b, c se nalézají uvnitř křivky *O'* nějaké *nepřímkové plochy 2. stupně*, tak že nelze sestrojiti tečny s bodů těchto ku křivce *O'*.*)

12. Kdyby křivka *O'* byla *imaginární křivkou kruhovou*, pak bychom dospěli k cíli cestou naznačenou ve článku 9.

Vyhledali bychom na přímce *M*, dané body *a* a *b* stopy *S* spojující, samodružné body *f* a *g* involuční řady bodů, v nichž přímka *M* protíná křivky svazku kuželoseček určeného křivkami *S* a *O'*; jednou realnou družinou této involuční řady, to jest body *a* a *b* známe a druhou družinu imaginarní, t. j. proniky přímky *M* s imaginarní křivkou kruhovou *S* stanovíme dvěma družinami involuční řady sdružených polů vzhledem ku této křivce, kterou za tím účelem, jako ve článku 9., idealně vyjádříme realnou křivkou kruhovou *J*.

Právě tak určili bychom si samodružné body ^1f a ^1g involuční řady, kterou určuje týž svazek křivek 2. stupně na přímce *N*, spojující body *a* a *c* stopy *S*. Body ^1f a ^1g určují s body *f* a *g* čtyři přímky, z nichž každá jest osou kollineace křivek *O'* a *S'*. Při konstrukci každé z možných křivek *S* užili bychom s výhodou dříve uvedeného způsobu, jakým lze pomocí realné křivky kruhové sestrojiti křivku kollinearnou ku imaginarní křivce kruhové.**)

Z geometrie kuželoseček.

Píše

M. Lerch,

docent vysoké školy technické v Praze.

(Pokračování.)

5. Ve svazku kuželoseček o vrcholech a_1a_2, b_1b_2 přicházejí tři kuželosečky zvrhlé; jsou to páry přímek

$$(\overline{a_1a_2}\,,\ \overline{b_1b_2}),\qquad (\overline{a_1b_1}\,,\ \overline{a_2b_2}),\qquad (\overline{a_1b_2}\,,\ \overline{a_2b_1}),$$

t. j. *páry protějších stran úplného čtyřhranu* $a_1a_2b_1b_2$. Tyto sta-

---

*) *Dr. Chr. Wiener.* „L. d. d. G.“ II. Band. Pag. 109.

**) Tamtéž, pag. 121.

noví na libovolné přímce P tři páry tétéž involuce. Tím máme výsledek:

„Tři páry protějších stran úplného čtverhranu protínají libovolnou přímku ve třech párech involuce.“

Buď nyní na přímce P dána kvadratická involuce dvěma páry a_1a_2, b_1b_2; hledejme k danému libovolnému prvku x_1 prvek doplňující x_2, tak aby x_1x_2 tvořily pár involuce.

Veďme body a_1, a_2 libovolné přímky a_1m_1, a_2m_2, tyto protněme libovolnou přímkou vedenou bodem x_1 v bodech m_1, m_2; přímky m_1b_1, m_2b_2 protnou a_2m_2, a_1m_1 v bodech n_2, n_1. Ve čtyřúhelníku $m_1m_2n_1n_2$ protínají dva páry protějších stran (m_1n_1, m_2n_2), (m_1n_2, m_2n_1) přímku P v bodech a_1a_2, b_1b_2 a třetí pár (m_1m_2, n_1n_2) v bodech x_1, x_2; bude tedy x_2 hledaný bod, poněvadž páry a_1a_2, b_1b_2, x_1x_2 náležejí tétéž involuci.

V involuci přihodí se dvakráte, že prvky téhož páru splynou v jediný. Neboť splynou-li prvky $\xi_1\xi_2$, hoví dle (4) společná hodnota $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ rovnici

$$A\xi^2 + 2B\xi + C = 0,$$

která má dva kořeny ξ', ξ'', jestliže $A \gtrless 0$.

