Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Pleskot

Konstrukce středu křivosti křivky jistou kvadratickou transformací z dané křivky odvozené

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 48 (1919), No. 1-2, 56--59

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121120

změní tato transformace formu $F(x, y \mid A)$ ve formu $F(\bar{x}, \bar{y} \mid \bar{A})$, takže svazek forem

$$F(x, y \mid A) + \lambda \,.\, \Phi(x, y) \tag{28}$$

přejde touto transformací ve svazek

$$F(\bar{x}, \bar{y} \mid \bar{A}) + \lambda \,.\, n\Phi(\bar{x}, \bar{y}). \tag{28'}$$

Mezi paffiany svazků (28) a (28') pak platí rovnice

$$\bar{K} + \bar{L}\lambda n - \bar{M}\lambda^2 n^2 - \lambda^3 n^3 = n^3 (K + L\lambda - M\lambda^2 - \lambda^3),$$

kde činitel n^3 na pravé straně je substituční determinant. Z této rovnice soudíme, že

$$\bar{K} = n^3 K, \qquad \bar{L} = n^2 L, \qquad \bar{M} = n \,.\, M.$$

Jest tedy dále

$$\bar{I} = n^2 I, \qquad \bar{J} = n^3 J, \qquad \bar{\Delta} = n^6 \Delta.$$

* *
*

Pro nedostatek místa bylo nutno důkazy pouze co nejstručněji naznačiti. Doufám, že tím netrpěla srozumitelnost. Další výsledky, k nimž jsem dospěl v theorii singulárních A. f. sdělím, až to dovolí tiskové poměry.

V Praze, v dubnu 1918.

Konstrukce středu křivosti křivky jistou kvadratickou transformací z dané křivky odvozené.

Dr. Ant. Pleskot, professor v Plzni.

Pohybuje li se proměnlivý trojúhelník o vrcholech A, B, C tak, že vrcholy A a B sunou se po křivkách (A) a (B), strana AB obaluje křivku (C_1), strany BC a AC křivky (A_1) a (B_1), pak z geometrie kinematické známo, kterak sestrojí se normála a střed zakřivení křivky (C), kterou opisuje zbývající vrchol C.

Řešení úlohy této pochodící od Mannheima jest sice obecné, avšak v obecném případě dosti komplikované.

V následujícím chceme uvésti jednoduché řešení bez úvah kinematických a sice pro ten zvláštní případ, kdy křivky

(C_1), (A_1), (B_1), jež obalují strany trojúhelníka degenerují v body; ukážeme, že řešením této úlohy současně podáno řešení úlohy odvoditi střed zakřivené křivky jistou kvadratickou transformací z dané odvozené, kteroužto úlohu řešil dvorní rada p. Procházka v tomto časopise v ročníku 1906 str. 32. a násl., kinematickou geometrií.

Úloha, již řešiti budeme, jest tato:

Vrcholy A a B trojúhelníka ABC sunou se po křivkách (A) a (B), jichž normály a středy zakřivení v bodech A a B jsou známy, při tom strana AB prochází pevným bodem C_1, strany AC a BC pevnými body B_1 a A_1.

Jest stanovíti tečnu a střed zakřivení v bodě C křivky (C), již opisuje vrchol C.

Křivku (A) nahraďme v okolí bodu A kuželosečkou K_1, která s křivkou (A) v bodě A oskuluje a prochází body B_1 a C_1. Těmito podmínkami jest kuželosečka K_1 úplně stanovena, neboť je li dán bod A se svým středem zakřivení, jest to tolik, jako jsou-li dány tři body.

Podobně křivku (B) nahraďme v okolí bodu B kuželosečkou K_2, která s křivkou (B) v bodu B oskuluje a prochází body C_1 a A_1.

Je-li kuželosečka dána třemi body a středem zakřivení v jednom z nich, pak další elementy kuželosečky této sestrojíme buď užitím Steinerovy paraboly aneb daleko jednodušeji konstrukcí, která plyne z konstrukce: „Sestrojiti střed zakřivení kuželosečky, dána-li tato čtyřmi body a tečnou v jednom z nich.“

Jednoduchá konstrukce této úlohy jest uvedena v přednáškách Sobotkových o differenciální geometrii a sice na str. 221; z ní naopak obrácením plyne jednoduchá konstrukce dalších bodů kuželosečky, je-li tato dána bodem s příslušným středem zakřivení a dvěma dalšími body.

Pohybuje-li se nyní trojúhelník ABC tak, že body A a B sunou se po kuželosečkách K_1 a K_2, strana AB prochází pevným bodem C_1 a strany AC a BC pevnými body B_1 a A_1, pak bod C opisuje kuželosečku K, neboť paprsky B_1C a A_1C jsou nyní projektivní; patří totiž k danému paprsku B_1C jen jediný paprsek A_1C a naopak k danému paprsku A_1C jediný paprsek B_1C.

Kuželosečka K oskuluje v bodě C s křivkou (C), neboť kuželosečky K_1 a K_2 v bodech A a B mají s křivkami (A) a (B) tři soumezné body společné a proto i tři soumezné společné body mají v bodě C kuželosečka K a křivka (C).

Sestrojíme-li tedy střed zakřivení v bodě C kuželosečky K, která jest úplně stanovena, jest tím i sestrojen střed zakřivení křivky (C) v bodě C.

