Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch

Příspěvky k theorii některých transcendent počtu integrálního. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 48 (1919), No. 1-2, 1–9

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121121

Příspěvky k theorii některých transcendent počtu integrálního.

Píše **M. Lerch** v Brně.

1.

Pro $|z| < 1$ bude lze rozvinouti funkci

$$\left(\frac{\log(1+z)}{z}\right)^a = \sum_0^\infty \frac{\varphi_\nu(a)}{\nu!} z^\nu$$

v řadu mocnin, jak to bezprostředně vyplývá dosazením hodnoty

$$\frac{\log(1+z)}{z} = 1 + \zeta = 1 - \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{3}z^2 - \tfrac{1}{4}z^3 + \ldots$$

do řady binomické; součinitelé $\varphi_\nu(a)$ objeví se tu jako polynomy (cel. rac. funkce); běží však o jejich chování při velkých ν k vůli řešení otázek konvergenčních.

Položme $z = re^{i\varphi}$, $r < 1$, i obdržíme známým způsobem

$$\frac{\varphi_\nu(a)}{\nu!} r^\nu = \frac{1}{2\pi r^a} \int_{-\pi}^{\pi} \log^a(1 + re^{i\varphi})\, e^{-ai\varphi - \nu i\varphi} d\varphi;$$

v tomto integrálu můžeme přejíti k mezi pro $r = 1$, čímž se objeví tvar

$$\frac{\varphi_\nu(a)}{\nu!} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\log\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{i\varphi}{2}\right]^a e^{-(a+\nu)i\varphi} d\varphi.$$

Z něho plyne důležitý poznatek, že poměr $\varphi_\nu : \nu!$ se s rostoucím ν blíží nulle, takže zůstává pod stálou mezí.

Pišme nyní základní rovnici ve tvaru

$$\log^a(1+z) = \sum_0^\infty \frac{\varphi_\nu}{\nu!} z^{a+\nu},$$

jenž předpokládá z kladné v případě hodnot reálných. Derivujme obě strany a násobme výsledek řadou

$$\log(1+z) = \sum_1^\infty (-1)^{\mu-1} \frac{z^\mu}{\mu},$$

i vyjde

$$\frac{a}{1+z} \sum_{n=0}^\infty \frac{\varphi_n}{n!} z^n = \Sigma\Sigma (-1)^{\mu-1} \frac{a+\nu}{\mu} \frac{\varphi_\nu}{\nu!} z^{\mu+\nu-1}, \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, 3, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Na levé straně je součinitel při $\frac{z^n}{n!}$ roven

$$a[\varphi_n - n\varphi_{n-1} + n(n-1)\varphi_{n-2} - \ldots] =$$
$$= a\varphi_n + a \sum_{\mu=1}^n (-1)^\mu \mu! \binom{n}{\mu} \varphi_{n-\mu},$$

v pravo je týž součinitel vyjádřen součtem

$$\frac{1}{n+1} \sum_{\mu+\nu=n+1} (-1)^{\mu-1} (\mu-1)! \binom{n+1}{\mu} (a+\nu)\varphi_\nu,$$

a tak nám porovnání obou součinitelů poskytne vztah

$$(n+1)a\varphi_n + a(n+1)\sum_1^n (-1)^\mu \mu! \binom{n}{\mu} \varphi_{n-\mu}$$
$$= \sum_1^{n+1} (-1)^{\mu-1} (\mu-1)! \binom{n+1}{\mu} (a+n+1-\mu)\varphi_{n+1-\mu}.$$

Na pravé straně poslední rovnice odštěpme člen $\mu = 1$ a v ostatních pišme $\mu + 1$ za μ, převádějíce je zároveň na levou stranu; sloučením členů obsahujících φ_n vychází pak

$$n(n+1)\varphi_n = \sum_{\mu=1}^n (-1)^{\mu-1} \mu! \binom{n+1}{\mu+1} (a+n-\mu)\varphi_{n-\mu}$$
$$+ a(n+1)\sum_1^n (-1)^\mu \mu! \binom{n}{\mu} \varphi_{n-\mu}.$$

Zde užijme v druhém součtu identity

$$(n+1)\binom{n}{\mu} = (\mu+1)\binom{n+1}{\mu+1}$$

a spojme oba výrazy; vyjde tak vztah

$$(1^a) \quad n(n+1)\varphi_n = \sum_{\mu=1}^n (-1)^\mu \mu! \binom{n+1}{\mu+1} [\mu(a+1) - n]\varphi_{n-\mu},$$

který slouží k postupnému stanovení hodnot $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ na základě hodnoty $\varphi_0 = 1$.