Je-li však $A = 0$, zní rovnice involuce

$$B(\xi_1 + \xi_2) + C = 0$$

čili

$$\xi_1 + \xi_2 = a.$$

V této odpovídá hodnotě $\xi_1 = \infty$ opět $\xi_2 = \infty$, takže $\xi = \infty$ jest jeden „*samodružný bod*“ involuce. Druhý plyne z rovnice $2\xi = a$, t. j. $\xi = \frac{a}{2}$, tedy $\xi = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}$, takže je-li jeden bod samodružný v nekonečnu, jest druhý uprostřed všech párů ξ_1, ξ_2; znamenáme-li bod v nekonečnu ξ'', samodružný bod v konečnu $\frac{a}{2} = \xi'$, tvoří tedy $\xi_1\xi_2\,\xi'\xi''$ čtveřinu harmonickou.

Tato věta platí obecně.

Neb jsou-li body samodružné v konečnu ($A \gtrless 0$), znamenejme je α, β, a položme

$$\frac{\xi_1 - \alpha}{\xi_1 - \beta} = \eta_1, \qquad \frac{\xi_2 - \alpha}{\xi_2 - \beta} = \eta_2;$$

pak obdržíme mezi η_1 a η_2 vztah tvaru

$$A'\eta_1\eta_2 + B'(\eta_1 + \eta_2) + C' = 0;$$

samodružným prvkům odpovídají hodnoty $\eta = 0$ a $\eta = \infty$; tedy bude $C' = 0$, $A' = 0$, takže nacházíme rovnici ve tvaru

$$\eta_1 + \eta_2 = 0, \quad \text{tedy } \eta_1 = -\eta_2,$$

čili

$$\frac{\xi_1 - \alpha}{\xi_1 - \beta} : \frac{\xi_2 - \alpha}{\xi_2 - \beta} = -1;$$

dvojpoměr $(\alpha\beta\,\xi_1\,\xi_2)$ má tedy hodnotu -1, a čtveřina $(\alpha\beta\,\xi_1\,\xi_2)$ jest harmonickou.

Protneme-li nyní strany úplného čtverohranu přímkou P, která prochází dvěma body *příčnými* e, f (tak nazývají se průseky protějších stran; jsou celkem tři a tvoří t. z. příční trojúhelník), protíná tato přímka tři páry protějších stran ve třech párech ee, ff, $x_1 x_2$ bodů, z nichž dva sestávají z bodu jediného, v němž oba průseky splynuly. Ježto páry tyto ee, ff, $x_1 x_2$ náležejí téže involuci, a e, f jsou prvky samodružné, tvoří $e f x_1 x_2$ harmonickou čtveřinu; v tom spočívá konstrukce harmonické čtveřiny.

6. Obraťme se nyní k větě Désarguesově. Měli jsme svazek kuželoseček o vrcholech $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, a přímku P. Na této tvořily páry průseků s kuželosečkami svazku involuci, jejíž rovnice byla

$$(01\,x_1)\,(01\,x_2) = k;$$

splynou-li body x_1, x_2, pak je přímka P tečnou příslušné kuželosečky. V tom případě máme

$$(01x)^2 = k,$$

tedy

$$(01x) = \pm\sqrt{k},$$

takže přihodí se dvakráte řečená okolnosť: jednou v bodě e, po druhé v bodě f, kteréžto body jsou dány rovnicemi

$$(01e) = \sqrt{k}, \qquad (01f) = -\sqrt{k}.$$

Existují tedy ve svazku dvě kuželosečky, jež se přímky P dotýkají.

Body styku e, f, těchto kuželoseček s přímkou P dělí (jakožto samodružné body involuce) všecky páry průseků ostatních kuželoseček harmonicky.

Mějme nyní svazek kružnic. Tak nazývá se souhrn kružnic procházejících dvěma body (druhé dva vrcholy tohoto svazku jsou t. zv. imaginarní kruhové body v nekonečnu). Máme-li dvě kružnice

$$\mathrm{K}(x, y) \equiv x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0,$$
$$\mathrm{K}'(x, y) \equiv x^2 + y^2 + 2a'x + 2b'y + c' = 0,$$

zní rovnice svazku

$$\mathrm{K}(x, y) + \lambda\, \mathrm{K}'(x, y) = 0.$$

Libovolná přímka P protne tento svazek v involuci; naopak lze každou involuci bodů na přímce P považovati za průsek přímky té se svazkem kružnic.

