Václav A. Hruška

O systémech singulárních relací mezi periodami Abelových funkcí tří proměnných

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 48 (1919), No. 1-2, 43--56

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121113

O systémech singulárních relací mezi periodami Abelových funkcí tří proměnných.

Dr. Václav Hruška, assistent české techniky v Praze.

1. Mějme systém (I) Abelových funkcí tří proměnných u_1, u_2, u_3 o periodách

$$(1)\qquad \begin{cases} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{cases}\left|\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \tau_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ 0 & 1 & 0 & \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{32} \\ 0 & 0 & 1 & \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{array}\right.$$

kde $\tau_{ik} = \tau_{ki}$. Vedle toho mějme systém (II) Abelových funkcí tří proměnných u'_i, o periodách τ'_{ki} $(i, k = 1, 2, 3)$. Položme

$$u_i = M_{i_1}\, u'_1 + M_{i_2}\, u'_2 + M_{i_3}\, u'_{i_3} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

kde $\Delta = \mid M_{ik} \mid \neq 0$, $(i, k = 1, 2, 3)$. Aby funkce systému (I) daly se vyjádřiti racionálně funkcemi systému (II) musí se proměnné u_i zvětšiti o periodu, zvětšíme-li o periodu u'_k $(i, k = 1, 2, 3)$.[1] Zvětšíme-li tedy (u'_1, u'_2, u'_3) o periodu $(1, 0, 0)$, zvětší se (u_1, u_2, u_3) o (M_{11}, M_{21}, M_{31}) a to musí býti periodou, t. j. musí

$$M_{i_1} = a_{1i} + a_{14}\, \tau_{1i} + a_{15}\, \tau_{2i} + a_{16}\, \tau_{3i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

kde a_{1i}, a_{14}, a_{15}, a_{16} jsou čísla celá. Obdobně pro ostatní periody; máme tedy pro M_{ik}, τ'_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ rovnice[2]

$$(2)\begin{cases} M_{ik} = a_{ki} + a_{k4}\, \tau_{1i} + a_{k5}\, \tau_{2i} + a_{k6}\, \tau_{3i} \\ M_{i_1}\, \tau'_{k_1} + M_{i_2}\, \tau'_{k_2} + M_{i_3}\, \tau'_{k_3} = a_{k+3, i} + a_{k+3, 4}\, \tau_{1i} + \\ \quad + a_{k+3, 5}\, \tau_{2i} + a_{k+3, 6}\, \tau_{3i}; \quad \tau'_{ik} = \tau'_{ki} \quad (i, k = 1, 2, 3), \end{cases}$$

kde a_{rs} $(r, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ značí 36 čísel celých. Považujeme-li M_{ik}, τ'_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ za neznámé v rovnicích (2), máme pro 18 neznámých celkem 21 rovnic. Eliminací neznámých dostaneme 3 podmínečné rovnice mezi a_{rs}, τ_{ik}, jimž lze dáti tvar

[1]) Krazer, Lehrb. d. Thetafunctionen, Kapit. V. Periodou nazývám stručně systém tří čísel v (1) stojících v témž sloupci.

[2]) Krazer, cit, str. 141., věta III.

$$
(3)\begin{cases}
A_{56}(\tau_{11}) + A_{64}(\tau_{12}) + A_{45}(\tau_{13}) + \sum\limits_{i=1}^{3} A_{2,i+3}\,\tau_{3i} - \\
\qquad - \sum\limits_{i=1}^{3} A_{3,i+3}\,\tau_{2i} + A_{23} = 0 \\
A_{56}(\tau_{21}) + A_{64}(\tau_{22}) + A_{45}(\tau_{23}) + \sum\limits_{i=1}^{3} A_{3,i+3}\,\tau_{1i} - \\
\qquad - \sum\limits_{i=1}^{3} A_{1,i+3}\,\tau_{3i} + A_{31} = 0 \\
A_{56}(\tau_{31}) + A_{64}(\tau_{32}) + A_{45}(\tau_{33}) + \sum\limits_{i=1}^{3} A_{1,i+3}\,\tau_{2i} - \\
\qquad - \sum\limits_{i=1}^{3} A_{2,i+3}\,\tau_{1i} + A_{12} = 0,
\end{cases}
$$

kde značí $A_{rs} = \sum\limits_{l=1}^{3} (a_{lr}\,a_{3+l,s} - a_{3+l,r}\,a_{l,s})$, takže $A_{sr} = -A_{rs}$, $A_{rr} = 0$; (τ_{ik}) jest minor adjungovaný elementu τ_{ik} v determinantu $|\tau_{ik}|$, $(i, k = 1, 2, 3)$. Patrně jest $(\tau_{ik}) = (\tau_{ki})$. Rovnice (3) jsou nutnou a postačující podmínkou, aby bylo lze řešiti rovnice (2). Mohou nastati dva případy.

a) Rovnice (3) jsou splněny identicky, t. j. pro každé τ_{ik}. Pak musí a_{rs} splňovati rovnice

$$
(4)\begin{cases}
A_{rs} = \sum\limits_{l=1}^{3} (a_{lr}\,a_{l+3,s} - a_{l+3,r}\,a_{ls}) = \begin{cases} n \text{ při } s = r + 3 \\ 0 \text{ při } s \not\equiv r + 3 \pmod 3 \end{cases} \\
r, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \qquad\qquad r < s.
\end{cases}
$$

Splňují-li *čísla charakteristická* a_{rs} rovnice (4), nazýváme přechod od funkcí (I) k (II) *Hermitovou transformací řádu n* (též *obyčejnou t.*) Abelových funkcí; řád n je celé kladné číslo.

b) Nejsou-li rovnice (3) splněny identicky, nemohou τ_{ik} míti libovolné hodnoty, nýbrž budou vázány právě rovnicemi (3). Tyto rovnice (3) nazýváme *systém singulárních relací* mezi periodami. A. f., jichž periody splňují systém singulárních relací, slují rovněž *funkcemi singulárnými.* [3]) Rovněž transformaci definovanou čísly a_{rs} pak nazveme *singulární.* Relace (3) jsou nutnou podmínkou, aby A. f. měly ještě jiné než Hermitovy transformace; rovněž jsou nutnou podmínkou, aby existovaly *intermediérní funkce*, [4]) jež nejsou thetafunkcemi.