2.

Na místě $\varphi_\nu(a-1)$ zaveďme označení $G_\nu(a)$, takže máme

$$(1^*)\quad \left(\frac{\log(1+z)}{z}\right)^{a-1}=\sum_0^\infty \frac{G_\nu(a)}{\nu!}z^\nu,\quad G_0=1,$$

$$(2)\quad n(n+1)\,G_n=\sum_1^n(-1)^\mu\,\mu!\binom{n+1}{\mu+1}(a\mu-n)\,G_{n-\mu}.$$

To předeslavše uvažujme funkci definovanou pro a v reálné části kladné integrálem

$$(3)\quad \Gamma(a)=\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx;$$

pro ni vychází částečnou integrací vztah

$$\Gamma(a+1)=a\,\Gamma(a),$$

a z něho opakováním

$$(4)\quad \Gamma(a+m)=\Gamma(a)\,(a,m);\ (a,m)=a\,(a+1)\ldots(a+m-1).$$

Současně vzpomeňme $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(n)=(n-1)!$ Jiných vědomostí o funkci Γ tu nebude užito, až na vyjádření prvního Eulerova integrálu. Substitucí $v\,x=z$ se verifikuje vzorec *pro kladná* v platný

$$(3^*)\quad \int_0^\infty e^{-vx}x^{a-1}\,dx=\frac{\Gamma(a)}{v^a},$$

kterého chceme užíti k novému vyjádření levé strany; za tím účelem vložme do (1^*) $z=e^{-x}-1$, i vyjde

$$(\alpha)\quad x^{a-1}=\sum_{\nu=0}^\infty(-1)^\nu\frac{G_\nu(a)}{\nu!}(1-e^{-x})^{a+\nu-1}.$$

Násobme $e^{-vx}dx$ a integrujme v mezích $x=0$ a $x=\infty$; s použitím (3^*) vyjde tak

$$(\beta)\quad \frac{\Gamma(a)}{v^a}=\sum_{\nu=0}^\infty(-1)^\nu\frac{G_\nu(a)}{\nu!}\int_0^\infty e^{-vx}(1-e^{-x})^{a+\nu-1}dx,$$

při čemž postup obrácení pořadu integrace a součtu jest odůvodněn absolutní konvergencí řady a snadným oceněním zbytků; při tom se doporučuje předpoklad $v>2$.

Integrál na pravé straně převede se dosazením $\xi = e^{-x}$ na tvar

$$(\gamma) \quad \int_0^\infty e^{-vx}(1 - e^{-x})^{a+\nu-1}dx = \int_0^1 \xi^{v-1}(1-\xi)^{a+\nu-1}d\xi =$$

$$= \frac{\Gamma(v)\,\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(v+a+\nu)},$$

což dle (4) má hodnotu

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(v)\,(a,\nu)}{\Gamma(v+a)\,(a+v,\nu)}.$$

Dosadíme tuto do rovnice (β) a převedeme všecky činitele Γ na levou stranu, i obdržíme nový rozvoj z theorie funkce Γ

$$(5) \quad \frac{\Gamma(a+v)}{v^a\,\Gamma(v)} = 1 - G_1(a)\frac{a}{a+v} + \frac{G_2(a)}{1\,.\,2}\frac{a(a+1)}{(a+v)(a+v+1)}$$

$$-\frac{G_3(a)}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{a(a+1)(a+2)}{(a+v)(a+v+1)(a+v+2)} + \ldots$$

Očividně podává nám pravá strana výsledek

$$\lim_{v=\infty}\frac{\Gamma(a+v)}{v^a\,\Gamma(v)} = 1,$$

což pro celistvá v podává Eulerův a Gaussův součin

$$\Gamma(a) = \lim_{v=\infty}\frac{(v-1)!\,v^a}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+v\quad 1)}.$$

Obsahujíc Gaussův součin jako bezprostřední důsledek, má vůči němu rovnice (5) přednost v tom směru, že může sloužiti k číselnému stanovení funkce gamma, účel to, k němuž Gaussův vzorec vede teprve po transformaci a zavedení dalších prvků.

