Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vincenc Jarolímek

K theorii imaginárných kružnic a koulí

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 48 (1919), No. 1-2, 10--16

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121132

K theorii imaginárných kružnic a koulí.

Podal Dr. Vinc. Jarolímek.

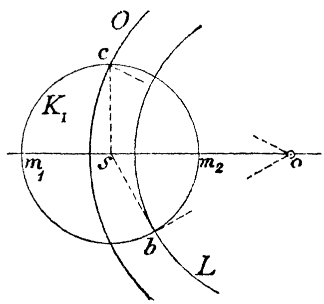
1. Mocnost čili potence bodu o vzhledem k dané reálné kružnici K_I, jejíž střed jest s a poloměr r (obr. 1.), jest

$$p^2 = \overline{om_1} \,.\, \overline{om_2}, \tag{1}$$

kdež m_1, m_2 jsou průsečíky kružnice s přímkou $\overline{os}$.
Je-li vzdálenost $\overline{os} = a$, bude

$$p^2 = (a + r)(a - r) = a^2 - r^2 = \overline{ob}^2, \tag{2}$$

kdež $\overline{ob}$ je tečna bodem o ke kružnici K_I vedená.



Obr. 1.

Kružnice L opsaná poloměrem $\overline{ob}$ seče kružnici K_I v úhlu pravém obs, je k ní orthogonálná.

Buď dána *kružnice imaginárná* K^i druhu prvého (G. P. III. 54. [1]), reálným středem s a poloměrem ir (kdež $i = \sqrt{-1}$); reálnou kružnici K_I (obr. 1.) o středu s a poloměru r jmenujeme ideálným obrazem kružnice K^i Potence reálného bodu o, jehož $\overline{os} = a$, vzhledem k imaginárné kružnici K^i bude podle rovnice (2)

$$p^2 = (a + ir)(a - ir) = a^2 + r^2. \tag{3}$$

Učiníme-li tedy $\overline{sc} \perp \overline{os}$ a spojíme-li $\overline{oc}$, bude

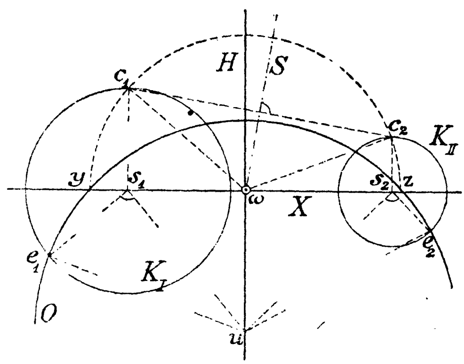
$$p^2 = \overline{oc}^2. \tag{4}$$

---

[1]) Značí autorův spis „Základové geometrie polohy“, svazek III., str. 51.

Z toho jde, že potence reálného bodu vzhledem k imaginárné kružnici je reálná a *vždy kladná*, kdežto v případě kružnice reálné je potence záporná, leží-li bod o vnitř kruhu. Kružnice O opsaná ze středu o poloměrem $\overline{oc} = p$ je orthogonálná neboli potenční ke kružnici imaginárné K^i.

2. *Přímka potenční dvou kružnic imaginárných* K^i_1, K^i_2, jichž středy jsou s_1, s_2, poloměry ir_1, ir_2 (obr. 2.). Opišme ze středů s_1, s_2, jichž vzdálenost $\overline{s_1 s_2} = a$, poloměry r_1, r_2 reálné kružnice K_I, K_{II} spojme $s_1 s_2 \equiv X$, postavme $\overline{s_1 c_1} \perp X$, $\overline{s_2 c_2} \perp X$.



Obr. 2.

Aby bodu ω na přímce X příslušely stejné potence vzhledem k imaginárným kružnicím K^i_1, K^i_2, musí být

$$\overline{\omega c_1} = \overline{\omega c_2}. \tag{5}$$

Sestrojme tedy symmetrálu S úsečky $c_1 c_2$, stanovme průsečík její ω na přímce X a postavme v bodě ω přímku $H \perp X$. Každý bod u na přímce H má stejné potence ke K^i_1, K^i_2; neboť potence prvá, učiníme-li $\overline{s_1 e_1} \perp \overline{us_1}$, jest

$$p_1^2 = \overline{ue}_1^2 = r_1^2 + \overline{us}_1^2 = r_1^2 + \overline{u\omega}^2 + \overline{s_1 \omega}^2 =$$
$$= r_1^2 + \overline{u\omega}^2 + \overline{\omega c}_1^2 - r_1^2 = \overline{u\omega}^2 + \overline{\omega c}_1^2, \tag{6}$$

a obdobně obdržíme pro potenci druhou $(\overline{s_2 e_2} \perp \overline{us_2})$