---

[3]) Singulárné A. f. 2 prom. viz Humbert, Journal de Mathématiques, 5. sér., t. 5., 6., 7.; 3 prom. Humbert-Lévy, Comptes rendus, t. 158, p. 1609.

[4]) Poincaré, Amer. Journ. of Mathem. vol. VIII., p. 316.

2. Utvořme nyní pomocí čísel celých b_{rs} lineární ($n = +1$) Hermitovu transformaci $\bar{u}_i = \sum_{k=1}^{3} N_{ik} u_k$

$$(2')\begin{cases} N_{ik} = b_{ki} + \sum_{\varrho=1}^{3} b_{k,\varrho+3}\,\bar{\tau}_{\varrho i} \\ \sum_{\sigma=1}^{3} N_{i\sigma}\,\tau_{k\sigma} = b_{k+3,i} + \sum_{\varrho=1}^{3} b_{k+3,\varrho+3}\,\bar{\tau}_{\varrho i}. \end{cases}$$

Periody $\bar{\tau}_{ik}$ budou vázány rovněž relacemi tvaru (3), jen koeficienty $\bar{A}_{rs} = \sum_{\varrho,\sigma=1}^{6} A_{\varrho\sigma}\, b_{\varrho r}\, b_{\varrho s}$ budou jiné. Tyto relace mezi $\bar{\tau}_{ik}$ dostaneme vyloučením $\bar{M}_{ik}$, τ'_{ik} z rovnic

$$(2'')\begin{cases} \bar{M}_{ik} = \bar{a}_{ki} + \sum_{\varrho=1}^{3} \bar{a}_{k,\varrho+3}\,\tau_{\varrho i} \\ \sum_{\sigma=1}^{3} \bar{M}_{i\sigma}\,\bar{\tau}_{k\sigma} = \bar{a}_{k+3,i} + \sum^{3} \bar{a}_{k+3,\varrho+3}\,\bar{\tau}_{\varrho i} \\ \tau'_{ki} = \tau'_{ik}, \qquad (i, k = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Při tom dle vět o skládání transformací[5]) jest $\bar{a}_{rs} = \sum_{\varrho=1}^{6} a_{r\varrho}\, b_{\varrho s}$, a

$$(5) \qquad \bar{A}_{rs} = \sum_{l=1}^{3} (\bar{a}_{lr}\,\bar{a}_{3+l,s} - \bar{a}_{3+l,r}\,\bar{a}_{ls}) = \sum_{\varrho,\sigma=1}^{6} A_{\varrho\sigma}\, b_{\varrho r}\, b_{\sigma s}.$$

Tím důkaz proveden. Ovšem, mohlo by se namítnouti, že tento důkaz předpokládá, že daná čísla $A_{\varrho\sigma}$ ($\varrho, \sigma = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $A_{\sigma\varrho} = -A_{\varrho\sigma}$, $A_{\sigma\sigma} = 0$) jsou taková, že lze rovnice $A_{\varrho\sigma} = \sum_{l=1}^{3} (a_{l\varrho}\, a_{l+3,\sigma} - a_{l+3,\varrho}\, a_{l\sigma})$ řešiti čísly celými. Snadno se přesvědčíme, že to lze vždy, ať jsou čísla $A_{\varrho\sigma}$ dána jakkoliv, jen když $A_{\varrho\sigma} = -A_{\sigma\varrho}$, $A_{\sigma\sigma} = 0$.

Označme totiž e_1, e_2, e_3 elementární dělitele pseudosymmetrické matice $\| A_{\varrho\sigma} \|$, ($\varrho, \sigma = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) a uvažujme bilineární alternující formu $\sum_{\varrho,\sigma=1}^{6} A_{\varrho\sigma}\, x_\varrho\, y_\sigma$. Pomocí kogredientní unimodulární substituce S o celistvých koefficientech lze ji transformovati na tvar $\sum_{\lambda=1}^{3} e_\lambda\,(x'_\lambda\, y'_{\lambda+3} - x'_{\lambda+3}\, y_\lambda)$.[6]) Buď nyní inversní

[5]) Krazer, cit. str. 143.

[6]) Frobenius, Journal f. Mathem. Bd. 86., str. 146 a násl.

substituce

$$S^{-1}: \quad x'_\lambda = \sum_{\varrho=1}^{6} u_{\lambda\varrho}\, x_\varrho, \qquad y'_\lambda = \sum_{\varrho=1}^{6} u_{\lambda\varrho}\, y_\varrho.$$

Pak tedy vidíme, že bude $A_{\varrho\sigma} = \sum_{\lambda=1}^{3} e_\lambda\, (u_{\lambda\varrho}\, u_{\lambda+3,\sigma} - u_{\lambda+3,\varrho}\, u_{\lambda\sigma})$
Stačí tudíž zvoliti $a_{lr} = e_l \,.\, u_{lr}$, $a_{l+3,r} = u_{l+3,r}$ $(l = 1, 2, 3$, $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, aby bylo $A_{\varrho\sigma} = \sum_{l=1}^{3} (a_{l\varrho}\, a_{l+3,\sigma} - a_{l+3,\varrho}\, a_{l,\sigma})$ jak tvrzeno. Platí tedy vzorec (5) obecně. Zároveň vidíme. je-li dán systém singulárních relací (3) *zcela libovolně*, lze vždy určiti čísla celá a_{rs}. Aby ovšem existovaly A. f. o periodách splňujících daný systém singulárních relací (3), musí koefficienty $A_{\varrho\sigma}$ splňovati jisté podmínky, o nichž později.