Užití vzorce (5) k počítání veličiny $\Gamma(a)$ vyznačeno je rovnicemi — při čemž v jest opět celistvé —

$$(5^0) \qquad \Gamma(a) = \frac{(v-1)!\,v^a}{(a,\,v)}(1+\varepsilon);$$

$$1+\varepsilon = 1 - G_1\frac{a}{a+v} + \frac{G_2}{2!}\frac{(a,2)}{(a+v,2)} - \frac{G_3}{3!}\frac{(a,3)}{(a+v,3)} + \ldots$$

Kdybychom hledali na př. $\Gamma(\frac{1}{2})$, zvolíme $v = 10$, načež bude

$$\Gamma(\tfrac{1}{3}) = \frac{9\,!\,10^{\frac{1}{3}}(1+\varepsilon)}{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{10}{3}\cdots\frac{28}{3}},$$

$$1+\varepsilon = 1 - G_1\frac{1}{31} + \frac{G_2}{2}\,\frac{1\,.\,4}{31\,.\,34} - \frac{G_3}{6}\,\frac{1\,.\,4\,.\,7}{31\,.\,34\,.\,37} +$$

$$+\frac{G_4}{24}\,\frac{1\,.\,4\,.\,7\,.\,10}{31\,.\,34\,.\,37\,.\,40} - \ldots$$

Pomocí rekurentní rovnice (2) pro $a = \frac{1}{3}$ vypočteme

$$G_1 = \frac{1}{3},\quad G_2 = -\frac{1}{6},\quad G_3 = \frac{7}{17},\quad G_4 = -\frac{1777}{1820},\ldots$$

$$1+\varepsilon = 1 - 0{\cdot}011079,$$

načež se výpočet snadno dokončí.

3.

Rovnice (5) v původním znění

$$\frac{\Gamma(a)}{v^a} = \sum_0^\infty (-1)^\nu \frac{G_\nu(a)}{\nu\,!}\,\frac{\Gamma(v)\,\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(v+a+\nu)}$$

pro případ celistvého $a > 1$ se může psáti

$$(6)\qquad \frac{1}{v^a} = \sum_0^\infty \binom{-a}{\nu} \frac{G_\nu(a)}{v(v+1)(v+2)\ldots(v+a+\nu-1)},$$

t. j. podává rozvoj záporných mocnin v řadu fakult. Podle vzorce z theorie rozdílů

$$\Delta^n\frac{1}{u} = \frac{(-1)^n n\,!}{u\,(u+1)\,(u+2)\ldots(u+n)}$$

možno tuto rovnici psáti

$$(6^0)\quad \frac{1}{v^a} = \sum_0^\infty (-1)^{a+\nu-1}\binom{-a}{\nu}\frac{G_\nu(a)}{(a+\nu-1)\,!}\,\Delta^{a+\nu-1}\frac{1}{v},\quad \Delta v = 1.$$

Integrujme dle v a ustanovme konstantu pro $v = \infty$; objeví se rozvoj záporných mocnin podle rozdílů přirozených logarithmů

$$(6^1)\quad \frac{1}{v^{a-1}} = (a-1)\sum_0^\infty (-1)^{a+\nu}\binom{-a}{\nu}\frac{G_\nu(a)}{(a+\nu-1)!}\,\Delta^{a+\nu-1}\log v,$$
$$a > 1.$$

Pro $a = 1$ přejde pravá strana (1*) na stálý člen, t. j. 1; polynomy $G_\nu(a)$ tedy vymizí pro $a = 1$, a jejich derivace určeny jsou mateřskou funkcí (fonction génératrice)

$$(7) \quad \log \frac{\log(1+z)}{z} = \sum_1^\infty \frac{G'_\nu(1)}{\nu!} z^\nu ,$$

$$n(n+1)\, G'_n(1) =$$

$$(-1)^n\, n!\, n + \sum_1^{n-1} (-1)^{\mu-1} \mu! \binom{n+1}{\mu+1} (n-\mu)\, G'_{n-\mu}(1);$$