Neb buď dána involuce dvěma páry a_1a_2, b_1b_2. Sestrojme dvě kružnice procházející body a_1a_2m, resp. b_1b_2m, kde m je libovolný bod v rovině mimo přímku P. Kružnice ty protnou se v dalším bodě n, a souhrn kružnic vedených body mn protne přímku P v involuci, jejíž dva páry jsou a_1a_2, b_1b_2. Tato involuce tedy splývá s hledanou. Samodružné body této involuce obdržíme sestrojením kružnic svazku, jež se přímky P dotýkají.

Nechť chordála mn protne P v bodě o; pak bude $oa_1 \,.\, oa_2 = ob_1 \,.\, ob_2 = \overline{oe}^2 = \overline{of}^2$. Vedeme tedy z bodu o tečnu k libovolné z kružnic svazku, jejíž délkou jako poloměrem opíšeme kol bodu o kruh, jenž protne P v hledaných bodech samodružných e, f.

Mějme nyní tři páry involuce (a_1b_2), (a_2b_1), (t, p) na přímce P. Veďme bodem t libovolnou přímku, na ní volme dle libosti dva body σ_1, σ_2; přímky σ_1a_1, σ_2a_2 nechť se protnou v bodě α, přímky σ_1b_1, σ_2b_2 v bodě β; přímka $\alpha\beta$ pak prochází bodem p. Neboť protější strany čtyřhranu $\alpha\beta\sigma_1\sigma_2$ protínají přímku P ve třech párech involuce, z nichž dva jsou a_1b_2, a_2b_1 a z třetího páru jeden bod jest t; zbývající bod musí dle podmínky splynouti s bodem p. Tento způsob ponětí konstrukce jest užitečný v následující úvaze.

Buď dána kuželosečka K pěti body $s_1 s_2 a b t$; bodem t veďme přímku T, jež protne kuželosečku v dalším bodě p.

Čtyřmi body $s_1 s_2 a b$ prochází kuželosečka K a další dvě kuželosečky zvrhlé, sestávající z přímek $(s_1 a, s_2 b)$ a $(s_1 b, s_2 a)$; tyto tři kuželosečky protínají přímku T ve třech párech tp, $a_1 b_2$, $b_1 a_2$ tétéž involuce.

Vedeme-li tedy bodem t libovolnou přímku, vytkneme na ní body σ_1, σ_2, a ustanovíme body α, β tak, aby paprsky $\sigma_1 \alpha$, $\sigma_2 \alpha$, $\sigma_1 \beta$, $\sigma_2 \beta$ procházely pořadem body a_1, a_2, b_1, b_2, bude přímka $\alpha\beta$ procházeti bodem p.

Výsledku tomu lze uděliti přehlednější tvar způsobem následujícím. Přímku T a páry bodů s_1, s_2, σ_1, σ_2 považujme za dané; libovolnému bodu v rovině m přiřaďme pak bod μ jak následuje: ustanovme jeho „průměty“ m_1, m_2 ze středů s_1, s_2 do přímky T, t. j. ustanovme průseky m_1, m_2 přímek $s_1 m$, $s_2 m$ s přímkou T; vyhledejme dále bod μ, jenž jest průsekem přímek $\sigma_1 m_1$, $\sigma_2 m_2$.

Tímto způsobem definována v rovině navzájem jednoznačná *transformace* bodů m v μ; nazývá se *transformací Steinerovou.* Přímka T sluje *příčkou* neb *osou* transformace, s_1, s_2, σ_1, σ_2 pak *jejími středy;* k hlavním bodům této transformace náležejí též body t a τ, v nichž přímky $\overline{\sigma_1 \sigma_2}$ a $\overline{s_1 s_2}$ protnou osu T.

Náš obrazec byl následující: Měli jsme kuželosečku K procházející body $s_1 s_2 t$ a protínající osu transformace v bodě p; na kuželosečce měli jsme dva body a, b; jim odpovídaly transformací body α, β, a přímka $\alpha\beta$ procházela bodem p, čili jinak řečeno, bod β ležel na přímce αp.

