Bedřich Procházka

Poznámka ku klinogonálnému průmětu ploch rotačních

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 2, 129--137

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121101

Poznámka ku klinogonálnému průmětu ploch rotačních.

Napsal prof. **Bedřich Procházka.**

1. Pan *dvorní rada professor Karel Pelz* uvádí ve svém zajímavém pojednání: „*Zur klinogonalen Darstellung der Rotationsflächen*“ *) jednoduchý způsob, jakým nejvhodněji lze sestrojovati *obrysy klinogonálních průmětů ploch rotačních*.

K tomu cíli pokládá plochu rotační za plochu obalovou ploch kuželových, které se jí dle parallelních kružnic dotýkají, a sestrojuje jednotlivé body obrysové křivky jakožto průsečíky polár P... průmětů vrcholů s... jednotlivých dotyčných ploch kuželových vzhledem ku klinogonálným průmětům příslušných parallelních kružnic (K)...

Tato konstrukce má před jinými tu hlavní výhodu, že jí lze užíti i v tom nejobecnějším případě, kdy osa rotační plochy jest k průmětně nakloněna a průmět libovolného meridiánu plochy dán.

V odstavci 6. nahoře uvedeného pojednání přihlíží se však i k onomu zvláštnímu případu, kdy osa rotační plochy jest rovnoběžna s průmětem, nebo, — což arci jest nejjednodušší, — kdy osa v průmětně leží, a vedle toho průmět hlavního meridiánu M dán.

Za těchto podmínek uvádí pan *prof. Pelz* následní konstrukce **):

„Budiž aa_1 v průmětně ležící průměr libovolné kružnice parallelní (K) plochy rotační a s vrchol kužele dle kružnice této se dotýkajícího. Úsečka bb_1 jest klinogonálný průmět průměru (b)

*) »*Zprávy o zasedání Královské české společnosti nauk v Praze*«, ročník 1895, II. třída, čís. VII.

**) Tamtéž, strana 9.

(b_1) kružnice (K) ku průměru aa_1 kolmo stojícího, a tudíž bm orthogonálný obraz klinogonálně promítajícího paprsku (b) b, značí-li m střed kružnice (K). Abychom průsečík α průměru aa_1 s hledanou polárou P bodu s vzhledem ku K sestrojili, vedeme $a\delta \parallel bb_1$ a $\delta\alpha \parallel as$. kde δ značí bod, v němž $a\delta$ osu rotace $\varDelta \equiv sm$ protíná *). Pro sestrojení bodu α lze však ještě jiné jednodušší konstrukce použíti. Jelikož se výšky ao, δo a αo trojúhelníka $a\delta\alpha$ v jediném bodě o protínati musí, jest $\alpha o \perp a\delta$. Obdržíme tedy také bod α, vztyčíme-li v bodu a kolmici k as a z jejího průsečného bodu o s osou $\varDelta$ spustíme kolmici $o\alpha$ ku přímce mb. *Tuto konstrukci lze také názorem prostorovým odůvodniti pomocí plochy kulové, vepsané ploše rotační dle kružnice* (K). ***Bod** o **jest středem,*** $o\alpha$ ***stopou a*** (P) ***půdorysnou stopou roviny*** $(\varkappa)$ ***meze vlastního stínu této plochy kulové pro*** (b) b ***jakožto světelný paprsek.*** Vedeme-li průmětem půdorysným b' bodu b rovnoběžku k a_1b, až bb_1 v bodě g protíná, potom jest $ag \parallel KP$ **). Tím jest stanovena polára P jakož i její involuce polárně sdružených bodů vzhledem k ellipse K a to středem n, v němž osa $\varDelta$ poláru P protíná, a sdruženým párem bodů I a II, jež přímky as a rovnoběžka ku bb_1 bodem a vedená v poláře P vytínají. Průsečíky pp_1 poláry s křivkou K jakožto dvojné body této řady involuční obdržíme. učiníme-li $\mathrm{I}\lambda = n\mathrm{II}$, a opíšeme-li touto délkou z bodů λ a II oblouky kruhové; a je-li jeden z jejich průsečíků bod ψ, potom jest $n\psi = np = np_1$, a spojnice bodu s s body p a p_1 tečnami obrysové křivky plochy rotační v těchto bodech."