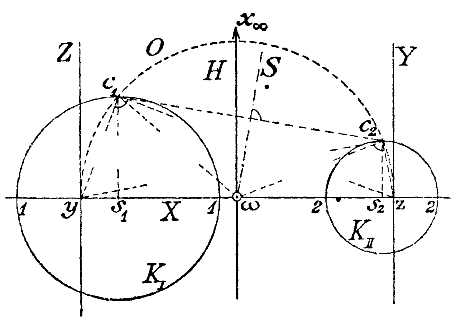
$$p_2^2 = \overline{u\omega}^2 + \overline{\omega c}_2^2. \tag{7}$$

Ježto však podle rovnice (5) $\overline{\omega c_1} = \overline{\omega c_2}$, plyne z rovnic

(6) a (7)

$$p_1^2 = p_2^2,$$

tedy $\overline{ue_1} = \overline{ue_2}$, kdežto pro každý bod ležící mimo H tato rovnice platnosti pozbývá. Je tedy přímka H geometrickým místem bodu, jehož potence k pomyslným kružnicím K_1^i, K_2^i jsou stejné, a proto přímka H slove *potenční přímkou* obou kružnic, která v případě kružnic reálných slove také *chordálou* či *osou kollineační*. Ale i zde je reálná přímka H spojnicí imaginárných průsečíků kružnic K_1^i, K_2^i, neboť potence každého z nich $= o$. Z každého bodu u na přímce H jakožto středu lze opsati polo-



Obr. 3.

měrem $\overline{ue_1} = \overline{ue_2}$ orthogonálnou čili potenční kružnici O k pomyslným kružnicím K_1^i, K_2^i.

Potenční přímka H (osa kollineační) pomyslných kružnic K_1^i, K_2^i je rozdílná od potenční přímky kružnic reálných K_I, K_{II}. Avšak *body podobnosti* (středy kollineační) kružnic imaginárných jsou *totožny* s body podobnosti reálných kružnic K_I, K_{II}. Neboť je-li σ bod podobnosti kružnic K_I, K_{II}, je vzdálenost $\overline{s_1\sigma}$ (při stálé délce $\overline{s_1 s_2} = a$) závislá jedině na *poměru* poloměrů $r_1 : r_2$; avšak poměr poloměrů kružnic K_1^i, K_2^i jest $ir_1 : ir_2 = r_1 : r_2$.

3. *Společný polární trojúhelník kružnic* K_1^i, K_2^i. Přímka $\overline{s_1 s_2} \equiv X$ (obr. 3.) je jednou společnou polárou kružnic, pro pól x_∞ v nekonečnu na přímce $H \perp X$.

Ostatní dva vrcholy polárného trojúhelníka y, z budou tedy na X, tvoříce společnou družinu dvou elliptických involucí, jež kružnice K_1^i, K_2^i indukují na přímce X; prvá je dána středem svým s_1 a souměrnou družinou 11 (potence $= - r_1^2$), druhá středem s_2 a souměrnou družinou 22 (potence $= - r_2^2$). Jsou pak vrcholy y, z na potenční kružnici O ze středu ω a polosměru $\omega c_1 = \omega c_2$. Neboť jest zajisté

$$\overline{s_1 y} \cdot \overline{s_1 z} = - \overline{s_1 c_1} = - r_1^2,$$
$$\overline{s_2 y} \cdot \overline{s_2 z} = - \overline{s_2 c_2^2} = - r_2^2;$$

jsou tedy body y, z sdruženými póly kružnice K_1^i i kružnice K_2^i. Postavíme-li konečně $yZ \perp X$, $zY \perp X$, bude $\triangle XYZ \equiv \triangle xyz$ společný polárný trojúhelník imaginárných kružnic K_1^i, K_2^i.

Podle rovnice (6) jest

$$\overline{ue_1^2} = \overline{u\omega}^2 + \overline{\omega c_1^2}$$

(obr. 2.), ježto však

$$\overline{\omega y} = \overline{\omega c_1},$$

jest také $\quad \overline{ue_1^2} = \overline{u\omega}^2 + \overline{\omega y}^2 = \overline{uy}^2,$

tudíž $\quad \overline{ue_1} = \overline{uy}.$

Obdobně obdržíme na straně pravé

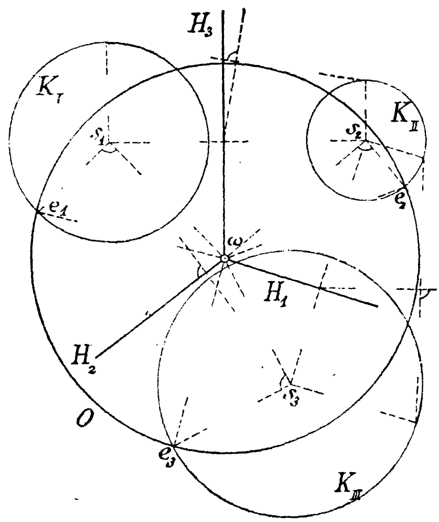
$$\overline{ue_2} = \overline{uz},$$

pročež $\quad \overline{uy} = \overline{uz}.$

Z toho plyne: všecky orthogonálné kružnice O kružnic K_1^i, K_2^i, procházejíce pevnými body y, z, tvoří svazek kružnic o reálných vrcholech y, z, jež jsou totožny s vrcholy společného polárného trojúhelníka.