Nechme bod a pevným, bod b probíhej kuželosečku K; tato jest svými pěti body a, t, s_1, s_2, p úplně určena; bod α odpovídající v naší transformaci $(s_1, s_2; \sigma_1, \sigma_2; \text{T})$ bodu a jest pak pevným, a bod β příslušný k bodu b proměnným a probíhá přímku pevnou αp.

Máme tedy větu:

Prochází-li kuželosečka třemi základními body $s_1 s_2 t$ Steinerovy transformace, pak se touto transformací převádí v přímku.

Tím dán snad nejlepší prostředek pro sestrojení kuželosečky dané pěti body. Dva z nich volíme za středy $s_1 s_2$ Steinerovy transformace, třetí za bod t; tímto vésti dlužno (dle definice) příčku T a přímku $\sigma_1\sigma_2$; ustanovíme-li ke zbývajícím dvěma bodům a, b body přiřaděné $\alpha\beta$, bude přímka $\overline{\alpha\beta}$ transformátem dané kuželosečky. Vedeme tedy přímku $\alpha\beta$ a transformujeme její body μ nazpět, čímž obdržíme body m naší kuželosečky.

Obrácením nacházíme větu, že

Steinerovou transformací přímka převádí se v kuželosečku procházející body základními σ_1, σ_2, τ.

Kuželosečka ta ještě prochází bodem p, v němž přímka protíná osu transformace T. Pohybuje-li se přímka P tak, aby bod p blížil se bodu t, bude kuželosečka Π, jež transformací vznikne z P, tak se měniti, že stále bude procházeti body p, σ_1, σ_2, a zapadne-li p do t, bude míti přímka $\overline{\sigma_1\sigma_2}$ s čarou Π tři body společné $\sigma_1\sigma_2 t$ a tudíž bude tvořiti její část; jinými slovy kuželosečka Π se rozpadne ve dvě přímky, z nichž jedna jest $\overline{\sigma_1\sigma_1}$ a druhá je vlastním transformátem přímky P.

Prochází-li přímka jedním ze základních bodů $s_1 s_2 t$ transformace Steinerovy, převádí se touto transformací v přímku, jež pak prochází příslušným bodem základním druhé soustavy. Ve všech ostatních případech ale transformuje se přímka v kuželosečku.

Chceme ještě zodpovídati otázku, v jakou křivku transformuje se kuželosečka C procházející dvěma ze základních bodův s_1 s_2 t Steinerovy transformace.

Nechť nejprvé C prochází body s_1, s_2, nikoli tedy bodem t; transformovaná křivka T bude zajisté algebraickou, i chceme určiti její stupeň. Za tím účelem hledejme průseky čáry Γ s libovolnou přímkou Π; tuto možno považovati za transformát kuželosečky P procházející třemi body s_1 s_2 t; kuželosečka ta protne čáru C právě v bodech, jež se transformují v průseky přímky Π s čarou Γ; ale P protíná čáru C v bodech pevných s_1, s_2 a v dalších dvou bodech m, n, existují tedy jen dva průseky μ, ν čar Π a Γ; libovolná přímka protíná tedy čáru Γ ve dvou bodech a tato bude tedy stupně druhého; t. j. kuželosečka procházející body s_1, s_2, nikoli však bodem t, transformuje se v kuželosečku; tato prochází body σ_1, σ_2, poněvadž paprsky svazků σ_1, σ_2 ji protínají pouze v jednom bodě pohyblivém.

Nechť za druhé prochází kuželosečka C body s_1, t, nikoli však bodem s_2. Její transformovaná Γ protíná libovolnou přímku Π v bodech μ, ν, jež odpovídají dvěma průsekům m, n, kuželosečky P vedené body $s_1\, s_2\, t$, s kuželosečkou C; tyto mají skutečně již dva body s_1, t společné a mohou se protnouti pouze v dalších dvou bodech m, n. Čára Γ je tedy opět stupně druhého a prochází body σ_1, τ. Neboť přímky Π vedené bodem τ transformují se nazpět v přímky P vedené bodem t a tímto bodem vedené přímky P protínají C mimo t v jediném bodu pohyblivém.

