Karel Zahradník

O symbolech analytické geometrie a jejich upotřebení. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 3 (1874), No. 2, 91--96

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121179

Následující tabulka udává délky druhého metru skleněného pro rozličné stupně tepla:

t^0 C	délka v millimetrech
— 2°	999 98060
± 0°	999·99764
5	1000·04024
10	1000 08284
15	1000·12544
20	1000·16804
25	1000 21064
30	1000·25344

Rozdíl délky při — 2° a 30° obnáší tedy 0·27284 millimetrů.

Kopii tuto druhou nabídnul *Steinheil* vládě rakouské ku koupi, když se zde jednalo o zavedení míry metrové. Vláda v dorozumění s císařskou akademií nabídnutí to přijala, tak že kopie tato tvořiti bude základ měr rakouských.

O symbolech analytické geometrie a jejich upotřebení.

(Píše *K. Zahradník.*)

Přímka a bod jsou nejjednodušší útvary geometrické v rovině; pojímáme-li tedy jednou bod, jindy přímku za prvek *křivky*, jeví se nám býti v případě prvním místem bodů, v druhém pak obálkou přímek. Dvě veličiny, určující jednoznačně polohu takového útvaru jednoduchého, nazýváme jeho *souřadnicemi.*

Rovnice libovolné přímky U jest

$$ux + vy + 1 = 0; \qquad (1)$$

neb každá rovnice přímky, jak jsme již dříve ukázali, může na tento tvar se převésti. Poloha této přímky závisí na veličinách

u, v, jež lineárně vcházejí do rovnice této. Veličiny u, v znač přímky a sice negativné převratné (reciprok) hodnoty úseků přímky U na osách souřadnic, pročež je též nazýváme souřadnicemi přímky neb *přímkovými souřadnicemi*, podobně jako x, y, stanovující nám polohu bodu, *souřadnicemi bodovými* býti pravíme.

Mají-li u, v určité hodnoty, představuje nám rovnice (1) určitou přímku, geometrické to místo všech bodů (xy), jichž souřadnice rovnici (1) vyhovují. V případě tomto můžeme si tedy přímku U představiti, jako by vytvořena byla pohybem proměnného bodu m (x, y). Jsou-li naopak x, y stálé souřadnice pevného bodu m a u, v proměnné, tu značí nám (1) rovnici všech přímek, jejichž souřadnice (u, v) oné rovnici vyhovují. Všechny tyto přímky procházejí pevným bodem (x, y), a za tou příčinou pravíme, že v tomto případě (1) jest rovnicí bodu m (x, y).

2. Obraťme se nyní k vyšetření obecné rovnice stupně prvého mezi souřadnicemi přímkovými

$$au + bv + c = 0, \qquad (2)$$

aneb což totéž, řešme otázku, jakou vlastnost mají veškeré přímky (1), jichž souřadnice (u, v) vyhovují dané lineárné rovnici (2).

Odečteme-li od rovnice (1), znásobené veličinou c, rovnici druhou, obdržíme

$$u\,(cx - a) + v\,(cy - b) = 0\,.$$

Rovnice tato značí nám libovolnou přímku, jejíž souřadnice vyhovují rovnici (2); zároveň pak z ní patrno, že všechny tyto přímky procházejí pevným bodem, jehož souřadnice jsou

$$x = \frac{a}{c}\,,\quad y = \frac{b}{c} \qquad (4)$$

Co zvláštní případy máme

$$au + c = 0\,,\quad bv + c = 0\,.$$

Rovnice prvá jest rovnicí bodu na ose x, druhá pak rovnicí bodu na ose y. Rovnice bodu m jest tedy lineární rovnicí mezi souřadnicemi přímkovými u, v. Souřadnice všech přímek U, procházejících tímto bodem, musí oné lineárné rovnici vyhověti a naopak, vyhovují-li souřadnice přímky U lineárné rovnici, prochází přímka tato pevným bodem.

Jest tedy (2) rovnice bodu, jehož souřadnice nám podává rovnice (4).