Jiný důkaz vzorce (5) podali Humbert-Lévy.[7])

3. Ukáži, že vždy lze zvoliti lineární Hermitovu transformaci $\| b_{rs} \|$ tak, aby v nových singulárních relacích odpadly členy kvadratické, t. j. aby bylo $\overline{A}_{56} = \overline{A}_{64} = \overline{A}_{45} = 0$. K tomu cíli stačí dokonce specielní transformace o $b_{12} = b_{13} = b_{15} = b_{16} = b_{21} = b_{24} = b_{31} = b_{34} = b_{42} = b_{43} = b_{44} = b_{45} = b_{46} = b_{51} = b_{54} = b_{61} = b_{64} = 0$, $b_{14} = +1$, $b_{41} = -1$. Rovnice (4) se pak redukují na

$$
\begin{array}{ll}
(6) & b_{22}\, b_{53} - b_{52}\, b_{23} + b_{32}\, b_{63} - b_{62}\, b_{33} = 0 \\
(7) & b_{22}\, b_{55} - b_{52}\, b_{25} + b_{32}\, b_{65} - b_{62}\, b_{35} = 1 \\
(8) & b_{22}\, b_{56} - b_{52}\, b_{26} + b_{32}\, b_{66} - b_{62}\, b_{36} = 0 \\
(9) & b_{23}\, b_{55} - b_{53}\, b_{25} + b_{33}\, b_{65} - b_{63}\, b_{35} = 0 \\
(10) & b_{23}\, b_{56} - b_{53}\, b_{26} + b_{33}\, b_{66} - b_{63}\, b_{36} = 1 \\
(11) & b_{25}\, b_{56} - b_{55}\, b_{26} + b_{35}\, b_{66} - b_{65}\, b_{36} = 0
\end{array}
$$

Z podmínky $\overline{A}_{56} = \overline{A}_{64} = \overline{A}_{45} = 0$ pak vyjdou rovnice:

$$
\begin{array}{ll}
(12) & \sum_{\varrho\sigma} A_{\varrho\sigma}\, b_{\varrho 5}\, b_{\sigma 6} = 0, \quad (\varrho, \sigma = 2, 3, 5, 6) \\
(13) & A_{12}\, b_{26} + A_{13}\, b_{36} + A_{15}\, b_{56} + A_{16}\, b_{66} = 0 \\
(14) & A_{12}\, b_{25} + A_{13}\, b_{35} + A_{15}\, b_{55} + A_{16}\, b_{65} = 0.
\end{array}
$$

Jedná se o řešení tohoto systému rovnic (6) až (14) čísly celými. Aby rovnice (9) a (10) měly celistvé řešení považujeme-li b_{i3} za neznámé a b_{i5} a b_{i6} $(i = 2, 3, 5, 6)$ za známé, musí čísla

[7]) Comptes rendus, t. 158., p. 1609 a násl.

$b_{26}, b_{36}, b_{56}, b_{66}$ býti nesoudělná; stejně aby rovnice (7) a (8) měly celistvé řešení, musí čísla b_{25}, b_{35}, b_{55} b_{65} býti nesoudělná. Konečně musí v obou případech matice

$$(\mathfrak{M}_1) \quad \begin{Vmatrix} b_{25} & b_{35} & b_{55} & b_{65} \\ b_{26} & b_{36} & b_{56} & b_{66} \end{Vmatrix}$$

býti hodnosti 2 a primární.[8])

4. Řešení provedu v etapách. Nejprve ustanovím takové řešení rovnic (11), (12), (13), (14) čísly celými, aby matice $(\mathfrak{M}_1)$ byla hodnosti 2 a primární. Vzhledem k rovnicím (13) a (14) můžeme říci, že b_{k5}, b_{k6} $(k = 2, 3, 5, 6)$ budou řešeními rovnice

$$A_{12}\, x + A_{13}\, y + A_{15}\, z + A_{16}\, t = 0. \tag{15}$$

Jsou-li tedy

$$(\mathfrak{M}_2) \quad \begin{Vmatrix} \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{15} & \beta_{16} \\ \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{25} & \beta_{26} \\ \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{35} & \beta_{36} \end{Vmatrix}$$

fundamentální řešení rovnice (15) (*Sm.* art. 4), lze psáti

$$\left.\begin{cases} b_{k5} = u_1\, \beta_{1k} + u_2\, \beta_{2k} + u_3\, \beta_{3k} \\ b_{k6} = v_1\, \beta_{1k} + v_2\, \beta_{2k} + v_3\, \beta_{3k} \end{cases}\right\} (k = 2, 3, 5, 6). \tag{16}$$

Tvrdím nyní, že nutnou a postačující podmínkou aby matice $(\mathfrak{M}_1)$ byla hodnosti 2 a primární jest, aby matice

$$(\mathfrak{M}_3) \quad \begin{Vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{Vmatrix}$$

byla hodnosti 2 a primární. Označíme-li totiž $(u_i\, v_k) = u_i\, v_k -$ $- u_k\, v_i$, $(\beta_{ir}\, \beta_{ks}) = \beta_{ir}\, \beta_{ks} - \beta_{is}\, \beta_{kr}$, $(b_{r5}\, b_{s6}) = b_{r5}\, b_{s6} - b_{r6}\, b_{s5}$) bude

$$\begin{cases} (b_{r5}\, b_{s6}) = (u_1\, v_2)(\beta_{1r}\, \beta_{2s}) + (u_1\, v_3)(\beta_{1r}\, \beta_{3s}) + (u_2\, v_3)(\beta_{2r}\, \beta_{3s}) \\ r, s = 2, 3, 5, 6, \qquad r < s. \end{cases} \tag{17}$$

Označme dále matici $\|(\beta_{ir}\, \beta_{ks})\|$, $(i, k = 1, 2, 3,\ i < k;\ r, s =$ $= 2, 3, 5, 6,\ r < s)$ krátce $(\mathfrak{B})$, a matici, jež z $(\mathfrak{B})$ vznikne přidaním sloupce $(b_{r5}\, b_{s6})$, $(r, s = 2, 3, 5, 6,\ r < s)$, označme $(\mathfrak{B}_1)$.