2. Můžeme tedy, jak z uvedeného patrno, pokládati poláru P za klinogonálný průmět půdorysné stopy roviny $(\varkappa)$ meze vlastního stínu plochy kulové do plochy rotační dle kružnice (K) vepsané.

A tohoto způsobu sestrojení poláry P použijeme, abychom sestrojili *geometrii infinitesimální* střed křivosti obrysové křivky O klinogonálního průmětu plochy rotační v bodě p, jehož tečnou jest přímka sp.

Za tím účelem předpokládejme, že se bod a v tečně $T_a \equiv as$ hlavního meridiánu M nekonečně málo pošine.

---

*) Dle konstrukce odůvodněné na straně 4. téhož pojednání.

**) Odůvodnění tamtéž na str. 5. ve článku 4. β.

S tímto pošinutím souvisí i pošinutí všech na bodu a závislých útvarů, t. j. otočení normály $\overline{ao}$ kol středu křivosti s_M křivky M v bodu a, pošinutí středu o plochy kulové dle křivky K ploše rotační vepsané a tím i roviny (x) meze stínu vlastního této plochy. Současně s bodem a se nekonečně pošine rovina (π) křivky (K) a protne se s rovinou pošinutou $(\varkappa)$ v přímce, která bude pošinutou stopou půdorysnou (P) a její klinogonálný průmět pošinutou polárou P. Pošinutím poláry stanoveno pošinutí bodu p v tečně $Tp \equiv ps$ obrysu plochy rotační.

S pohybem bodu a v hlavním meridiánu M děje se však současně nekonečně malé pootočení tečny $Ta \equiv as$ meridiánu tohoto kolem bodu a, s kterým souvisí nekonečně malé pošinutí vrcholu s plochy kuželové v ose rotační $\varDelta$ a tudíž i nekonečně malé otočení tečny $Tp \equiv ps$ obrysu plochy rotační kol bodu p.

Oběma současnými pohyby: pošinutím bodu p v tečně ps a otočením tečny ps kol tohoto bodu dán jest střed křivosti křivky obrysové, který na tomto základě následovně sestrojíme:

Zvolme na tečně as křivky M bod ^1a jakožto *charakteristiku* *), vyjadřující pošinutí nekonečně malé čili *fási* příslušného bodu a.

Úsečka $\overline{o^1o} \perp as_M$ a omezená přímkou $s_M{}^1a$ jest charakteristickou pro fási bodu o při otáčení normály $N_a \equiv ao$, jejíž fáse vyznačena jest přímkou $^1N_a \equiv s_M{}^1a$. Charakteristiku příslušící témuž bodu o jakožto středu plochy kulové vepsané do plochy rotační dle kružnice (K), tedy jakožto průsečíku normály ao s osou rotace $\varDelta$, obdržíme v úsečce $\overline{o^2o}$, již přímka $^1o^2o \parallel as_M$ v této ose vymezuje. Rovina $(^1\varkappa) \parallel (\varkappa)$ vedená tímto bodem ^2o bude charakteristikou pro rovinu $(\varkappa)$ a protíná se s rovinou $(^1\pi) \parallel (\pi)$ bodem ^1a procházející jakožto charakteristikou roviny (π) v přímce (^1P), t. j. charakteristice (^1P) půdorysné stopy (P) roviny $(\varkappa)$. Stopa $^2o^1a$ roviny $(\varkappa)$, jsouc rovnoběžná se stopou oa roviny $(\varkappa)$, protínati bude stopu $^1a^1m$ **) $\parallel am$ roviny $(^1\varkappa)$ v bodě ^1a jakožto stopě přímky (^1P). Průmět klinogonálný

*) *Charakteristikou* nazývá *R. v. Mises* v časopisu: »*Zeitschrift für Mathematik und Physik*«, svazek 52., str. 46. v pojednání: »*Zur konstruktiven Infinitesimalgeometrie der ebenen Kurven*« zvolenou polohu pohybujícího se útvaru, jímž má býti představena jeho nekonečně blízká poloha.

**) Bod $^1m^*$ jest průsečník přímky $^1a^1m \parallel am$ s osou rotace $\varDelta$.

${}^1P$ charakteristiky $({}^1P)$ procházející tímto bodem ${}^1\alpha$ a rovnoběžný s polárou P jest charakteristikou této poláry a protíná tečnu ps obrysové křivky klinogonálného průmětu plochy rotační O v bodě ${}^1p$ jakožto charakteristice bodu p šinoucího se v této tečně.