Poznámka tato dává nám na ruku, kterak bychom utvořili rovnici bodu, známe-li souřadnice tohoto bodu: neb dělíme-li rovnici (2) stálým členem v ní obsaženým, budou koefficienty v rovnici při u a v stojící souřadnicemi bodu a naopak, jsou-li dány souřadnice bodu, násobme úsečku veličinou u, pořadnu veličinou v a položme součet těchto součinů zvětšený o jedničku rovna nulle.

Jako při rovnici přímky rozeznáváme i zde tři tvary a sice

$$U \equiv xu + yv + 1 = 0,$$
$$A \equiv au + bv + c = 0,$$
$$P \equiv u \sin(\Theta - \alpha) + v \sin \alpha - p = 0.$$

Rovnice tyto platí všeobecně pro koso-úhlou soustavu souřadnic; je-li však soustava pravoúhelná, tedy $\Theta = 90^0$, nemění se sice prvé dva tvary rovnice, třetí však přejde v jednodušší rovnici

$$u \cos \alpha + v \sin \alpha - p = 0.$$

Poněvadž z předcházejícího možná poznati, jak se první dva tvary rovnic dají určiti, budiž zde toliko rovnice třetí odvozena.

Osy souřadnic x, y nechť spolu uzavírají úhel Θ, vedeme-li pak daným bodem M rovnoběžku k ose y, protne osu x v bodě P, načež bude

$$OP = x, \; PM = y, \; OM = \varrho.$$

Z trojúhelníku OPM plyne pak

$$x = \varrho \frac{\sin(\Theta - \alpha)}{\sin \Theta}, \; y = \varrho \frac{\sin \alpha}{\sin \Theta}.$$

z čehož jde rovnice bodu (x, y)

$$u\varrho \frac{\sin(\Theta - \alpha)}{\sin \Theta} + v\varrho \frac{\sin \alpha}{\sin \Theta} + 1 = 0.$$

Zavedeme-li místo $\dfrac{\sin \Theta}{\varrho} = -p$, oddržíme konečně svrchu uvedený tvar

$$u \sin(\Theta - \alpha) + v \sin \alpha - p = 0$$

Jakožto zvláštní případy plynou z rovnice $A = 0$

α) $c = 1$, rovnice počátku souřadnic;

β) $au + bv = 0$, rovnice bodu nekonečně vzdáleného.

K označení více bodů upotřebíme, jako při přímce jsme to učinili, přípon či ukazovatelů neb indexů; bude tedy všeobecně rovnice přímky U_k

$$U_k \equiv x_k u + y_k v + 1 = 0.$$

3. *Vzdálenost bodu od přímky.* Buďtež u, v souřadnice dané přímky P a rovnice bodu $m(x_1, y_1)$ budiž tvaru

$$ux_1 + vy_1 + 1 = 0,$$

jejž hlavním tvarem jmenovati chceme, a stanovmež si vzdálenost bodu m od přímky P. Rovnice dané přímky ve tvaru normálním zní

$$\frac{ux + vy + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 0$$

a tudíž vzdálenost bodu m od této přímky bude

$$d = \frac{ux_1 + vy_1 + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{U'}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

čímž současně i pravidlo tvoření vysvítá; U' značí totiž výsledek dosazení hodnot x_1, y_1 za x, y do rovnice

$$U \equiv ux + vy + 1 = 0.$$

4. Dva body stanoví přímku; jsou-li tedy dané rovnice dvou bodů

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0,$$

známe též přímku vedenou těmito dvěma body, třeba pouze souřadnice této přímky u, v za stejné pokládati, za souřadnice přímky společné a řešením je stanoviti. Souřadnice přímky spojující nevyhovují pouze rovnicím

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0,$$

nýbrž každému bodu vyjádřenému rovnicí

$$U_1 - \lambda \, U_2 = 0, \qquad (2)$$

kde λ značí libovolný koefficient. Značí nám tedy rovnice (5) *řadu bodovou*, jejíž nosičem jest spojující přímka $\overline{U_1 U_2}$. Řadu tuto můžeme si představiti vytvořenu pohybem bodu; každé určité hodnotě λ_1 přísluší určitý bod této řady, jehož souřadnice rovnoběžné obdržíme, píšeme-li rovnici (5) ve tvaru rozvinutém tedy $(ux_1 + vy_1 + 1) - \lambda\,(ux_2 + vy_2 + 1) = 0$

neb $u\,(x_1 - \lambda x_2) + v\,(y_1 - \lambda y_2) + (1 - \lambda) = 0$;

