Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vincenc Jarolímek
Čtyři úlohy o parabole

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 48 (1919), No. 1-2, 97--101

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121127

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1919

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

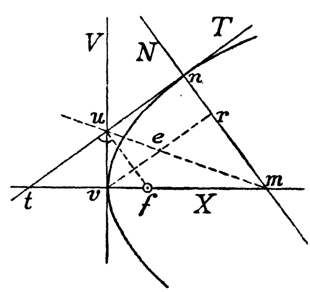
This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

Čtyři úlohy o parabole.

Podal Dr. **V. Jarolímek.**

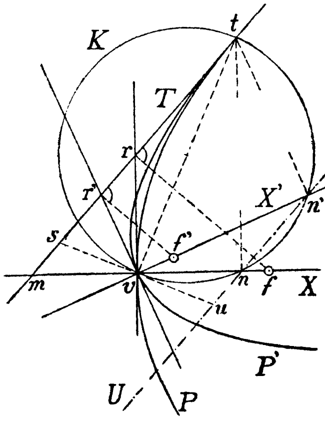
1. *Sestrojiti parabolu, dána-li její osa, vrchol a jedna normála.* Budiž osa paraboly X (obr. 1.), vrchol v, daná normála N, $vV \perp X$ tečna vrcholová, neznámá tečna $T \perp N$, průsečíky $(TN) \equiv n$, $(NX) \equiv m$, $(TX) \equiv t$, $(TV) \equiv u$. Jak známo, jest $\overline{tu} = \overline{un}$ a spojnice $\overline{mu}$ rozpůlí každou příčku $\overline{vr} \perp N$ mezi X a N. Z toho jde řešení toto: Spusťme s vrcholu $\overline{vr} \perp N$, rozpolme $\overline{vr}$ bodem e, spojme body $\overline{me}$. Přímka $\overline{me}$ protne V v bodě u, přímka $\overline{uf} \parallel N$ dá ohnisko f.



Obr. 1.

2. *Sestrojiti parabolu, dána-li tečna T i bod dotyčný t a vrchol v* (osa však nikoli). Je-li P parabola (obr. 2.), X její osa, v vrchol, T tečna v bodě t, $\overline{vr} \perp X$ tečna vrcholová, jest $\overline{mr} = \overline{rt}$; je-li $\overline{tn} \perp X$, je $\overline{mv} = \overline{vn}$, bod n leží tedy na kružnici K opsané nad průměrem $\overline{vt}$. Dáno-li tedy T, t, v, spojme $\overline{vt}$, opišme K, a veďme vrcholem v osu X tak, aby protala kružnici K v bodě n, jehož $\overline{nv} = \overline{vm}$: veďme přímku U souměrnou ku T podle středu v a to tak, že na libovolném paprsku $\overline{us}$ vedeném vrcholem v učiníme $\overline{vu} = \overline{sv}$, $uU \parallel T$. Přímka U protne kružnici K v bodě n, spojme $\overline{nv} \equiv X$, postavme $\overline{vr} \perp X$; $\overline{rf} \perp T$ dá ohnisko paraboly f. Že však U protne kružnici K ještě v druhém bodě n', dostaneme druhou parabolu P', jejíž osa $\overline{vn'} \equiv X'$, ohnisko f'.

3. *Sestrojiti parabolu, dány-li její osa X a dvě normály* N_1, N_2 (obr. 3.). Je-li n_1 pata (neznámá) normály N_1, $n_1 T_1 \perp N_1$ tečna, vV tečna vrcholová (neznámá), bude jako v úloze 1. $\overline{t_1 u_1} = \overline{u_1 n_1}$, bod u_1 tedy na přímce $m_1 u_1$, kterou obdržíme, vedeme-li libovolným bodem 1 na ose X příčku $\overline{12} \perp N_1$, rozpůlíme ji bodem 3, $\overline{13} = \overline{32}$, spojíme $m_1 3 \equiv U_1$; na U_1 bude ležeti neznámý bod u_1. Obdobně sestrojíme přímku $m_2 5 \equiv U_2 (14 \perp N_2$, $\overline{15} = \overline{54})$, na níž bude průsečík u_2 tečny $n_2 u_2 \perp N_2$ s tečnou vrcholovou V. Mimo to bude $u_1 f \perp T_1$, $u_2 f \perp T_2$, je-li f ohnisko.