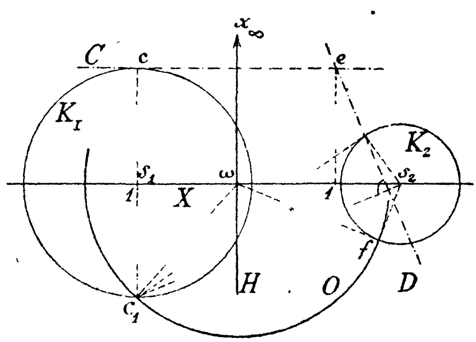
4. *Společný potenční bod a potenční kružnice tří kružnic imaginárných* K_1^i, K_2^i, K_3^i. Tyto buďtež dány svými ideálnými obrazy K_I, K_{II}, K_{III} (obr. 4.) o středech s_1, s_2, s_3 a poloměrech r_1, r_2, r_3. Sestrojíme-li potenční přímky H_1, H_2, H_3 vždy dvou daných kružnic pomyslných podle odst. 2., dá společný jejich průsečík ω *bod potenční*, jehož potence ke všem třem kružnicím jsou si rovny tak, že učiníme-li $s_1 e_1 \perp s_1\omega$, $s_2 e_2 \perp s_2\omega$, $s_3 e_3 \perp s_3\omega$, budou $\overline{\omega e_1} = \overline{\omega e_2} = \overline{\omega e_3}$ zároveň poloměry orthogonálné čili potenční kružnice O společné daným kružnicím pomyslným. Je patrno, že tato kružnice O je vždy reálná, kdežto pro kružnice reálné jest imaginárná, připadá-li bod potenční ω do vnitř kruhů daných. Též v tom je rozdíl pozoruhodný, že pro kružnice po-

myslné připadají středy s_1, s_2, s_3 do *vnitř* potenční kružnice O, kdežto leží vně O, jsou-li dané kružnice reálné.



Obr. 4.

5. *Potenční přímka H kružnice imaginárné* K_1^i (střed s_1, poloměr ir_1) *a kružnice reálné* K_{II} (střed s_2, poloměr r_2, obr. 5.).

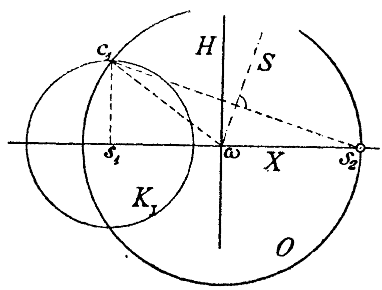


Obr. 5.

Kružnice K_1^i buď dána svým ideálným obrazem K_I (střed s_1, poloměr r_1). Přímku H sestrojíme v tomto případě jakožto *kollineační osu* kružnic K_1^i, K_{II} podle G. P. III. 67. Póly, na př.

c_1, c, sdružené podle kružnic K^i, K_{II} promítají se na poláru X z pólu x_∞, tedy $\perp X$, paprsky $c_1 1$, $c 1$ involuce, jejíž samodružné paprsky jsou osami kollineačními.

Jedna z nich je v nekonečnu, druhá H půlí tedy úsečku $\overline{11}$ (involuce je symetrická). Póly c_1, c sestrojíme takto: zvolíme-li na př. c_1 tak, aby $\overline{s_1 c_1} \perp X = r_1$, bude polára C kružnice K_1^i pro pól c_1 tečnou reálné kružnice K_I v bodě diametrálném c. Sestrojme dále poláru D reálné kružnice K_{II} pro pól c_1 a průsečík $(CD) \equiv e$; spusťme $\overline{e1} \perp X$, rozpolme úsečku $\overline{11}$ bodem ω a postavme $\omega H \perp X$. Vedeme-li bodem ω tečnu $\overline{\omega f}$ ke K_{II}, bude $\overline{\omega c_1} = \overline{\omega f}$ poloměr orthogonálné kružnice kružnic K_1^i, K_{II} ze středu ω.



Obr. 6.

Podle toho také sestrojíme potenční bod a společnou orthogonálnou kružnici tří kružnic, z nichž jedna nebo dvě jsou reálné, ostatní pak pomyslné.