Charakteristiku ${}^1T_a$ s pošinutím $\overline{a^1a}$ bodu a současně vykonaného otáčení tečny $Ta \equiv as$ kol bodu a obdržíme, jestli s bodu a spustíme kolmici ku charakteristice ${}^1N_a \equiv {}^1as_M$ normály $N \equiv as_M$. Z této charakteristiky ${}^1T_a$ odvodíme si charakteristiku $\overline{s^1s}$ bodu s jakožto bodu tečny Ta kolem bodu a se otáčející, omezíme-li přímku $s^1s \perp Ta$ charakteristikou ${}^1T_a$. Z té odvodíme charakteristiku $\overline{s^2s}$ bodu s pro pošinutí jeho jakožto průsečíku tečny Ta s osou $\varDelta$ v této přímce, sestrojíme-li ${}^1s^2s \parallel Ta$ osu $\varDelta$ v bodě ${}^2s$ protínající. Přímka $s^3s \perp T_p$ omezená přímkou ${}^2s^3s \parallel T_p$ bude charakteristikou bodu s při otáčení tečny Tp obrysové křivky plochy rotační O kol bodu p a přímka ${}^3sp$ bude charakteristikou ${}^1T_p$ tečny této.

Z obou charakteristik ${}^1p$ a ${}^1Tp$ sestrojíme střed křivky obrysové křivky o opačnou konstrukcí, kterou jsme ze středu křivosti s_M meridiánu M a při zvolené charakteristice ${}^1a$ bodu a sestrojili charakteristiku ${}^1T_a$ tečny T_a, spustíce s bodu ${}^1p$ ku přímce ${}^1T_p$ kolmici ${}^1N_p$ normálu Np obrysové křivky O v jejím hledaném středu křivosti s_0 protínající.

3. Střed křivosti křivky obrysové O klinogonálního průmětu plochy rotační můžeme však také sestrojiti *pomocí rotační plochy 2. stupně oskulující plochu rotační dle kružnice* (K) následujícím způsobem:

Body α a ${}^1\alpha$ určená přímka S jest stopou roviny (ε), v níž se stopa půdorysná (P) roviny (x) pohybuje, a kteráž obsahuje zároveň tečnu (Tp) křivky obrysové (O) plochy rotační, mající svůj průmět v tečně Tp. Rovina tato (ε) jest zároveň rovinou křivky obrysové (O') rotační plochy 2. stupně, která danou plochu rotační dle kružnice (K) oskuluje.

Poněvadž tato rovina (ε) křivky obrysové (O') jest při předpokládaném promítání klinogonálném rovinou diametrálnou, prochází středem s_H oskulační plochy rotační 2. stupně, kterýž zároveň na ose rotační $\varDelta$ leží. Jest tudíž střed s_H průsečníkem osy $\varDelta$ se stopou S roviny (ε).

Tento bod s_H jest však jakožto střed plochy oskulující na poloze klinogonálně promítajících paprsků nezávislý a proto přijdeme, ať zvolíme směr paprsků promítajících jakkoliv k témuž bodu s_H jakožto průsečníku osy $\varDelta$ se stopou S. Ku snadnějšímu sestrojení tohoto bodu zvolme tedy mb_1 kolmo k normále $N_a \equiv ao$ a při tom bod b_1 zcela libovolně.

Potom jest bod a již také bodem α *) a zvolíme-li také bod ${}^1a$ tak, aby ${}^1N \equiv {}^1as_M$ bylo kolmo k ose $\varDelta$, bude bod ${}^1o$ již také bodem ${}^1\alpha$. Spojnice $\alpha\,{}^1\alpha \equiv S$ protíná osu $\varDelta$ v hledaném středu s_H oskulující plochy rotační 2. stupně.

Že jest tento bod s_H středem oskulující plochy 2. stupně lze odůvodniti také tím, že jest středem hlavního meridiánu H této oskulační plochy. Hlavní meridián H, kterýž hlavní meridián plochy rotační v bodě a oskuluje, jest jakožto křivka 2. stupně úplně určen bodem a, normálou N, osou $\varDelta$ a středem křivosti s_M hlavního meridiánu M, kterýž jest zároveň středem křivosti křivky H. *Steiner-Pelzova* **) parabola Π bodu a stanovena jest osou $\varDelta$, normálou N, středem s_M jakožto dotyčným bodem normály N a tečnou T_a.