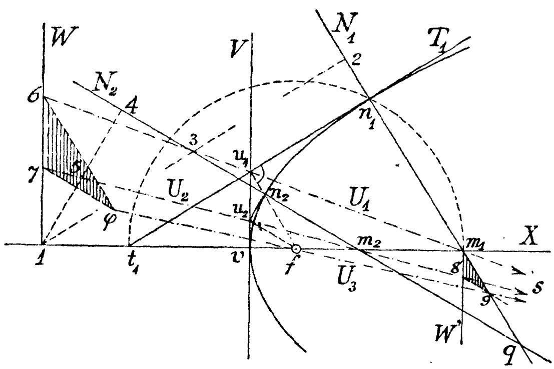


Obr. 2.

Avšak tečny vrcholové V nemáme. Vedeme-li místo ní kdekoli přímku $W \perp X$, která protne U_1, U_2 v bodech 6, 7, dále $6\varphi \parallel N_1$, čili $6\varphi \parallel u_1 f$, $7\varphi \parallel N_2$ čili $\parallel u_2 f$, připadne průsečík φ obecně mimo X. Posouvá-li se W stále $\perp X$, nemění $\triangle\, 6\, 7\, \varphi$ ani svoji polohu ani tvar, nýbrž jen velikost, a protože vrchol 6 se posouvá po přímce U_1, 7 po U_2, bude také třetí vrchol φ posouvati se po určité přímce U_3; $\triangle\, 6\, 7\, \varphi$ zůstane homologickým podle středu podobnosti, který je v průsečíku $(U_1 U_2) \equiv s$. Kdyby tento bod byl na nákresně, dala by spojnice $s\varphi \equiv U_3$. Jinak zjednáme si další bod této přímky 9 opakováním konstrukce s jinou přímkou $W' \perp X$, třebas bodem m_1 vedenou: W' seče U_2 v bodě 8, $\overline{89} \parallel N_2$ protne N_1 v bodě 9, spojnice $\varphi 9 \equiv U_3$. V okamžiku, kdy $W \equiv V$ stane se tečnou vrcholovou, vrchol φ trojúhelníka $6\, 7\, \varphi$ připadne do ohniska f. Průsečík přímky U_3 s osou X dá tedy ohnisko žádané paraboly f. Kružnice opsaná poloměrem fm_1 protne N_1 v bodě n_1 a X v bodě t_1, $t_1 n_1 \equiv T_1$; učiníme-li $fu_1 \perp T_1$ (nebo $\overline{t_1 u_1} = \overline{u_1 n_1}$), $u_1 v \perp V$, dostaneme vrchol paraboly v.

V našem případě byly odchylky α_1, α_2 normál N_1, N_2 od směru $+X$ obě tupé a průsečík normál q pod osou X. Jsou-li odchylky α_1, α_2 ostré a bod q pod osou X, vykoná se hořejší konstrukce po straně pravé, kamž připadne vrchol paraboly v. Ve všech ostatních případech nutno napřed sestrojiti další normálu N_3 souměrnou ku N_1 podle osy X, nebo normálu N_4 symmetrickou ku N_2.

Řešení 2. (analytické). Buďtež X, V osami souřadnic, tedy $y^2 = 2px$ rovnice paraboly, jíž vyhovují souřadnice bodů n_1



Obr. 3.

(x_1, y_1), n_2 (x_2, y_2):

$$y_1^2 = 2px_1 \tag{1}$$

$$y_2^2 = 2px_2, \tag{2}$$

tedy $$y_1^2 - y_2^2 = 2p\,(x_1 - x_2) = 2p\,\overline{m_2m_1} = 2pd, \tag{3}$$

kdež $d = \overline{m_2m_1}$ je úsečka daná (obr. 3).

Směrnice normál N_1, N_2 jsou

$$A_1 = -\frac{y_1}{p}, \tag{4}$$

$$A_2 = -\frac{y_2}{p}, \tag{5}$$

z čehož $y_1 = -pA_1$, $y_2 = -pA_2$. Vložíme-li tyto hodnoty do rovnice (3), dostaneme

$$p^2A_1^2 - p^2A_2^2 = 2pd;$$

z čehož $$p = \frac{2d}{A_1^2 - A_2^2}, \tag{6}$$

čili $$\frac{p}{2} = \frac{d^2}{dtg^2\alpha_1 - dtg^2\alpha_2} \tag{7}$$

kdež α_1, α_2 jsou odchylky normál od osy X. Z toho jde tato konstrukce parametru paraboly p:

Sestrojíme úsečky

$$e = d\ tg\alpha_1\ ^{1)},$$
$$f = e\ tg\alpha_1,$$
$$g = d\ tg\alpha_2,$$
$$h = g\ tg\alpha_2,$$
$$\frac{p}{2} = \frac{d^2}{f-h},$$

tedy tak, aby $d = \overline{m_1 m_2}$ byla střední úměrnou mezi $(f-h)$ a $\frac{p}{2}$.