6. *Potenční přímka H kružnice imaginárné K_1^i a kružnice nullové K_{II}.* Tato buď dána reálným bodem s_2 (poloměr $r_2 = o$), K_1^i obrazem K_I (obr. 6.). Potence bodu ω, který leží na přímce $s_1 s_2 \equiv X$, vzhledem k bodu s_2 jest $= \overline{\omega s}_2^2$, a potence bodu ω vzhledem keK_1^i jest $= \overline{\omega c}_1^2$, když $\overline{s_1 c_1} \perp X$. Aby bylo $\overline{\omega s}_2^2 = \overline{\omega c}_1^2$ musí bod ω býti na symmetrále S úsečky $\overline{s_2 c_1}$. Z toho jde konstrukce bodu ω a přímky potenční $\omega H \perp X$. Orthogonálná kružnice O ke K_1^i a K_{II} ze středu ω má poloměr $\overline{\omega c_1} = \overline{\omega s_2}$.

Toho užijeme také ke konstrukci potenčního bodu a společné kružnice orthogonálné ke třem kružnicím, z nichž jedna nebo dvě jsou imaginárné, ostatní pak nullové.

7. *Potenční rovina ϱ dvou imaginárných koulí $\varkappa_1^i$, $\varkappa_2^i$,* jichž středy jsou s_1, s_2, ideálnými pak obrazy reálné koule $\varkappa_I$, $\varkappa_{II}$ o středech s_1, s_2 a poloměrech r_1, r_2, jest geometrické místo bodu u, jehož potence k daným koulím jsou si rovny: $\overline{uc}_1^2 = \overline{us}_1^2 + r_1^2 = \overline{uc}_2^2 = \overline{us}_2^2 + r_2^2$, když body c_1, c_2 jsou na plochách kulových $\varkappa_I$, $\varkappa_{II}$ a $\overline{s_1c_1} \perp \overline{s_1u}$, $\overline{s_2c_2} \perp \overline{s_2u}$. Rovinu ϱ sestrojíme takto: proložme přímkou s_1s_2 rovinu σ, která protne plochy $\varkappa_1^i$, $\varkappa_2^i$ v imaginárných kružnicích K_1^i, K_2^i a plochy $\varkappa_I$, $\varkappa_{II}$ v reálných kružnicích K_I, K_{II}. V rovině σ sestrojme přímku potenční H podle odst. 2. a proložme přímkou H rovinu $\varrho \perp \overline{s_1s_2}$.

Třem imaginárným koulím přislušejí tři roviny potenční: ϱ_1 koulím $\varkappa_2^i$, $\varkappa_3^i$; ϱ_2 koulím $\varkappa_1^i$, $\varkappa_3^i$; ϱ_3 koulím $\varkappa_1^i$, $\varkappa_2^i$. Roviny ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 protínají se v společné přímce H, která stojí kolmo na rovině $(s_1s_2s_3)$ a slove *potenční přímkou* daných tří koulí.

Čtyřem imaginárným koulím přísluší šest rovin potenčních, jež protínají se (po třech) ve čtyřech přímkách potenčních; tyto pak procházejí týmž bodem ω, jehož potence k daným koulím jsou si rovny. Bod ω slove *potenčním bodem* čtyř koulí a je středem společné jich *koule orthogonálné*, jejíž poloměry $\overline{\omega c_1} = \overline{\omega c_2} = \overline{\omega c_3} = \overline{\omega c_4}$, jsou-li body c_1, c_2, c_3, c_4 na plochách $\varkappa_I$, $\varkappa_{II}$, $\varkappa_{III}$, $\varkappa_{IV}$ a $\overline{s_1c_1} \perp \overline{s_1\omega}$, $\overline{s_2c_2} \perp \overline{s_2\omega}$, $\overline{s_3c_3} \perp \overline{s_3\omega}$, $\overline{s_4c_4} \perp \overline{s_4\omega}$. Jsou-li některé z daných koulí reálné nebo nullové, užijeme konstrukce odst. 5. event. 6.

O zvláštních v sobě duálních quadratických přímkových kongruencích.

Napsal Dr. **Václav Simandl**, docent české techniky v Brně.

Buď dán libovolný hyperboloid H^2, a buďtež J_1 a J_2 obyčejnými involucemi v přímkách jeho první, resp. druhé přímkové řady. Buďtež pak přímkové dvojiny a_1, b_1 involuce první J_1 přiřazeny určitou projektivností $\mathfrak{P}$ přímkovým dvojinám a_2, b_2 involuce druhé J_2. Dospíváme pak tímto způsobem ku ∞^1 sborceným přímkovým čtyřstranům a_1, b_1, a_2, b_2, na H^2, a ∞^1 dvojin diagonál d_1, d_2 těchto čtyřstranů vyplňuje nám, jak jsme jinde