Řešení úlohy předchozí řeší i úlohu, o níž shora jsme se zmínili, kterak sestrojiti střed zakřivení křivky odvozené z dané křivky jistou kvadratickou transformací.

Transformace jest tato:

Jest dána kuželosečka K_1 a na ní body S_1 a S_2 a mimo tuto bod S_3. K libovolnému bodu M křivky (M) sestrojíme příslušný bod M_1 kvadratickou transformací takto:

Paprsek MS_1 protne kuželosečku K_1 v bodě A; pak paprsky S_2A a S_3M svým průsečíkem stanoví bod M_1 příslušný bodu M. Je-li nyní dána tečna a střed zakřivení pro bod M křivky (M), jest sestrojiti tečnu a střed zakřivení v příslušném bodě M_1 odvozené křivky (M_1).

Bodem M a body S_1 a S_3 proložme kuželosečku K_2, která s křivkou (M) v bodě M oskuluje, t. j. má s ní v bodě M tutéž tečnu a střed křivosti. Applikujeme-li nyní příslušnou transformaci kvadratickou na kuželosečku K_2, pak transformuje se tato v kuželosečku K, neboť paprsky S_2M_1 a S_3M_1 jsou projektivní, ježto k danému paprsku S_2M_1 patří jediný paprsek S_3M_1 a naopak. Že kuželosečka K_2 transformuje se opět v kuželosečku, plyne i z toho, že kuželosečka K_2 prochází body S_1 a S_3, které jsou základními body příslušné kvadratické transformace a tudíž transformuje se v čáru stupně 4—2, t. j. v kuželosečku. Kuželosečka K procházejíc body S_2, S_3, M_1, oskuluje v bodě M_1 s křivkou (M_1); sestrojíme-li tedy v bodě M_1 střed zakřivení kuželosečky K, která jest úplně stanovena, jest tím i stanoven střed zakřivení křivky (M_1) v bodě M_1.

Kuželosečku K_2 sestrojíme dle poznámky shora uvedené; dle konstrukce v Sobotkově differenciální geometrii uvedené sestrojíme prajednoduše dva další body M' a M'' kuželosečky K_2. Paprsky $M'S_1$ a $M''S_1$ protnou kuželosečku K_1 v bodech A' a A'' a pak průsečíkem k sobě příslušných paprsků $A'S_2$,

$M'S_3$ a $A''S_2$, $M''S_3$ zjednáme si další body M_1' a M_1'' kuželosečky K. Tím je dána kuželosečka K pěti body. Střed křivosti v bodě M_1 sestrojíme tak, že sestrojíme tečnu v bodě M_1 a pak použijeme opět Sobotkovy konstrukce středu křivosti, dána-li kuželosečka čtyřmi body a tečnou v jednom z nich.

O dvojných součinech vektorových.

Napsal Ph. Dr. **Vlad. Libický.**

W. Gibbs pojednává ve své „Vector Analysis" (pag. 306) o zvláštních součinech dvou dyad, jež nazývá *dvojnými* (*double products*); rozeznává pak dva druhy těchto součinů: *double dot product* a *double cross product.* První z nich jest definován vzorcem:

$$\mathbf{al} : \mathbf{bm} = (\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b})\,(\mathbf{l} \,.\, \mathbf{m}), \tag{1}$$

v němž dyady **al** a **bm** jsou činitelé součinu a dvojtečka : znaménkem jeho.*) Výsledek jest součin skalárních součinů $\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b}$ a $\mathbf{l} \,.\, \mathbf{m}$, tedy veličina skalární; i může tento dvojný součin vhodně býti nazván *skalárním.***)

Druhý ze zmíněných dvojných součinů jest definován vzorcem:

$$\mathbf{al} \underset{\times}{\times} \mathbf{bm} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]\,[\mathbf{l} \times \mathbf{m}]; \tag{2}$$

znaménko jeho jest $\underset{\times}{\times}$ a výsledek dyadický součin vektorů $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ a $\mathbf{l} \times \mathbf{m}$. Zoveme pak tento dvojný součin *vektoriálním.****)

Jest zřejmo, že k těmto dvěma druhům dvojných součinů lze připojiti ještě třetí, jehož výsledkem jest (alespoň v trojroz-

---

*) Ježto se ve vektorové analysi neužívá tohoto znaménka pro výkon dělení, není se obávati, že bude dvojné násobení zaměněno s dělením.

**) Analytický tvar jeho jest:

$$\mathbf{al} : \mathbf{bm} = a_1 b_1 l_1 m_1 + a_1 b_1 l_2 m_2 + a_1 b_1 l_3 m_3 + a_2 b_2 l_1 m_1 + a_2 b_2 l_2 m_2 + \\ + a_2 b_2 l_3 m_3 + a_3 b_3 l_1 m_1 + a_3 b_3 l_2 m_2 + a_3 b_3 l_3 m_3, \tag{1a}$$

je-li $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$ atd.

***) Složitějšího analytického tvaru jeho tuto neuvádím. Poznamenávám, že součiny skalární kladu do závorek tvaru ( ), vektorové [ ], dyadické { }; kde by se však tyto závorky hromadily, vynechávám je.