Abychom stanovili střed s_H, hledejme druhou osu křivky H, kteráž osu $\varDelta$ v tomto bodě protíná. Za tím účelem označme normálu N, jelikož její dotyčný bod s_M s parabolou Π známe jakožto dvě tečny 1, 2, tečnu $T_a \equiv 3$, přímku úběžnou roviny 4_∞, hledanou osu 5 a osu $\varDelta \equiv 6$. Dle věty *Brianchonovy* protínají se přímky

$$\left.\begin{matrix}12\\4_\infty 5\end{matrix}\right\}\mathrm{III},\quad \left.\begin{matrix}23\\56\end{matrix}\right\}\mathrm{I},\quad \left.\begin{matrix}34_\infty\\61\end{matrix}\right\}\mathrm{II}$$

v Brianchonově bodě β. Poněvadž přímky III, II známe, jest bod β určen a přímka $\mathrm{I} \equiv \beta$, 23 protíná přímku 6, t. j. osu rotace $\varDelta$ v bodě 56, jímž prochází druhá osa křivky H, a který tudíž jest zároveň hledaným středem s_H meridiánu H.

---

*) Proto však také již jedním z bodů p a ${}^1p$, v nichž polára P křivku K protíná.

**) *Prof. K. Pelz: »Die Krümmungshalbmesser-Constructionen der Kegelschnitte als Corollarien eines Steinerschen Satzes,«* uveřejněno ve *»Zprávách o zasedání Královské České společnosti náuk v Praze«* z roku 1875. II. třída, čís. 23, str. 205.

A že tímto způsobem docílený bod s_H se s dříve pomocí infinitesimální geometrie sestrojeným bodem s_H shoduje, patrno z *úplné shodnosti* obou těchto konstrukcí.

Znajíce střed s_H plochy oskulující 2. stupně, můžeme nyní sestrojiti střed křivosti křivky obrysové O plochy rotační jakožto střed křivosti s_O' obrysové křivky O' oskulující plochy rotační 2. stupně, kteráž určena jest svým středem s_H, přímkou P' tímto středem rovnoběžně vedenou s polárou P jakožto sdruženým průměrem k průměru stotožněnému s osou rotace Δ, tečnou Tp a jejím dotyčným bodem p. Tečnami Steiner-Pelzovy paraboly Π jsou tentokráte tečna Tp, normála Np, úběžná přímka, kolmice U s bodu průsečného s osy Δ jakožto průměru křivky O' s tečnou Tp ku průměru P' spuštěná a kolmice V spuštěná s bodu průsečného průměru P' s touž tečnou k ose Δ.

Označme za tím účelem tečny tyto číslicemi v následujícím pořádku: normálu N_a, jelikož její dotyčný bod s_O' hledáme $\equiv 12$, $Tp \equiv 3$, $U \equiv 4$, úběžnou přímku $\equiv 5_x$ a $V \equiv 6$ *). Dle Brianchonovy věty protínají se přímky:

$$\left.\begin{matrix} 12 \\ 45_x \end{matrix}\right\} \text{III}, \quad \left.\begin{matrix} 23 \\ 5_x 6 \end{matrix}\right\} \text{I a} \quad \left.\begin{matrix} 34 \\ 61 \end{matrix}\right\} \text{II}$$

v Brianchonově bodě β. Bod tento dán průsečíkem přímek I a II, kterým vedeme přímku III zároveň bodem 45_∞ procházející a protínající přímku 12 ve hledaném středu křivosti s_O' křivky O' a tudíž i středu křivosti křivky obrysové O klinogonálného předmětu plochy rotační.

4. O shodě obou konstrukcí středu křivosti křivky obrysové plochy rotační přesvědčíme se ve zvláštním případě, který jsme také již ve článku 3. na zřeteli měli, předpokládajíce, že přímka mb stála kolmo k normále $N_a \equiv ao$. Poznali jsme tam, že v tomto případě body α a p se stotožňovaly s bodem a.

Tentokráte zvolme však ještě charakteristiku $\overline{a^1a'}$ bodu a v tečně T_a tak velikou, aby charakteristika stopy roviny π procházela středem s_H hlavního meridiánu H oskulující plochy ro-

---

*) Přímky ^1P a Δ jsou patrně sdruženými průměry obrysové křivky O'

tační 2. stupně a poláru P tak, aby byla rovnoběžná s charakteristikou ${}^1N' \equiv s_M {}^1a'$ normály N *).

