Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička
Příspěvky k integralnímu počtu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 13 (1884), No. 1, 12--18

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121049

Hessiana má v rovinách od $\overline{XY}$ *o* r a $-r$ *vzdálených po křivce kruhové poloměru* R, *v rovinách od* $\overline{XZ}$ *o* R a $-R$ *vzdálených po křivce kruhové poloměru* r.

Tyto výsledky nepřekvapují, připomeneme-li si, že křivky kruhové tu zmíněné jsou křivky bodů parabolických.

Pohledněme ještě ku *křivce smíru Hessiany*.

Zavedeme-li do rovnice plochy té čtvrtou souřadnici stejnoměrnou v a položíme-li po uspořádání $v = o$*), obdržíme jakožto rovnici křivky smíru po přiměřeném upravení:

$$x^8(R^2+r^2)-y^8(R^2-r^2)+z^8(R^2-r^2)+2R^2x^6y^2+2r^2x^6z^2$$
$$+2(R^2-r^2)y^6z^2-2R^2x^2y^6-2r^2x^2z^6-2(R^2-r^2)y^2z^6$$
$$-2x^4y^4r^2-2R^2x^4z^4-6x^4y^2z^2(R^2+r^2)-2x^2y^4z^2(2R^2-3r^2$$
$$-2x^2y^2z^4(2r^2-3R^2)=0,$$

z čehož zřejmo, tato křivka smíru v rovině $\overline{XY}$ má *dva realné body smíru*, určené přímkami $y^2-x^2=0$, v rovině $\overline{XZ}$ *čtyři realné body* určené přímkami

$$z^2-x^2=0,\quad x^2(R^2+r^2)-z^2(R^2-r^2)=0$$

a v rovině $\overline{YZ}$ pak *dva trojnásobné realné body*. (Body smíru hyperboly (4), jež zastupuje křivku stupně šestého.)

(Dokončení.)

Příspěvky k integralnímu počtu.

Napsal

prof. Dr. F. J. Studnička.

Že theoretická stránka mnohých výzkumů mathematických jest zajímavější a důležitější než-li praktická, pozná zajisté brzy každý, kdo v rozmanitých oborech analyse mathematické se poohledl a zejmena seznal proměnlivost příslušných výrazů aneb, abych užil slova případnějšího, *plastičnost* mathematické mluvy. Týž vyšší pojem vyjádřiti tu možná často velmi rozmanitými tvary mathematickými, takže na přechodu od podoby jedné k jiné vypadá jako báječný Proteus. A právě v této mnohotvárnosti a plastičnosti výrazů takovýchto spočívá nemalý půvab, zvláště když se přihlíží ku podobnostem a protivám formálním, takže se tu mnohdy vystopovati dá i zřejmý moment rythmický, ba poetický.

---

*) Srovnej: Dr. Em. Weyr, Časopis pro pěst. math. a fysiky, II. pag. 115.

Byť i tedy mnohý úkol mathematický považovati se mohl se zřetelem ku konečnému jeho řešení za odbytý, přec může poskytovati s hlediska formalního dosti látky k vyšetřování dalšímu, jež arci utilitarista pouhý považovati si dovoluje za zbytečnou hříčku, jakmile se mu podařilo vůbec nějaké řešení provésti. Na doklad toho budiž zde uvedena třída jednoduchých integrálů smíšených, zde zejména goniometrické funkce jsou význačnými, jelikož právě tyto jednoperiodické funkce transcendentní vynikají tím, co dříve plastičností jsem nazval, a sice buďtež zde především rozebrány dva integraly

$$J_s = \int X \sin x \, dx, \tag{1}$$

$$J_t = \int X \cos x \, dx, \tag{2}$$

kdež předpokládáme, že symbol

$$X = f(x)$$

značí zcela regularní funkci proměnné x.

Jak patrno, možná tu integraci podniknouti dvojím způsobem a sice spojením dx buď se *sin.*, *cos.* nebo s X a pak integrováním po částech.