Dělíme-li stálým členem $(1-\lambda)$, obdržíme

$$u\,\frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} + v\,\frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} + 1 = 0,$$

rovnici to bodu v souřadnicích přímkových, jehož souřadnice bodové jsou

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_1}{1 - \lambda} \tag{6}$$

Mění-li se λ, mění příslušný bod polohu svou na přímce spojující body základné a proměnou λ od $\lambda = -\infty$ do $\lambda = +\infty$ proběhne příslušný bod celou řadu bodovou. Za tou příčinou nazýváme veličinu λ *parametrem* neb též *poměrem bodu*, kterýžto poslední význam ihned geometricky objasníme.

I shledáme zde obdobné vyšetřování jako jsme byli provedli při souřadnicích bodových.*) Libovolné dva body této řady (5) ustanovují nám přímku $\overline{U_1 U_2}$. Tuto neurčitost vymítíme, považujeme-li $\overline{U_1 U_2}$ za spojnici všech na ní ležících bodů. S názorem tímto spojena jest ta výhoda, že můžeme přímku vyjádřiti rovnicí jedinou v souřadnicích přímkových a sice

$$U_1 - \lambda\, U_2 = 0.$$

5. Určitý bod přímky $\overline{U_1 U_2}$ příslušný parametru λ vyjádřen jest rovnicí

$$U_1 - \lambda\, U_2 = 0 \equiv V;$$

vyšetřmež nyní geometrický význam parametru λ. Souřadnice rovnoběžné dle předcházejícího článku jsou

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}.$$

Řešíme-li rovnice tyto dle λ obdržíme

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2} = \frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}}{\sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}} \tag{7}$$

Značí-li $U_k = 0$ rovnici bodu a_k a podobně $U_1 - \lambda_k U_2 = 0$ rovnici bodu b_k řady $\overline{U_1 U_2}$ neb $\overline{a_1 a_2}$, můžeme rovnici (7) psáti

$$\lambda = \frac{a_1\, b}{a_2\, b}. \tag{8}$$

Jest tedy λ poměr, dle kterého nám dělí bod b vzdálenost bodu $a_1\, a_2$.

K témuž výsledku přijdeme cestou, jíž jsme při souřadnicích bodových kráčeli. Nezdá se mi býti zbytečno i tuto stručně vypsati, aby názor o souřadnicích přímkových co možná byl jasný.

---

*) Časop. česk. mathem. díl II. pg. 172, 266.

Buďtež

$$U_1 = 0, \; U_2 = 0$$

rovnice dvou bodů a přímka P daná souřadnicemi svými přímkovými u, v. Vzdálenosti bodů U_1 a U_2 od přímky P jsou dle článku 3.

$$\frac{U_1'}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \; \frac{U_2'}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Značí nám tedy $U_1 - \lambda \, U_2 = 0$ rovnici bodu, jímž všechny přímky probíhají, jejichž poměr vzdálenosti od obou daných bodů rovná se λ; bod tento leží na přímce $\overline{U_1 U_2}$ a poměr vzdálenosti jeho od obou pevných bodů rovná se poměru vzdálenosti těchto bodů od libovolné přímky bodem tím probíhající, rovná se λ.*) Jest tedy

$$\frac{a_1 b}{a_2 b} = \lambda = \frac{U_1'}{U_2'}$$

Rovnice bodu půlícího vzdálenost bodů a_1, a_2, jejichž rovnice $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, zní tedy

$$U_1 + U_2 = 0$$

a rovnice bodu úběžného přímky $\overline{a_1 \, a_2}$

$$U_1 - U_2 = 0.$$

(Pokračování.)

*) Druhý tento spůsob podal Hesse ve svých „Vorlesungen" pag. 51.