Tím dokázána věta následující:

Kuželosečka procházející dvěma ze základních bodů $s_1\, s_2\, t$ Steinerovy transformace převádí se touto transformací opět v kuželosečku, jež prochází dvěma body základními a druhé soustavy $\sigma_1 \sigma_2 \tau$, jim příslušnýma.

7. Abychom poslední výsledky blíže algebraicky doložiti mohli, odvodíme větu o projektivných svazcích paprsků. Za tím účelem vyjdeme ze zvláštní soustavy souřadnic t. zv. *dvoustředových.*

Poloha bodu M v rovině bude úplně určena, známe-li dva paprsky dvou svazků C_1, C_2 jím procházející; polohu těchto paprsků určíme jednoznačně cotangentama úhlů MC_1C_2 a MC_2C_1, jež průvodiče bodu M, t. j. přímky MC_1, MC_2 svírají s přímkou C_1C_2. *Souřadnicemi* bodu M nazveme tu veličiny

$$\xi = \cot MC_1C_2, \quad \eta = \cot MC_2C_1.$$

Vytkněme souvislost těchto souřadnic s pravoúhlými x, y. Osu x položme do C_1C_2, počátek 0 do středu délky C_1C_2; takže pak pravoúhlé souřadnice bodů C_1 a C_2 jsou $(-c, 0)$, $(c, 0)$, kde $c = \frac{C_1C_2}{2}$.

Jsou-li pravoúhlé souřadnice bodu M x, y, bude patrně

$$\xi = \frac{c + x}{y}, \quad \eta = \frac{c - x}{y}; \tag{1}$$

tedy naopak

$$(2) \qquad x = \frac{c(\xi - \eta)}{\xi + \eta}, \; y = \frac{2c}{\xi + \eta}.$$

Rovnice přímky tu bude zníti

$$Ax + By + C = 0,$$

tedy po dosazení

$$A'\xi + B'\eta + C' = 0,$$

kde

$$A' = Ac + C, \; B' = -Ac + C, \; C' = 2Bc.$$

Vůbec čára stupně n má též v souřadnicích dvoustředových rovnici stupně n-tého.

Hledejme zvláště rovnici kuželosečky K, vedené body C_1, C_2.

Byla-li

$$K(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

rovnice její v soustavě pravoúhlé, bude v nových souřadnicích rovnice zníti

$$K\left(c\frac{\xi - \eta}{\xi + \eta}, \frac{2c}{\xi + \eta}\right) = 0$$

čili dle označení §. 2.

$$K[c\xi - c\eta, 2c, \xi + \eta] = 0;$$

seřadíme-li, obdržíme tvar

$$a'_{11}\xi^2 + 2a'_{12}\xi\eta + a'_{22}\eta^2 + 2a'_{13}\xi + 2a'_{23}\eta + a'_{33} = 0,$$

při čemž

$$a'_{11} = a_{11}c^2 + a_{33} + 2a_{13}c$$
$$a'_{22} = a_{11}c^2 + a_{33} - 2a_{13}c;$$

tyto výrazy jsou však nullami, poněvadž body (c, 0) a (— c, 0) leží na kuželosečce, a tedy $K(c, 0) = K(-c, 0) = 0$. Zbývá tak rovnice

$$2a'_{12}\xi\eta + 2a'_{13}\xi + 2a'_{23}\eta + a'_{33} = 0.$$

T. j. *rovnice kuželosečky vedené středy C_1, C_2 nové soustavy souřadnic je tvaru*

$$(3) \qquad A\xi\eta + B\xi + C\eta + D = 0.$$

Jsou-li (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), (ξ_3, η_3) tři body kuželosečky, možno rovnici (3) psáti

$$(3^*) \qquad \frac{\xi - \xi_1}{\xi - \xi_2} : \frac{\xi_3 - \xi_1}{\xi_3 - \xi_2} = \frac{\eta - \eta_1}{\eta - \eta_2} : \frac{\eta_3 - \eta_1}{\eta_3 - \eta_2}.$$

Neboť skutečně rovnice (3*) obdrží po odstranění jmenovatelů tvar (3) a znamená tedy kuželosečku vedenou vrcholy C_1, C_2; mimo to jest splněna pro souřadnice bodů (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) a (ξ_3, η_3), takže kuželosečka má s čarou (3) pět bodů společných a s ní tedy splývá.