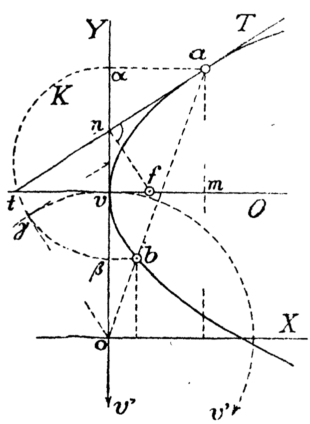
Znajíce parametr, učiníme subnormálu $\overline{m_1 r_1} = p$ (na levo od m_1 v obr. 3.); $\overline{r_1 n_1} \perp X$ protne normálu N_1 v bodě n_1, $\overline{n_1 T_1} \perp N_1$ dá tečnu. Bodem u_1, který půlí tečnu $\overline{t_1 n_1}$, veďme $V \perp X$; pata v dá vrchol, $\overline{u_1 f} \perp N_1$ ohnisko paraboly.

4. *Sestrojiti parabolu, dány-li dva její body* (a, b) *a tečna vrcholová* Y (obr. 4.). Spojnice $\overline{ab}$ protne Y v bodě o; $oX \perp Y$ buďtež osy souřadnic. Protože osa paraboly $O \parallel X$, bude rovnice křivky

$$(y-u)^2 = 2px, \tag{1}$$

kdež $u = \overline{ov}$ je pořadnice vrcholu v. Neznámou u určíme takto: Souřadnice bodův a $(x_1 y_1)$, b $(x_2 y_2)$ vyhovují rovnici (1):

$$(y_1 - u)^2 = 2px_1, \tag{2}$$
$$(y_2 - u)^2 = 2px_2. \tag{3}$$



Obr. 4.

Vylučme p dělením rovnice

[1]) Vzhledem k rovnici (7) hledíme jen k absolutním hodnotám $tg\,\alpha_1$, $tg\,\alpha_2$.

(2) rovnicí (3):

$$\frac{(y_1-u)^2}{(y_2-u)^2}=\frac{x_1}{x_2}. \tag{4}$$

Avšak podle obr. 4. jest

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}, \tag{5}$$

tedy

$$\frac{(y_1-u)^2}{(y_2-u)^2}=\frac{y_1}{y_2}, \tag{6}$$

z čehož [1])

$$y_1^2y_2-2uy_1y_2+u^2y_2=y_1y_2^2-2uy_1y_2+u^2y_1,$$

čili

$$u^2(y_2-y_1)=y_1y_2(y_2-y_1),$$

posléze

$$u=\pm\sqrt{y_1y_2}. \tag{7}$$

Z toho jde toto řešení úlohy: spusťme $\overline{a\alpha}\perp Y$ (obr. 4.), $b\beta\perp Y$, a sestrojme $u=\sqrt{\overline{o\alpha}\,.\,\overline{o\beta}}$ tím, že body α, β proložíme libovolnou kružnici a vedeme k ní bodem o tečnu $\overline{o\gamma}=u$; $\overline{ov}=\overline{o\gamma}$ dá vrchol paraboly v, $vO\perp Y$ její osu. Dále učiňme $\overline{vt}=\overline{mv}$; spojnice $\overline{at}$, tečna v bodě a, protne Y v bodě n, $\overline{nf}\perp\overline{at}$ dá ohnisko paraboly f. Přeneseme-li $\overline{o\gamma}$ na Y od o dolů do v' ($\overline{ov'}=-u$), bude v' vrchol druhé paraboly úloze hovící. — Synthetické odvození této konstrukce podává autorův spis „Základové geometrie polohy v rovině a prostoru“, svazek II., odst. 105. γ), obr. 169.

Úlohy Apolloniovy rozšířené na koule.

Podal Dr. **Vinc. Jarolímek.**

Plocha kulová jest určena čtyřmi podmínkami. Má-li plocha kulová procházeti danými body (značka .), dotýkati se daných rovin (značka |) a koulí (značka ○), možno sestaviti z těchto prvků po čtyřech celkem 15 úloh (obr. 1.), tolik, kolik je kombinací ze tří prvků čtvrté třídy s opakováním. Zní tedy na př. úloha 8. takto: Sestrojiti plochu kulovou, která procházejíc da-

[1]) Anebo oddvojmocníme rovnici (6) a řešíme vzniklou rovníci lineární podle u.