Potom bude charakteristika ${}^1a'$ totožna se středem s_H, charakteristika ${}^1P' \parallel P$ bodem tímto procházející a stavší se průměrem křivky K sdruženým k ose rotační Δ, bude vymezovati na tečně $T_p \equiv T_a$ délku $p\,{}^1p' \equiv a\,{}^1p'$ jakožto charakteristiku bodu p při jeho šinutí v tečně T_p.

Použijeme-li předem konstrukce středu křivosti s_O, již nám geometrie infinitesimální podává, tu obdržíme vzhledem k té okolnosti, že bod $a \equiv p$, tečna $T_a \equiv T_p$ a ${}^1P' \parallel {}^1N'$, $N_p \equiv N$ a vzhledem ku konstrukci ve článku 2. provedené hledaný střed křivosti s_0 v průsečíku přímky ${}^1P'$ s normálou N.

Sestrojujíce však střed křivosti s_0 pomocí paraboly Steiner-Pelzovy, budeme míti k jejímu sestrojení pět tečen a to: normálu N_a, jejíž dotyčný bod jakožto střed s_0 hledáme, a již v souhlasu s označením použitém ve článku předcházejícím označíme 12, tečnu $Tp \equiv 3$, kolmici $U \equiv 4$ s bodu s ku průměru ${}^1P'$, úběžnou přímku roviny $\equiv 5_\infty$ a kolmici $V \equiv 6$ bodem ${}^1p'$ k ose rotace Δ spuštěnou.

Potom dle věty Brianchonovy protínají se přímky

$$\left.\begin{matrix} 1\,.\,2 \\ 3\,.\,6 \end{matrix}\right\} \mathrm{I}, \quad \left.\begin{matrix} 2\,.\,4 \\ 6\,.\,5_\infty \end{matrix}\right\} \mathrm{II} \text{ a } \left.\begin{matrix} 4\,.\,3 \\ 5_\infty\,.\,1 \end{matrix}\right\} \mathrm{III}$$

v Brianchonově bodě β. Poněvadž přímky II a III jsou známy, jest bod β určen, a přímka $\mathrm{I} \equiv \beta\, 3\,.\,6$ protíná normálu $N \equiv 12$ v bodě $1\,.\,2$, kterýž jest již hledaným středem křivosti s_0.

Že výsledek obou konstrukcí v tomto zvláštním případě jest totožným, vyplývá z toho, že přímka I stotožňuje se

*) Ku zvolené poláře sestrojíme bod b následovně:

Přeneseme-li $\overline{an}$ od bodu n, v němž polára P osu rotace Δ protíná na druhou stranu, obdržíme v tomto zvláštním případě druhý průsečný bod p_1 poláry P s křivkou K. Průměrem aa_1, daným směrem sdruženého průměru $mb \perp N$ a bodem p_1 jest ellipsa K úplně dána a možno sdružený průměr mb omeziti, protneme-li jej přímkami ap a a_1p_1 v bodech q a r a sestrojíme střední geometrickou úměrnou $\overline{mq}$ a $\overline{mr}$, kteráž nám hledaný poloměr $\overline{mb}$ udává. Tyto body q a r docílíme také dle předem citovaného pojednání *pana dvorního rady Pelze*, jak již ve článku 1. tohoto pojednání vyznačeno, když učiníme na poláře P délku $\mathrm{I}\lambda = n\mathrm{II}$, opíšeme touto délkou s bodů λ a II oblouky kruhové protínající se v bodech, jichž vzdálenost od bodu n nám délku poloměru $\overline{mb}$ poskytuje.

s přímkou ${}^1P'$, t. j. že přímka tato zároveň prochází bodem s_H. Abychom to dokázali, zjistíme, že přímka I stojí kolmo ku přímce U. Za tím účelem přihlížíme ku trojúhelníku určenému přímkami III, II a I. Kdyby přímka I bodem s_H procházela, byly by přímky II a U dvěma výškami tohoto trojúhelníka procházejícími dvěma vrcholy β resp. $4 . 3 \equiv s$ a i třetí výška musila by jejich průsečíkem $2 . 4 \equiv u$ procházeti, t. j. spojnice bodů s_H a u musila by býti kolma ku straně třetí III a tudíž i ku normále N čili rovnoběžna s tečnou T_a.