Výraz

$$\frac{\xi - \xi_1}{\xi - \xi_2} : \frac{\xi_3 - \xi_1}{\xi_3 - \xi_2} = (\xi_1 \xi_2 \xi \xi_3)$$

nazýváme dvojpoměrem paprsků $\xi_1 \xi_2 \xi \xi_3$ svazku C_1. Jsou-li φ_1, φ_2, φ, φ_3 úhly, jež tyto paprsky svírají s přímkou C_1C_2, máme

$$(\xi_1 \xi_2 \xi \xi_3) = \frac{\cot\varphi - \cot\varphi_1}{\cot\varphi - \cot\varphi_2} : \frac{\cot\varphi_3 - \cot\varphi_1}{\cot\varphi_3 - \cot\varphi_2}$$
$$= \frac{\sin(\varphi - \varphi_1)}{\sin(\varphi - \varphi_2)} : \frac{\sin(\varphi_3 - \varphi_1)}{\sin(\varphi_3 - \varphi_1)},$$

t. j. dvojpoměr paprsků ABCD určitého svazku má hodnotu

$$\frac{\sin AC}{\sin BC} : \frac{\sin AD}{\sin BD},$$

a závisí tedy jen na poloze paprsků A, B, C, D.

Rovnice (3) vyjadřuje vztah mezi proměnnými paprsky dvou svazků; každému paprsku svazku (C_1) přísluší určitý paprsek svazku (C_2) a naopak.

Souvislost ta je dle (3*) taková, že dvojpoměry příslušných si čtveřin jsou si rovny, a nazývá se *projektivitou* či *promětností*, oba svazky jsou promětny.

Obsah rovnic (3) a (3*) lze tedy vyjádřiti takto:

Průseky příslušných si paprsků ve dvou promětných svazcích naplňují kuželosečku, která prochází jich vrcholy.

Naopak *body kuželosečky promítají se ze dvou pevných její bodů C_1 a C_2 ve svazcích projektivných.*

Zvláštním případem projektivity je vztah

$$A\xi + B\eta + C = 0, \tag{3^a}$$

jenž sluje *perspektivitou.* Dva svazky perspektivní protínají se na přímce. Paprsek C_1C_2 svazku C_1 má souřadnici

$$\xi = \cot 0 = \infty;$$

týž paprsek ve svazku C_2 má rovněž souřadnici $\eta = \infty$; ježto hodnotě $\xi = \infty$ v rovnici (3^a) přísluší opět $\eta = \infty$, shledáváme, že *perspektivní svazky mají paprsek sám sobě odpovídající* (samodružný), totiž paprsek jim oběma společný.

Naopak, mají-li dva svazky prométné o různých vrcholech paprsek samodružný, jsou v poloze perspektivní.

Z toho plyne, že každé dva projektivné svazky lze uvésti přemístěním do polohy perspektivní.

Z těchto několika poznámek můžeme naše výsledky o Steinerově transformaci nanovo dokázati.

Mějme přímku P, která neprochází žádným z bodů základních s_1s_2t; hledáme její transformovaný útvar Π. Probíhá-li bod m přímku, vytvoří paprsky s_1m a s_2m svazky perspektivní, protínající se na přímce P. Ježto paprsky s_1m a $\sigma_1\mu$ se protínají na příčce T, jsou perspektivní, a rovněž je svazek $\sigma_2\mu$ perspektivní se svazkem paprsků s_2m. Z toho plyne (na základě rovnosti dvojpoměrů), že svazky $\sigma_1\mu$ a $\sigma_2\mu$ jsou projektivné.