---

[8]) M. primární = prime matrix u J. St. Smitha, On systems of linear indeterminate equations and congruences, Coll. Math. Papers vol. 1., p. 367 a násl. Toto pojednání budu citovati strnčně značkou (*Sm*).

Matice $(\mathfrak{B})$ jest typu 6×3 (*Sm.* art. 1), $(\mathfrak{B}_1)$ typu 6×4 a obě jsou hodnosti 3. Neboť považujeme-li v rovnicích (17) $(u_1\, v_2)$, $(u_1\, v_3)$, $(u_2\, v_3)$ za neznámé veličiny, víme že tyto rovnice jsou řešitelny, takže hodnost jejich matice $(\mathfrak{B}_1)$ jest nejvýš 3. Ale mezi determinanty třetího řádu utvořenými z elementů matic $(\mathfrak{B})$ a $(\mathfrak{B}_1)$ nacházejí se čtverce všech čtyř determinantů matice $(\mathfrak{M}_2)$, které nejsou všechny čtyři rovny nule. Na př.

$$\begin{vmatrix} (\beta_{12}\, \beta_{13}) & (\beta_{12}\, \beta_{33}) & (\beta_{22}\, \beta_{33}) \\ (\beta_{12}\, \beta_{25}) & (\beta_{12}\, \beta_{35}) & (\beta_{22}\, \beta_{35}) \\ (\beta_{13}\, \beta_{25}) & (\beta_{13}\, \beta_{35}) & (\beta_{23}\, \beta_{35}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_{35} & \beta_{25} & \beta_{15} \\ \beta_{33} & \beta_{23} & \beta_{13} \\ \beta_{32} & \beta_{22} & \beta_{12} \end{vmatrix}^2$$

Usuzujeme tedy, že matice $(\mathfrak{B})$ a $(\mathfrak{B}_1)$ jsou hodnosti 3. Mimo to *matice* $(\mathfrak{B})$ *je primarní,* poněvadž čtverce determinantů matice $(\mathfrak{M}_2)$ jsou čísla nesoudělná, jelikož $(\mathfrak{M}_2)$ je maticí fundamentálních řešení rovnice (15).

Z rovnic (17) usuzujeme: Je-li $(\mathfrak{M}_3)$ hodnosti menší než 2, jest i hodnost $(\mathfrak{M}_1)$ menší než 2 a naopak. Neboť je li $(b_{r5}\, b_{s6}) = 0$, $(r,\ s = 2, 3, 5, 6,\ r < s)$ tu jediným řešením rovnic (17) jest $(u_1\, v_2) = (u_1\, v_3) = (u_2\, v_3) = 0$, jelikož matice $(\mathfrak{B})$ je hodnosti 3. Tedy *nutná a postačující podmínka, aby* $(\mathfrak{M}_1)$ *byla hodnosti 2 jest, aby* $(\mathfrak{M}_3)$ *byla hodnosti 2*

Je-li nyní d *největším dělitelem* matice $(\mathfrak{M}_1)$ (greatest divisor u *Sm.* art. 1.), máme

$$(17') \begin{cases} \dfrac{(b_{r5}\, b_{s6})}{d} = \dfrac{(u_1\, v_2)}{d} \cdot (\beta_{1r} \beta_{2s}) + \dfrac{(u_1\, v_3)}{d} \cdot (\beta_{1r}\, \beta_{3s}) + \\ \qquad + \dfrac{(u_2\, v_3)}{d} \cdot (\beta_{2r} \beta_{3s}) \\ r,\ s = 2, 3, 5, 6, \qquad r < s. \end{cases}$$

Považujme $\dfrac{(u_1 v_2)}{d}$, $\dfrac{(u_1 v_3)}{d}$, $\dfrac{(u_2\, v_3)}{d}$ za neznámé. Pak pro tyto neznámé máme redundantní systém 6 rovnic o celistvých koeficientech, primární matici $(\mathfrak{B})$ hodnosti 3 a doplněné matici (augmented m. *Sm.* art. 1) $(\mathfrak{B}_1)$ hodnosti 3. Takový systém má jediné řešení a to sestává vesměs z čísel celých (*Sm.* art. 2). Tedy $(u_1\, v_2)$, $(u_1\, v_3)$, $(u_2\, v_3)$ jsou vesměs dělitelna d. Tudíž ***nutnou a postačující podmínkou, aby*** $(\mathfrak{M}_1)$ ***byla primární jest, aby*** $(\mathfrak{M}_3)$ ***byla primární.***

Dosaďme hodnoty (16) do rovnic (11) a (12). Dostaneme dvě rovnice tvaru

$$B_{12}(u_1 v_2) + B_{13}(u_1 v_3) + B_{23}(u_2 v_3) = 0$$
$$C_{12}(u_1 v_2) + C_{13}(u_1 v_3) + C_{23}(u_2 v_3) = 0,$$

kde značí

$$\left.\begin{array}{l} B_{ik} = (\beta_{i2}\beta_{k5}) + (\beta_{i3}\beta_{k6}) \\ C_{ik} = \sum_{\varrho\sigma} A_{\varrho\sigma}\beta_{i\varrho}\beta_{k\sigma}, \ (\varrho, \sigma = 2, 3, 5, 6) \end{array}\right\} (i, k = 1, 2, 3).$$