Že skutečně spojnice $s_H u$ jest rovnoběžna s tečnou T_a, lze dokázati tím, že měníce na normále N polohu středu křivosti s_M hlavního meridiánu M plochy rotační 2. stupně oskulující plochu rotační dle kružnice (K), sestrojujeme body ${}^1o$ . . . na přímce L, procházející bodem o a rovnoběžné s tečnou T_a, vzniknuvšími, paprsky svazku a protínající osu rotační v řadě bodu s_H . . . , kteráž jest s řadou s_M . . . prvoprojektivné, jelikož bod průsečný o obou těchto přímých jest bodem samodružným. Paprsky body s_H . . . řady bodové Δ kolmé k této přímce protínají tečnu T_a opět v řadě bodové ${}^1a'$ . . . . . s prvou řadou projektivné a tudíž i s řadou s_M . . . , s níž jest vlastně prvoprojektivnou, jelikož jejich průsečný bod a jest samodružným. Proto se všechny spojnice $s_M {}^1a'$, . . jednotlivých párů sdružených bodů protínají v jediném bodě a tvoří svazek projektivný postupně s řadami ${}^1a'$ . . . , s_H . . . a s_M . .

Paprsky U . . procházející bodem s a kolmé ku spojnicím $s_M {}^1a'$, . . . jakožto paprskům jednoho svazku tvoří svazek shodný se svazkem prvým a protíná normálu N v řadě bodů u . . . projektivné s řadou ${}^1a'$ . . . a tudíž i s řadou s_H . . . na ose rotační ležící. Vedeme-li ještě řadou bodů s_H . . . rovnoběžky s tečnou T_a, protínají tyto touž normálu N v řadě bodů k . . . projektivné s řadou s_H . . a tudíž i se soumístnou řadou bodů u . .

Jelikož však tyto dvě projektivné řady soumístné mají, jak snadno lze dovoditi tři body: o, a a bod úběžný přímky N samodružné, jest také každý jiný bod u totožný se svým sdruženým bodem k a proto jsou všechny spojnice bodů sdružených s_H . . . a u s tečnou T_a rovnoběžny a tudíž také ku přímce III kolmy, jak bylo dokázati.

O shodnosti obou konstrukcí středu křivosti s_0 lze se však přesvědčiti i při libovolné poloze paprsku klinogonálně promítajícího, arciť že v tomto případě obecném na základě důkazu mnohem složitějšího. —

Analytický důkaz věty o tečnách ve dvojném bodě průsečné křivky dvou ploch, dotýkajících se v tomto bodě.

Napsal **Vilém Jung**, professor v Praze.

Budiž počátek o pravoúhlých souřadnic společným bodem ploch

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

$$z = F(x, y); \tag{2}$$

společnou normálu těchto ploch zvolme za osu Z a předpokládejme, že bod o jest obyčejným bodem každé z daných ploch.

Platí tedy

$$f(o, o) = F(o, o) = 0, \; f_1(o, o) = F_1(o, o) = 0,$$
$$f_2(o, o) = F_2(o, o) = 0;$$

mimo to nechť aspoň jedna z částečných derivací 2. řádu pro $x = 0$, $y = 0$ liší se od nully.

Rovnice daných ploch možno pak psáti ve tvaru

$$z = \frac{1}{2!}\,[x^2 f_{11}(o, o) + 2xy f_{12}(o, o) + y^2 f_{22}(o, o)] + r_3, \tag{3}$$

$$z = \frac{1}{2!}\,[x^2 F_{11}(o, o) + 2xy F_{12}(o, o) + y^2 F_{22}(o, o)] + R_3; \tag{4}$$

při tom jest

$$r_3 = \frac{1}{3!}\left[x^3 \frac{\partial^3 f(\Theta x, \Theta y)}{\partial x^3} + 3x^2 y \frac{\partial^3 f(\Theta x, \Theta y)}{\partial x^2 . \partial y} + 3xy^2 \frac{\partial^3 f(\Theta x, \Theta y)}{\partial x . \partial y^2} + y^3 \frac{\partial^3 f(\Theta x, \Theta y)}{\partial y^3}\right],$$

a obdobně pro R_3; $0 < \Theta < 1$.