Společnému paprsku $\sigma_1\sigma_2$ ve svazku (σ_1) odpovídá paprsek γ_2, jejž určíme takto: Paprsek $\sigma_1\sigma_2$ protíná příčku T v bodě t; přímka ts_1 protíná přímku P v bodě a, takže a_1 splývá s bodem t; průmět a_2 bodu a ze středu s_2 do příčky T spojen s bodem σ_2 dává přímku γ_2. Tato je různa od C_1C_2, pokud bod a_2 nepadne do t,*) t. j. jestliže přímka P neprochází bodem t. Tu bude

*) Kdyby splynuly body t a τ, pak by ovšem bod a_2 ve všech případech zapadl do t a svazky $(\sigma_1\mu)$ a $(\sigma_2\mu)$ by byly perspektivní pro každou přímku. Tento případ $t \equiv \tau$ však stále vylučujeme.

tedy transformát Π přímky P kuželosečkou vytvořenou promětnými svazky (σ_1) a (σ_2), jak jsme chtěli ukázati.

Podobně odvodí se ostatní věty o transformaci Steinerově pronesené.

8. Je nyní otázka, v jakou křivku transformuje se kuželosečka, jež prochází jen jedním ze základních bodů transformace s_1, s_2, t.

Nechť tedy kuželosečka C prochází bodem s_1, nikoli však body s_2, t. Abychom určili stupeň křivky Γ, jež vznikne z C transformací, protněme ji libovolnou přímkou Π; této odpovídá jako původní útvar kuželosečka P vedená body s_1, s_2, t a tato protíná kuželosečku C mimo pevný bod s_1 v dalších třech pohyblivých bodech m, m', m'', jimž odpovídají tři průseky μ, μ', μ'' přímky Π s čarou Γ.

Tato je tedy stupně třetího, a dokážeme, že prochází body σ_1, τ jednoduše a má v σ_1 bod dvojný.

Neboť přímkám Π, vedeným skrze τ odpovídají přímky P vedené skrze t a tyto protínají C jen ve dvou bodech m_1, m_2; přímky Π svazku τ tedy protínají Γ pouze ve dvou pohyblivých bodech a tedy musí bod τ ležeti na čáře Γ.

Doslova tak vede se důkaz o bodě σ_2.

Veďme nyní přímku Π bodem σ_1; té odpovídá v původní soustavě přímka P svazku s_1 a tato protíná C jen v jednom proměnném bodě; přímky svazku σ_1 protínají tedy čáru Γ jen v jednom bodě pohyblivém a proto jest σ_1 *bodem dvojným* čáry Γ.

Ustanovme tečny čáry Γ v tomto bodě dvojném. Leží-li μ blízko σ_1 na čáře Γ, bude průmět jeho $\mu_2 = m_2$ ze středu σ_2 do osy T ležeti blízko t; přímka $s_2 m_2$ protne čáru C ve dvou bodech m, m', blízkých průsekům d, d' přímky $s_2 t$ s čarou C; jeden z obou bodů m přísluší bodu μ jako originál ve Steinerově transformaci, a spojíme-li $s_1 m$, $s_1 m'$ a určíme průseky m_1, m'_1 s osou T, obdržíme v přímkách $\sigma_1 m_1$, $\sigma_1 m'_1$ spojivé přímky $\sigma_1 \mu$, $\sigma_1 \mu'$ dvou bodů μ, μ' blízkých bodu dvojnému σ_1; přejdou-li tyto body do σ_1, přejdou body m, m' do bodů d, d', a přímky $\sigma_1 m_1$, $\sigma_1 m'_1$ přejdou v přímky $\sigma_1 d_1$, $\sigma_1 d'_1$, jež jsou tedy tečnami křivky Γ v bodě dvojném.

Zbývá ještě vyšetřiti případ, kdy kuželosečka C obsahuje bod t, nikoli však body s_1, s_2; nalezneme tu, že čára Γ je třetího stupně, prochází body σ_1, σ_2 a má v τ bod dvojný; tečny v tomto bodě obdržíme následující úvahou.

Buďte d, d' průseky přímky $s_1 s_2$ s čarou C; přímky td, td' se transformují v přímky $\tau\delta$, $\tau\delta'$, značí-li δ a δ' body čáry Γ bodu τ nekonečně blízké; t. j. tečny čáry Γ v bodě dvojném τ se obdrží transformací z přímek td, td'.