$$G'_1(1) = -\frac{1}{2}, \quad G'_2(1) = \frac{5}{12}, \quad G'_3(1) = -\frac{3}{4},$$

$$G'_4(1) = \frac{251}{120}, \quad G'_5(1) = -\frac{475}{60}.$$

V rovnici (5) odečtěme na obou stranách 1 a dělme $a - 1$; přechodem k mezím pro $a = 1$ vyjde

$$(8) \quad \frac{\Gamma'(v+1) - \Gamma(v)\, v \log v}{v\, \Gamma(v)} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{v+1} + \frac{G'_2(1)}{(v+1)(v+2)} - \frac{G'_3(1)}{(v+1)(v+2)(v+3)} + \dots$$

čili zaměníme-li v za $v - 1$:

$$(8^0) \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)} - \log(v-1) = \frac{1}{2v} + \frac{G'_2(1)}{v(v+1)} - \frac{G'_3(1)}{v(v+1)(v+2)} +$$

$$+ \frac{G'_4(1)}{v(v+1)(v+2)(v+3)} - \dots$$

V rovnici (5) dále po odečtení 1 na obou stranách dělme a, a proveďme limitní přechod pro $a = 0$:

$$(9) \quad \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)} - \log v =$$

$$= \frac{-G_1(0)}{v} + \frac{1}{2} \frac{G_2(0)}{v(v+1)} - \frac{1}{3} \frac{G_3(0)}{v(v+1)(v+2)} + \dots;$$

$$(n+1)\, G_n(0) = \sum_1^n (-1)^{\mu-1} \mu! \binom{n+1}{\mu+1} G_{n-\mu}(0), \quad G_0 = 1;$$

$$\frac{z}{\log(1+z)} = \sum_0^\infty \frac{G_\nu(0)}{\nu!} z^\nu; \quad G_1 = \frac{1}{2}, \quad G_2 = -\frac{1}{6},$$

$$G_3 = \frac{1}{4}, \quad G_4 = -\frac{19}{30}, \quad G_5 = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}, \quad G_6 = -\frac{863}{84}.$$

Poněvadž

$$\frac{z}{\log(1+z)} = \int_0^1 (1+z)^x dx = \sum_0^\infty z^\nu \int_0^1 \binom{x}{\nu} dx,$$

a tedy

$$\frac{G_\nu(0)}{\nu!} = \int_0^1 \binom{x}{\nu} dx =$$

$$= (-1)^{\nu-1} \int_0^1 \frac{x}{1} \cdot \frac{1-x}{2} \cdot \frac{2-x}{3} \cdots \frac{\nu-1-x}{\nu} dx,$$

bude

$$0 < (-1)^{\nu-1} \frac{G_\nu(0)}{\nu!} < 1;$$

čímž pro tato čísla dáno znamení a omezení.

V rovnici (8) levá strana

$$\frac{\Gamma'(v+1)}{\Gamma(v+1)} - \log v = \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)} - \log v + \frac{1}{v};$$

převedeme $\frac{1}{v}$ na pravou stranu a obdržíme zajímavější tvar

$$(8^*) \qquad \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)} = \log v - \frac{v+2}{2v(v+1)} + $$
$$+ \sum_{\nu=2}^{\infty} (-1)^\nu \frac{G'_\nu(1)}{(v+1)(v+2)\ldots(v+\nu)}.$$

Rovnici (9) pišme nyní

$$\frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)} = \log v - \frac{1}{2v} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{G_{\nu+1}(0)}{(\nu+1)!} \Delta^\nu \frac{1}{v},$$

a integrujme obě strany; obdržíme nejprve rovnici s neznámou konstantou C

$$\log \Gamma(v) = C + \left(v - \frac{1}{2}\right) \log v - v - \sum_1^\infty \frac{G_{\nu+1}(0)}{(\nu+1)!} \Delta^\nu \log v.$$

Abychom určili konstantu C, integrujme obě strany od $v = u$ do $v = u + 1$ a užijme Raabeova vzorce

$$(10) \qquad \int_u^{u+1} \log \Gamma(v)\, dv = u \log u - u + \log \sqrt{2\pi}.$$