V prvním případě obdržíme pro vzorec (1)

$$\int X \sin x \, dx = -X \cos x + \int X' \cos x \, dx$$

a

$$\int X' \cos x \, dx = X' \sin x - \int X'' \sin x \, dx,$$

takže spojením obou výsledků povstane

$$\int X \sin x \, dx = -X \cos x + X' \sin x - \int X'' \sin x \, dx;$$

zavedeme-li pak všeobecné označení

$$X^{(k)} = \frac{d^k X}{dx^k},$$

obdržíme z posledního vzorce

$$\int X^{(k)} \sin x \, dx = -X^{(k)} \cos x + X^{(k+1)} \sin x - \int X^{(k+2)} \sin x \, dx, \tag{3}$$

jehož může se užiti ku konečnému řešení, takže bude, spojíme-li členy dle stejných faktorů společných,

$$\int \sin x \, dx = -\cos x \, [X - X'' + X^{IV} - \ldots]$$
$$+ \sin x \, [X' - X''' + X^{V} - \ldots]$$

zavedeme-li tu pak kratší označení

$$\varphi(x) = X - X'' + X^{IV} - \ldots$$

takže

$$\varphi'(x) = X' - X''' + X^{V} - \ldots, \tag{4}$$

povstane tedy konečně

$$J_s = -\varphi(x) \cos x + \varphi'(x) \sin x. \tag{5}$$

A poněvadž zároveň platí

$$\varphi''(x) = X'' - X^{IV} + \ldots,$$

obdržíme se zřetelem k významu řady $\varphi(x)$

$$X = \varphi(x) + \varphi''(x),$$

což představuje differencialní rovnici stupně druhého

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = X,$$

jejíž integral jest, jakož snadno se ustanoví,*) značí-li C_1 a C_2 všeobecné integrační stálé,

$$y = \varphi(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - J_s \cos x + J_c \sin x. \quad (6)$$

Podobně obdržíme pro vzorec (2) napřed

$$\int X \cos x dx = X \sin x + X' \cos x - \int X'' \cos x dx$$

a podlé toho všeobecně

$$\int X^{(k)} \cos x dx = X^{(k)} \sin x + X^{(k+1)} \cos x - \int X^{(k+2)} \cos x dx, \quad (7)$$

takže pomocí tohoto vzorce snadno si zjednáme konečně

$$\int X \cos x dx = \sin x \, [X - X'' + X^{IV} - \ldots] \\ + \cos x \, [X' - X''' + X^{V} - \ldots]$$

anebo zavedeme-li dřívější kratší označení,

$$J_c = \varphi(x) \sin x + \varphi'(x) \cos x; \quad (8)$$

vzorec tento povstane ze vzorce (5) jako (7) ze (3), derivujeme-li na obou stranách jen se zřetelem k funkcím goniometrickým; oba vzorce možná pak zahrnouti relací

$$\int X e^{ix} dx = e^{ix}(\varphi' - i\varphi). \quad (9)$$

V případě pak druhém obdržíme pro vzorec (1), zavedeme-li označení

$$\int X dx = X_1, \ \int X_1 dx = X_2, \ldots, \quad (10)$$

$$\int X \sin x dx = X_1 \sin x - X_2 \cos x - \int X_2 \sin x dx$$

a podlé toho všeobecně

$$\int X_k \sin x dx = X_{k+1} \sin x - X_{k+2} \cos x - \int X_{k+2} \sin x dx,$$

takže se konečně obdrží

$$\int X \sin x \, dx = \sin x \, [X_1 - X_3 + X_5 - \ldots] \\ - \cos x \, [X_2 - X_4 + X_6 - \ldots];$$

položíme-li tu pak obdobně, jako prvé,

$$\psi(x) = X_2 - X_4 + X_6 - \ldots,$$

takže

$$\psi'(x) = X_1 - X_3 + X_5 - \ldots, \quad (11)$$

povstane pro integral (1) výraz nový

---

*) *Studnička*: „Základové vyšší math.“ III. sv. pag. 166, vzorec (18).

$$J_s = \psi'(x) \sin x - \psi(x) \cos x\ ^{*}), \tag{12}$$

což srovnává se úplně s výrazem (5); a jelikož

$$\psi''(x) = X - X_2 + X_4 - \ldots,$$

platí i zde

$$\psi(x) + \psi''(x) = X.$$

Zcela stejným spůsobem obdržíme konečně pro integral druhý vzorec

$$J_c = \psi(x) \sin x + \psi'(x) \cos x, \tag{13}$$

kterýž ostatně přímo se obdrží ze vzorce (12), derivujeme-li tam se zřetelem k funkcím goniometrickým.

Konečně plyne ze soustavy (5) a (8) jakož i ze soustavy (12) a (13), uvedeme-li na čtverec a sečteme-li na obou stranách,

$$J_s^2 + J_c^2 = \varphi^2 + \varphi'^2 = \psi^2 + \psi'^2. \tag{14}$$

A z týchž soustav plyne ještě, řešíme-li podlé φ nebo ψ,

$$\varphi(x) = -J_s \cos x + J_c \sin x = \psi(x), \tag{15}$$

což srovnává se jen s doplňkem integralu (6) differencialní rovnice příslušné.