Buď $X = U_3$, $Y = U_2$, $Z = U_1$ takové řešení rovnic

(11′) $$B_{12}X + B_{13}Y + B_{23}Z = 0$$

(12′) $$C_{12}X + C_{13}Y + C_{23}Z = 0$$

čísly celými, že U_1, U_2, U_3 jsou čísla *bez společné míry*. Takové řešení vždy existuje. Máme pak vlastně za úlohu najíti elementy matice $(\mathfrak{M}_3)$, známe-li hodnoty všech tří jejích determinantů: $(u_1 v_2) = U_3$, $(u_1 v_3) = U_2$, $(u_2 v_3) = U_1$. (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) pak jsou dvě neodvislá řešení rovnice (*Sm.* art. 8).

(18) $$U_1 x - U_2 y + U_3 z = 0.$$

A protože $(\mathfrak{M}_3)$ má býti primární, musí (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3), býti fundamentální řešení rovnic (18).

Tudíž řešení rovnic (11), (12), (13), (14) celými čísly takové, aby matice $(\mathfrak{M}_1)$ byla hodnosti 2 a primární obdržíme následovně: Najdeme fundamentální řešení $(\mathfrak{M}_2)$ rovnice (15), utvoříme čísla B_{ik}, C_{ik} a najdeme takové řešení U_3, U_2, U_1 rovnic (11′), (12′) čísly celými, aby tato čísla byla nesoudělná. Pak matice $(\mathfrak{M}_3)$ bude fundamentálním řešením rovnice (18). Pomocí vzorců (16) pak najdu elementy matice $(\mathfrak{M}_1)$.

5. Když jsme určili b_{k5}, b_{k6} $(k = 2, 3, 5, 6)$ tak, aby byla matice $(\mathfrak{M}_1)$ hodnosti 2 a primární, lze z rovnic (9) a (10) ustanoviti celá čísla b_{23}, b_{33}, b_{53}, b_{63}, neboť pak jsou splněny nutné a postačující podmínky, aby rovnice (9) a (10) měly řešení čísly celými (*Sm.* art. 11). Tvrdím dále: Je-li matice $(\mathfrak{M}_1)$ hodnosti 2 a primární a b_{23}, b_{33}, b_{53}, b_{63} *libovolné* řešení čísly celými rovnic (9) a (10), pak matice

$$(\mathfrak{M}_4) \left\| \begin{array}{cccc} b_{23} & b_{33} & b_{53} & b_{63} \\ b_{25} & b_{35} & b_{55} & b_{65} \\ b_{26} & b_{36} & b_{56} & b_{66} \end{array} \right\|$$

jest hodnosti 3 a rovněž primární. Neboť platí vztahy:

$$b_{26}\begin{vmatrix} b_{23} & b_{33} & b_{53} \\ b_{25} & b_{35} & b_{55} \\ b_{26} & b_{36} & b_{56} \end{vmatrix} + b_{36}\begin{vmatrix} b_{23} & b_{33} & b_{63} \\ b_{25} & b_{35} & b_{65} \\ b_{26} & b_{36} & b_{66} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b_{23} & b_{33} & b_{26}\, b_{53} + b_{36}\, b_{63} \\ b_{25} & b_{35} & b_{26}\, b_{55} + b_{36}\, b_{65} \\ b_{26} & b_{36} & b_{26}\, b_{56} + b_{36}\, b_{66} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{23} & b_{33} & b_{23}\, b_{56} + b_{33}\, b_{66} - 1 \\ b_{25} & b_{35} & b_{25}\, b_{56} + b_{35}\, b_{66} \\ b_{26} & b_{36} & b_{26}\, b_{56} + b_{36}\, b_{66} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b_{23}\, b_{33} & -1 \\ b_{25}\, b_{35} & 0 \\ b_{26}\, b_{36} & 0 \end{vmatrix} = -(b_{25}\, b_{36} - b_{26}\, b_{35}). \text{ Atd.}$$

Těchto vztahů jest celkem $\binom{4}{2} = 6$, a ukazují jednak, že hodnost matice $(\mathfrak{M}_4)$ je 3 (kdyby byla menší, musely by všecky determinanty matice $(\mathfrak{M}_1)$ býti rovny nule, což nejsou), jednak že matice $(\mathfrak{M}_4)$ jest primární (neboť její největší dělitel by musil děliti všecky determinanty matice $(\mathfrak{M}_1)$, ale ty nemají společné míry). Tím důkaz proveden.

Jelikož matice $(\mathfrak{M}_4)$ jest hodnosti 3 a primární, lze rovnice (6), (7), (8) řešiti čísly celými, považujeme-li b_{22}, b_{32}, b_{52}, b_{62} za neznámé. Tím jsme provedli řešení rovnic (6) až (14) čísly celými. Zvolme ještě zcela libovolně celé číslo b_{11}. Tím známe všecka čísla b_{rs}. Po lineární Hermitově transformaci definované těmito čísly přejde daný systém singulárních relací (3) v systém singulárních relací, v němž budou scházeti členy kvadratické.