Dosazením hodnot

$$\int v \log v\, dv = \frac{v^2}{2} \log v - \frac{v^2}{4}, \quad \Delta u^2 = 2u + 1$$

dostaneme

$$(a) \quad u \log u - u + \log \sqrt{2\pi} = C + \frac{1}{2} \Delta (u^2 \log u)$$

$$- \frac{1}{2} \Delta (u \log u) - \frac{3}{2}\left(u + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} -$$

$$- \sum_{1}^{\infty} \frac{G_{\nu+1}(0)}{(\nu+1)!} \Delta^{\nu+1} (u \log u - u).$$

Zde třeba uvážiti

$$\Delta (u \log u) = (u+1) \log\left(1 + \frac{1}{u}\right) + \log u = \log u +$$

$$+ (u+1)\left[\frac{1}{u} - \frac{1}{2u^2} + \dots\right],$$

tedy

$$\Delta (u \log u - u) = \log u + \frac{1}{2u} - \frac{1}{6u^2} + \dots$$

$$\Delta^2 (u \log u - u) = \frac{3}{2u} + \frac{\alpha}{u^2} + \frac{\alpha'}{u^3} + \dots$$

Mimo to

$$\Delta (u^2 \log u) = (u+1)^2 \log\left(1 + \frac{1}{u}\right) + (2u+1) \log u$$

$$= (2u+1) \log u + u + \frac{3}{2} + \frac{\beta}{u} + \frac{\beta'}{u^2} + \dots$$

a dále

$$\Delta \log u = \frac{1}{u} + \dots, \text{ takže } \Delta^{\nu+1} \log u = \frac{(-1)^\nu \nu!}{u^{\nu+1}} + \dots$$

$$\Delta^{\nu+1} (u \log u - u) = \frac{(-1)^{\nu-1}(\nu-1)!}{u^\nu} + \dots$$

Dosazením těchto hodnot nabývá pravá strana rovnice tvaru (a)

$$C + \left[\left(u + \frac{1}{2}\right) \log u + \frac{u}{2} + \frac{3}{4}\right] - \frac{1}{2} \log u -$$

$$- \frac{3}{2}\left(u + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{u}\right),$$

kde závorka $\left(\frac{1}{u}\right)$ značí veličinu nekonečně malou zároveň s $\frac{1}{u}$.

Až na veličinu nekonečně malou je tedy pravá strana (a) rovna

$$C + u \log u - u,$$

a musí tedy $C = \log \sqrt{2\pi}$.

Tím nabývá hořejší výsledek konečného tvaru

$$(11) \qquad \log \Gamma(v) = \left(v - \frac{1}{2}\right) \log v - v + \log \sqrt{2\pi} + \tilde{\omega}(v),$$

$$\tilde{\omega}(v) = -\frac{G_2(0)}{2!} \Delta \log v - \frac{G_3(0)}{3!} \Delta^2 \log v - \\ -\frac{G_4(0)}{4!} \Delta^3 \log v - \ldots$$

Tak dospíváme k asymptotickému zákonu Stirlingovu. Rozvoje (8)—(11) jsou zvláštní případy známých vzorců; zde bylo nám vodítkem vyvinouti je ze společného pramene (5). Pokud se týče integrálu Raabeova, jsou proň rozmanité důkazy v literatuře; k nejjednodušším patří náš důkaz spočívající v očividné identitě

$$J = \int_u^{u+1} \log \Gamma(x)\, dx, \qquad \frac{dJ}{du} = \log \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u)} = \log u,$$

z níž vychází

$$J = u \log u - u + C,$$

a konstanta

$$C = \int_0^1 \log \Gamma(x)\, dx$$

se určí buď na základě doplňkové věty

$$\Gamma(x)\, \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi},$$

jako v naší publikaci z roku 1888 [1]) aneb se obdrží jako vedlejší výsledek při důkazu Gaussova vztahu.[2]) (Pokračování.)

---

[1]) Démonstration élémentaire d'une formule de Raabe (Giornale di Matematiche diretto dal Professore G. Battaglini, vol. XXVI.), aneb O hlavních vlastnostech integrálů Eulerových (Věstník král. čes. spol. nauk z r. 1889). Otištěno v *Hermite*, Cours rédigé en 1882 par M. Andoyer, 4e éd. Paris 1891 (str. 129).

[2]) Theorie funkce gamma. Věstník České Akademie, roč. II., 1892. sep. otisku str. 10—11 a 24.