

$$\Sigma K'_{n-4} = \sum_{i=3}^{n-1} \frac{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}{b_1 b_2 b_i b_{i+1}}$$
$$+ \sum_{i=4}^{n-1} \frac{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}{b_2 b_3 b_i b_{i+1}}$$
$$+ \sum_{i=5}^{n-1} \frac{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}{b_3 b_4 b_i b_{i+1}}$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$+ \sum_{i=n-1}^{n-1} \frac{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}{b_{n-3} b_{n-2} b_i b_{i+1}}$$

aneb zavedeme-li stručnější označení,

$$\Sigma K'_{n-4} = \sum_{k=1}^{n-3} \left\{ \sum_{i=3}^{n-1} \frac{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}{b_k b_{k+1} b_i b_{i+1}} \right\}, \tag{18}$$

kdež význam symbolický podle předešlého nutno si vyložiti.

Jak by se tu dále mělo pokračovati, pozná se ze dvou posledních vzorců (17) a (18) dosti jasně; bylo by tu na př.

$$\Sigma K'_{n-6} = \sum_{k=1}^{n-5} \left[\sum_{i=3}^{n-3} \left\{ \sum_{j=5}^{n-1} \frac{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}{b_k b_{k+1} b_i b_{i+1} b_j b_{j+1}} \right\} \right] \tag{19}$$

a t. d.

Nejjednodušší vzorec obdrží se pro stejné jmenovatele, jest-li tedy

$$b_1 = b_2 = \dots = b_n = b;$$

jestiť tu všeobecně

$$\Sigma K'_{n-2k} = \binom{n-k}{k} b^{n-2k},$$

čímž se vzorec (16) promění v

$$\Delta_n = Q_n = b^n + \binom{n-1}{1} b^{n-2} + \binom{n-2}{2} b^{n-4} + \dots$$
$$+ \begin{cases} \binom{\frac{n+2}{2}}{2} b^2 + 1 & \text{pro } n \text{ sudé} \\ \binom{\frac{n+1}{2}}{1} b & ,, \ n \text{ liché} \end{cases} \tag{20}$$

a poněvadž tu, jak ze vzorce (12) patrno,

$$P_n = B_1 = b^{n-1} + \binom{n-2}{1} b^{n-3} + \binom{n-3}{2} b^{n-5} + \dots$$
$$+ \begin{cases} \binom{\frac{n}{2}}{1} b & \text{pro } n \text{ sudé} \\ \binom{\frac{n+1}{2}}{2} b^2 + 1 & ,, \ n \text{ liché}, \end{cases} \tag{21}$$

možná podlé toho snadno sestaviti vzorec

$$Z_n = \frac{b^{n-1} + \binom{n-2}{1} b^{n-3} + \binom{n-3}{2} b^{n-5} + \dots}{b^n + \binom{n-1}{1} b^{n-2} + \binom{n-2}{2} b^{n-4} + \dots}, \tag{22}$$

z něhož jde na jevo, že *n*tá přibližná hodnota řetězce neb řetězového zlomku

$$Z\frac{1}{b} = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \dots}}}$$

jest ryze lomenou racionální algebraickou funkcí jmenovatele *b*.

Poněvadž čitatel a jmenovatel každé takové přibližné hodnoty představuje relativní prvočísla, možná podle vzorce (22) i takováto prvočísla ustanovovati; nejjednodušší budou arci pro $b = 1$, totiž

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{1 + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \binom{n-4}{3} + \dots}{1 + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{u-3}{3} + \dots} \tag{23}$$

Pro $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$ obdržíme na př.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \ldots$$

Clausen, kterýž poslední úlohu řešil spůsobem zcela jiným,*) obdržel vzorec pro n-tou přibližnou hodnotu řetězce

$$Z_n = \frac{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^4}{4} + 1}\right)^n - \left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + 1}\right)^n}{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + 1}\right)^{n+1} - \left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + 1}\right)^{n+1}},$$

z čehož *Strehlke* později **) vyvinul podobný vzorec pro řetězec

$$Z_{-\frac{1}{b}} = \cfrac{1}{b - \cfrac{1}{b - \cfrac{1}{b - \cdots}}}$$

a sice

$$Z_n = \frac{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - 1}\right)^n - \left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - 1}\right)^n}{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - 1}\right)^{n+1} - \left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - 1}\right)^{n+1}},$$

kterýž se promění v tvar velmi jednoduchý, položíme-li pro obmezené b

$$b = 2 \cos \varrho$$

a použijeme-li pak poučky Moivre-ovy; povstaneť tu z posledního vzorce

$$Z_n = \frac{\sin n\varrho}{\sin (n+1)\varrho} = \frac{1}{\cos \varrho + \cot n\varrho \, \sin \varrho}.$$

Jak z tohoto stručného pojednání jde na jevo, možná i v nauce o řetězcích s prospěchem použíti determinantů, čímž tyto dva zvláštní tvary algebraické v úzké spojení se uvádějí; zároveň tu patrno, jak tvar algebraický co báječný Proteus stále se mění, až konečně vyjadřuje hledaný výsledek. A v této plastičnosti algebraických tvarů, možná-li tak vlastnost tuto nazvati, zakládá se největší část úspěchů mathematických vůbec, algebraických pak zvlášť!

---

*) Viz *Crellés J.*, Bd. III. pag. 88.

**) Viz *Grunert's Arch.* Bd. 42. pag. 343.