6. Hledejme invarianty systému singulárních relací (3) vzhledem k lineární Hermitově transformaci definované maticí čísel celých $\| a_{rs} \|$, $(r, s = 1, 2, 3. 4, 5, 6)$, jejíž elementy hoví rovnicím (4′)

$$(4')\begin{cases} \sum_{l=1}^{3}(a_{lr}\, a_{l+3,\, s} - a_{l+3,\, r}\, a_{l,\, s}) = \begin{cases} 1 \text{ při } s = r + 3 \\ 0 \text{ při } s \mathrel{\overline{|}} r \end{cases} \pmod 3 \\ r, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6; \qquad r < s. \end{cases}$$

Mějme bilineární alternující formy $F(x, y \mid A) = \sum_{r, s=1}^{6} A_{rs}\, x_r\, y_s$ a $\Phi(x, y) = x_1\, y_4 - x_4\, y_1 + x_2\, y_5 - x_5\, y_2 + x_3\, y_1 - x_6\, y_3 =$

$= \sum_{r,s=1}^{6} \alpha_{rs}\, x_r\, y_s$, takže

$$\alpha_{rs} = -\alpha_{sr} = \begin{cases} 1 \text{ při } s = r + 3 \\ 0 \text{ při } s \not\equiv r \pmod 3 \end{cases} r < s,$$

a uvažujme homografickou unimodulární kogredientní transformaci (S) těchto forem, definovanou rovnicemi

$$(19) \qquad (S) \qquad x_r = \sum_{i=1}^{6} a_{ri}\, \bar{x}_i, \qquad y_s = \sum_{k=1}^{6} a_{sk}\, \bar{y}_k.$$

Touto transformací přejde forma Φ sama v sebe, $\Phi(x, y) = \Phi(\bar{x}, \bar{y})$,[9]) kdežto forma $F(x, y \mid A)$ přejde v $F(\bar{x}, \bar{y} \mid \bar{A}) = \sum_{i,k=1}^{6} \bar{A}_{ik}\, \bar{x}_i\, \bar{y}_k$, kde $\bar{A}_{ik} = \sum_{r,s=1}^{6} A_{rs}\, a_{ri}\, a_{sk}$ jsou koefficienty transformovaného systému singulárních relací. Proto formu $F(x, y \mid A)$, která jest invariantně spiata se systémem singulárních relací (3), můžeme nazvati bilineárním kovariantem systému singulárních relací (3).

Naopak každá homografická kongredientní transformace o celistvých koefficientech formy $\Phi(x, y)$ samy v sebe splňuje rovnice (4') a definuje tedy Hermitovu lineární transformaci A. f. Všecky transformace formy $\Phi(x, y)$ v samu sebe tvoří grupu. Hledejme tedy nejprve invarianty formy $F(x, y \mid A)$ vzhledem k transformacím této grupy.

Uvažujme svazek forem

$$(20) \qquad F(x, y \mid A) + \lambda \,.\, \Phi(x, y).$$

Označme si $P(\lambda)$ pfaffian o 6 indexech utvořený z elementů matice svazku forem (20). Jest

$$P(\lambda) = K + L \,.\, \lambda - M\lambda^2 - \lambda^3,$$

kde

$$(21) \begin{cases} K = (123456) \\ L = (1245) + (1346) + (2356) \\ M = (14) + (25) + (36) = A_{14} + A_{25} + A_{36}. \end{cases}$$

Při tom značí $(i_1 i_2 \ldots i_{2\nu})$ pfaffian o 2ν indexech utvořený z elementů matice $\| A_{rs} \|$, $(r, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.[10])

---

[9]) Frobenius, Zur Theorie der Transformation der Thetafunktionen. Journ. f. Math. Bd. 89., str. 40—46.

[10]) Tvoření pfaffianů viz G. Kowalewski, Einf. in die Determinantentheorie, 9. Kapit. nebo E. v. Weber, Vorles. ü. das Pfaff'sche Problem, I. Kapit.

Podrobme nyní svazek forem (20) transformaci (S). Tím svazek (20) se přemění v

$$\text{20}') \qquad F(\bar{x}, \bar{y} \mid \bar{A}) + \lambda \,.\, \Phi(\bar{x}, \bar{y}).$$

Jelikož transformace (S), jsouc unimodulární, nemění hodnoty pfaffianu svazku (20) bude

$$(21) \quad K + L \,.\, \lambda - M\lambda^2 - \lambda^3 = \bar{K} + \bar{L}\lambda - \bar{M}\lambda^2 - \lambda^3,$$

když $\bar{K}$, $\bar{L}$, $\bar{M}$ značí výrazy utvořené z elementů matice $\| \bar{A}_{rs} \|$, $(r, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ právě tak jako jsou utvořeny K, L, M z elementů matice $\| A_{rs} \|$, $(r, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Rovnice (21) platí pro každé λ, takže jest

$$(22) \qquad \bar{K} = K, \ \bar{L} = L, \ \bar{M} = M$$

a tedy K, L, M jsou hledané invarianty formy $F(x, y \mid A)$ vzhledem k lineárním Hermitovým transformacím.

Ovšem K, L, M ještě nejsou invarianty systému singulárních relací (3). Neboť utvořím li k bilineárnímu kovariantu $\sum_{r,s=1}^{6} (A_{r,s} + \sigma \,.\, \alpha_{r,s})\, x_r y_s$, kde σ jest jakékoliv číslo, příslušný systém singulárních relací, dostanu týž systém jako z bilineárního kovariantu $\sum_{r,s=1}^{6} A_{r,s} x_r y_s$; A_{14}, A_{25}, A_{36} totiž vystupují v (3) pouze ve spojeních $(A_{25} - A_{36})$, $(A_{36} - A_{14})$, $(A_{14} - A_{25})$. Píši-li do K, L, M tudíž $A_{rs} + \sigma \,.\, \alpha_{rs}$ místo A_{rs} a označím tyto nové veličiny K', L', M', seznám že jest

$$K' = P(\sigma), \qquad L' = \frac{dP(\sigma)}{d\sigma}, \qquad M' = -\frac{1}{2}\frac{d^2P(\sigma)}{d\sigma^2},$$

takže K, L, M nejsou funkcemi koeficientů systému singulárních relací (3).