Máme tedy větu:

Prochází-li kuželosečka jediným ze základních bodů $s_1 s_2 t$ *Steinerovy transformace, přejde v čáru stupně třetího, která v bodě základním druhé soustavy onomu příslušném má bod dvojný a druhýma dvěma prochází jednoduše; tečny této čáry v bodě dvojném se obdrží jako transformáty přímek, jež spojují základní bod na kuželosečce s průseky této čáry s protilehlou stranou základního trojúhelníka* $s_1 s_2 t$.

Naopak lze tímto způsobem dokázati větu:

Volíme-li u čáry třetího stupně dvojný bod a dva body obyčejné za základ Steinerovy transformace, přejde tato čára v kuželosečku, procházející základním bodem druhé soustavy, jenž odpovídá bodu dvojnému.

Na této větě zakládá se řešení následující úlohy:

Sestrojiti čáru C třetího stupně, dán-li její bod dvojný a dalších šest bodů jednoduchých.

Řešení. Bod dvojný volme za s_1, jiné dva body jednoduché za s_2 a t; bodem t vedeme libovolně osu T a přímku σ_1, σ_2, na níž zvolíme středy transformace σ_1, σ_2. Touto transformací přejde čára C v kuželosečku Γ, obsahující bod σ_1 a body transformací odvozené ze zbylých čtyř bodů jednoduchých.

Tak známe pro kuželosečku Γ pět bodů, můžeme ji sestrojiti a zpátečnou transformací obdržíme hledanou čáru stupně 3.

Kuželosečka Γ protíná osu T v týchž dvou bodech jako čára C.

Tím zároveň řešen úkol: Sestrojiti druhé dva průseky čáry stupně třetího s přímkou vedenou jedním z její bodů; neboť přímka T byla vedena libovolně bodem t.

9. Úvahy naše dosáhly by rozměrů přesahujících meze tomuto časopisu vytčené, kdybychom chtěli dopodrobna propracovati theorii čar stupně třetího s bodem dvojným, kterou chceme doporučiti jako cvičení v užívání Steinerovy transformace. Ukážeme toliko na zvláštní povahu čar stupně třetího s bodem dvojným.

Mějme určitou čáru C stupně třetího; její rovnici v pravoúhlých souřadnicích možno psáti

$$A_0x^3 + A_1x^2y + A_2xy^2 + A_3y^3$$
$$+ B_0x^2 + B_1xy + B_2y^2 + C_0x + C_1y + D = 0;$$

má-li čára bod dvojný, volme tento za počátek; ježto čára prochází počátkem, musí býti $D = 0$, a ježto osa x protíná čáru ve třech bodech, z nichž dva splynou s počátkem, musí $C_0 = 0$, a podobně musí $C_1 = 0$, any z průseků osy y s čarou dva splývají v počátku.

Rovnice

$$\begin{aligned} A_0x^3 + A_1x^2y + A_2xy^2 + A_3y^3 \\ + B_0x^2 + B_1xy + B_2y^2 = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

ale skutečně definuje čáru stupně třetího mající v počátku dvojný bod. Neb libovolná přímka $y = tx$ vedená počátkem protne čáru v bodech, jichž úsečky x hoví rovnici

$$(A_0 + A_1t + A_2t + A_3t^3)\,x^3 + (B_0 + B_1t + B_2t^2)\,x^2 = 0$$

a tedy dva splynou s počátkem ($x^2 = 0$) a jen jeden jest závislým na poloze přímky. Souřadnice jeho budou patrně

$$\begin{aligned} x &= -\frac{B_0 + B_1t + B_2t^2}{A_0 + A_1t + A_2t^2 + A_3t^3}, \\ y &= -\frac{B_0t + B_1t^2 + B_2t^3}{A_0 + A_1t + A_2t^2 + A_3t^3}. \end{aligned} \tag{2}$$

Možno tedy souřadnice proměnného bodu na křivce naší vyjádřiti jako racionalné úkony určitého parametru t a tedy náležejí čáry třetího stupně s bodem dvojným k t. zv. čarám *racionalným*. (Dokončení.)