Víme však, že jest identicky (pro každé σ)

$$3L' + M'^2 = 3L + M^2$$
$$27K' - 9M'L' - 2M'^3 = 27K - 9ML - 2M^3,$$

takže můžeme říci, že

$$(23) \begin{cases} I = 3L + M^2 \\ J = 27K - 9LM - 2M^3 \end{cases}$$

jsou funkcemi koeficientů singulárních relací (3) a tedy invarianty tohoto systému relací vzhledem k lineárním Hermitovým transformacím.

Humbert a Lévy v Comptes rendus t. 158, str. 1609 a násl. přicházejí k těmto invariantům, když do $P(\lambda)$ zavedou novou proměnnou rovnicí $\lambda = \mu - \frac{M}{3}$. Pak totiž jest $P(\lambda) = \frac{J}{27} + \frac{I}{3}\mu - \mu^3$. Tudíž diskriminant mnohočlenu $P(\lambda)$ jest

$$\varDelta = -\frac{1}{27}(J^2 - 4I^3) =$$
$$= M^2L^2 + 18MLK + 4L^3 + M^3K - 27K^2.$$ [11])

7. Odvoďme větu: *Rovnice* $P(x) = 0$ *má vesměs reálné kořeny, takže* $\varDelta$ *jest essencielně kladné nebo nula.* Odtud pak plyne $I \geqq \left(\frac{J}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \geqq 0$. Jelikož pak platí věta: *Je-li* $\varDelta = 0$, *musí* $I \neq 0$ *mají-li existovati A. f., jichž periody splňují systém singulárních relací* (3), [12]) vidíme, že jest vždy I *essencielně kladné, od nuly různé.*

Předpokládejme, že jsme nejprve odstranili pomocí lineární Hermitovy transformace v systému singulárních relací (3) kvadratické členy, jak bylo vyloženo v odst. 3 až 5. Seznáme, že pak jest

$$(24) \qquad P(x) = -\begin{vmatrix} A_{14} + x & A_{15} & A_{16} \\ A_{24} & A_{25} + x & A_{26} \\ A_{34} & A_{35} & A_{36} + x \end{vmatrix}.$$

Rozložme si periody τ_{hk} v reelní a imaginární části

$$\tau_{hk} = \tau''_{hk} + i \,.\, \tau'_{hk}. \qquad (h, k = 1, 2, 3).$$

Klademe-li v *Krazer, Lehrb. d. Thetafunktionen,* str. 124., věta (VIII) $p = 3$, $e_1 = e_2 = e_3 = 1$, dále místo u_1, u_2, u_3 píšeme $\pi i u_1$, $\pi i u_2$, $\pi i u_3$, bude $\pi i \tau_{hk} = a_{hk}$, $r_{hk} = -\pi \tau'_{hk}$; bude tedy *nutnou* podmínkou pro existenci A. f. o periodách τ_{hk}, aby forma $\sum_{hk=1}^{3} \tau_{hk} x_h x_k$ byla *definitní positivní*. K tomu je zase nutno

---

[11]) H. Weber, Lehrb. d. Algebra. Bd. I. § 52. a 68.

[12]) Větu tuto zde pouze sděluji bez důkazu pro nedostatek místa. Důkaz podám až to dovolí tiskové poměry.

a stačí, aby čísla

$$\tau'_{11}, \qquad (\tau'_{33}) = \begin{vmatrix} \tau'_{11} & \tau'_{21} \\ \tau'_{12} & \tau'_{22} \end{vmatrix}, \qquad \delta' = \begin{vmatrix} \tau'_{11} & \tau'_{21} & \tau'_{31} \\ \tau'_{12} & \tau'_{22} & \tau'_{32} \\ \tau'_{13} & \tau'_{23} & \tau'_{33} \end{vmatrix}$$

byla vesměs kladná [13]) (a tedy od nuly různá).

Z rovnic (3) shledáme, že *imaginární* části period splňují rovnice

$$(25) \quad \begin{cases} \sum\limits_{h=1}^{3} A_{2,h+3}\,\tau'_{3h} = \sum\limits_{h=1}^{3} A_{3,h+3}\,\tau'_{2h} \\ \sum\limits_{h=1}^{3} A_{3,h+3}\,\tau'_{1h} = \sum\limits_{h=1}^{3} A_{1,h+3}\,\tau'_{3h} \\ \sum\limits_{h=1}^{3} A_{1,h+3}\,\tau'_{2h} = \sum\limits_{h=1}^{3} A_{3,h+3}\,\tau'_{1h} \end{cases}$$

Označíme-li si tedy

$$B_{ik} = \sum_{h=1}^{3} A_{i,h+3}\,\tau'_{kh}$$

soudíme z rovnice (25), že jest

$$(26) \qquad B_{ik} = B_{ki} \qquad (i,\ k = 1, 2, 3).$$

Znásobme obě strany rovnice (24) determinantem $\delta' = |\,\tau'_{ik}\,|$, $(i, k = 1, 2, 3)$. Dostaneme

$$(27)\ \delta'.P(x) = - \begin{vmatrix} B_{11} + x.\tau'_{11}, & B_{12} + x.\tau'_{21}, & B_{13} + x.\tau'_{31} \\ B_{21} + x.\tau'_{12}, & B_{22} + x.\tau'_{22}, & B_{23} + x.\tau'_{32} \\ B_{31} + x.\tau'_{13}, & B_{32} + x.\tau'_{23}, & B_3{}^3 + x.\tau'_{33} \end{vmatrix}.$$

Vzhledem k rovnicím (26) a $\tau'_{ik} = \tau'_{ki}$ soudíme, že determinant ve vzorci (27) jest *symmetrický*. Jeho elementy jsou vesměs *reální*. V následujícím provedu s ním pouze takové operace, jimiž se *neporuší jeho symmetričnost a realita jeho elementů*.

Z prvého sloupce a řádku vytkněme $\sqrt{\tau'_{11}}$, což vzhledem k $\tau'_{11} > 0$ jest číslo reální Pak odečteme $\frac{\tau'_{12}}{\sqrt{\tau'_{11}}}$ násobný prvý prvý řádek od druhého a $\frac{\tau'_{13}}{\sqrt{\tau'_{11}}}$ násobný prvý řádek od třetího; dále $\frac{\tau'_{21}}{\sqrt{\tau'_{11}}}$ násobný prvý sloupec od druhého a $\frac{\tau'_{31}}{\sqrt{\tau'_{11}}}$ násobný

[13]) Snadno to vyplyne z úvahy podobné jako v Krazer, cit. str. 13.

prvý sloupec od třetího. Tím rovnice (27) nabyde tvaru

$$\delta' P(x) = -\tau'_{11} \begin{vmatrix} C_{11} + x & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} + x\frac{(\tau'_{33})}{\tau'_{11}} & C_{23} - x\frac{(\tau'_{23})}{\tau'_{11}} \\ C_{31} & C_{32} - x\frac{(\tau'_{32})}{\tau'_{11}} & C_{33} + x\frac{(\tau'_{22})}{\tau'_{11}} \end{vmatrix},$$

kde C_{ik} jsou reelní čísla a $C_{ki} = C_{ik}$. $(\tau'_{ik}) = (\tau'_{ki})$ pak značí minor adjungovaný elementu τ'_{ik} v determinantu δ'.

S tímto determinantem proveďme podobnou transformaci. Z druhého sloupce a řádku vytkněme $\sqrt{\frac{(\tau'_{33})}{\tau'_{11}}}$, což jest opět reelní číslo. Pak přičtěme $\frac{(\tau'_{23})}{\tau'_{11}}\sqrt{\frac{\tau'_{11}}{(\tau'_{33})}}$ násobný druhý sloupec k třetímu a $\frac{(\tau'_{32})}{\tau'_{11}}\sqrt{\frac{\tau'_{11}}{(\tau'_{33})}}$ násobný druhý řádek k třetímu. Vzhledem ke vztahu

$$\frac{(\tau'_{22})(\tau'_{33}) - (\tau'_{23})(\tau'_{32})}{\tau'_{11}(\tau'_{33})} = \frac{\delta}{(\tau'_{33})}$$

jest

$$(27') \quad \delta' . P(x) = -(\tau'_{33}) \begin{vmatrix} D_{11} + x & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} + x & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} + x\frac{\delta}{(\tau'_{33})} \end{vmatrix},$$

kde D_{ik} jsou reelní čísla a $D_{ki} = D_{ik}$. Vytknu-li ještě z posledního řádku a sloupce reelní číslo $\sqrt{\frac{\delta}{(\tau'_{33})}}$ a obě strany rovnice (27') krátím δ', mám $P(x)$ napsánu ve tvaru saekulární rovnice Z toho usuzuji, že *všecky kořeny rovnice $P(x) = 0$ jsou reelní*[14]. *a tedy její diskriminant $\Delta > 0$.*

8. Odvodím ještě stručně jak se změní invarianty K, L, M formy $F(x, y \mid A)$ a I, J systému singulárních relací, podrobím-li A. f. Hermitově transformaci řádu n. Tato transformace přeměňuje formu $\Phi(x, y)$ v $n . \Phi(\bar{x}, \bar{y})$.[15]) Označím-li jako dříve $\bar{A}_{rs}$ koeficienty transformovaného systému singulárních relací,

[14]) Kowalewski, Einf. in die Determinantentheorie, §§ 53. a 54.

[15]) Frobenius, Journ. f. Math. Bd. 89., str. 40—46.

změní tato transformace formu $F(x, y \mid A)$ ve formu $F(\bar{x}, \bar{y} \mid \bar{A})$, takže svazek forem

(28) $$F(x, y \mid A) + \lambda \,.\, \Phi(x, y)$$

přejde touto transformací ve svazek

(28') $$F(\bar{x}, \bar{y} \mid \bar{A}) + \lambda \,.\, n\Phi(\bar{x}, \bar{y}).$$

Mezi paffiany svazků (28) a (28') pak platí rovnice

$$\bar{K} + \bar{L}\lambda n - \bar{M}\lambda^2 n^2 - \lambda^3 n^3 = n^3 (K + L\lambda - M\lambda^2 - \lambda^3),$$

kde činitel n^3 na pravé straně je substituční determinant. Z této rovnice soudíme, že

$$\bar{K} = n^3 K, \qquad \bar{L} = n^2 L, \qquad \bar{M} = n \,.\, M.$$

Jest tedy dále

$$\bar{I} = n^2 I, \qquad \bar{J} = n^3 J, \qquad \bar{\Delta} = n^6 \Delta.$$

* * *

Pro nedostatek místa bylo nutno důkazy pouze co nejstručněji naznačiti. Doufám, že tím netrpěla srozumitelnost. Další výsledky, k nimž jsem dospěl v theorii singulárních A. f. sdělím, až to dovolí tiskové poměry.

V Praze, v dubnu 1918.

Konstrukce středu křivosti křivky jistou kvadratickou transformací z dané křivky odvozené.

Dr. Ant. Pleskot, professor v Plzni.

Pohybuje li se proměnlivý trojúhelník o vrcholech A, B, C tak, že vrcholy A a B sunou se po křivkách (A) a (B), strana AB obaluje křivku (C_1), strany BC a AC křivky (A_1) a (B_1), pak z geometrie kinematické známo, kterak sestrojí se normála a střed zakřivení křivky (C), kterou opisuje zbývající vrchol C.

Řešení úlohy této pocházející od Mannheima jest sice obecné, avšak v obecném případě dosti komplikované.

V následujícím chceme uvésti jednoduché řešení bez úvah kinematických a sice pro ten zvláštní případ, kdy křivky