Z funkcí regularních sem především patří

$$X = e^{ax},$$

takže

$$X^{(k)} = a^k e^{ax}$$

a podlé toho platí

$$\varphi(x) = e^{ax}(1 - a^2 + a^4 - \ldots) = \frac{e^{ax}}{1 + a^2},$$

$$\varphi'(x) = e^{ax}(a - a^3 + a^5 - \ldots) = \frac{ae^{ax}}{1 + a^2};$$

i bude tedy podlé vzorce (5)

$$\int e^{ax} \sin x\, dx = e^{ax} \frac{a \sin x - \cos x}{1 + a^2},$$

$$\int e^{ax} \cos x\, dx = e^{ax} \frac{a \cos x + \sin x}{1 + a^2},$$

jakož jest i odjinud známo. Zároveň tu patrno, že vyhovuje se vzorci (14) i (15).

---

*) Derivujem-li tu na obou stranách, obdržíme patrně
$X \sin x = \psi'' \sin x + \psi' \cos x - \psi' \cos x + \psi \sin x = (\psi + \psi'') \sin x,$
tedy se zřetelem ke vzorci následujícímu stejninu.

Máme-li na zřeteli vzorce (12) a (13), obdržíme týž výsledek. Jestli dále

$$X = \frac{1}{x},$$

takže platí, jakož známo, pro derivace vzorec

$$X^{(k)} = (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}},$$

obdržíme podle vzorce (5)

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = -\cos x \left[\frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - ..\right]$$
$$-\sin x \left[\frac{1}{x^2} - \frac{3!}{x^4} + \frac{5!}{x^6} - ..\right].$$

Kdybychom však zavedli příslušné hodnoty do vzorce (8), zjednáme si pro J_c vzorec

$$\int \frac{\cos x}{x} dx = \sin x \left[\frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - ..\right]$$
$$-\cos x \left[\frac{1}{x^2} - \frac{3!}{x^4} + \frac{5!}{x^6} - ..\right].$$

Zcela jiného druhu jsou vzorce, jež obdržíme pomocí vzorců (12) a (13). Neb tu jest především

$$X_1 = \int \frac{dx}{x} = lx$$
$$X_2 = \int lx dx = x(lx - 1)$$
$$X_3 = \int x(lx - 1) dx = \frac{x^2}{2!}\left(lx - \frac{3}{2}\right)$$

všeobecně

$$X_k = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}[lx - N_{k-1}],$$

kdež zavedeno jest označení

$$N^k = (k)_1 - \frac{1}{2}(k)_2 + \frac{1}{3}(k)_3 - \ldots \pm \frac{1}{k}(k)_k;$$

i bude tedy podle vzorce (12) především

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = -\cos x \left[x(lx - N_1) - \frac{x^3}{3!}(lx - N_3) + \ldots\right]$$
$$+\sin x \left[lx - \frac{x^2}{2!}(lx - N_2) + \frac{x^4}{4!}(lx - N_4) - ..\right]$$

a zkrátíme-li v závorkách, řady s lx sečítajíce,

$$\int \frac{\sin x}{x}\, dx = \cos x \left[N_1 x - N_3 \frac{x^3}{3!} + N_5 \frac{x^5}{5!} - \ldots\right]$$
$$+ \sin x \left[N_2 \frac{x^2}{2!} - N_4 \frac{x^4}{4!} + N_6 \frac{x^6}{6!} - \ldots\right].$$

Abychom pak obdrželi vzorec pro integralkosinus, derivujme podlé vlastnosti dříve vytknuté na pravé straně jen funkce goniometrické, načež obdržíme

$$\int \frac{\cos x}{x}\, dx = -\sin x \,[N_1 x - N_3 \frac{x^3}{3!} + N_5 \frac{x^5}{5!} - \ldots]$$
$$+ \cos x \,[N_2 \frac{x^2}{2!} - N_4 \frac{x^4}{4!} + N_6 \frac{x^6}{6!} - \ldots].$$

Co se pak týče integralu, v němž jest

$$X = x^n,$$

takže

$$X^{(k)} = n^{k,-1}\, x^{n-k}$$

a

$$X_k = \frac{x^{n+k}}{(n+1)^{k,1}},$$

tu obdržíme snadno vzorce; odjinud známé a sice podlé (5)

$$\int x^n \sin x\, dx = x^n \sin x \left[\frac{n}{x} - \frac{n^{3,-1}}{x^3} + \frac{n^{5,-1}}{x^5} - \ldots\right]$$
$$- x^n \cos x \left[1 - \frac{n^{2,-1}}{x^2} + \frac{n^{4,-1}}{x^4} - \ldots\right]$$

a podobně podlé vzorce (8)

$$\int x^n \cos x\, dx = x^n \cos x \left[\frac{n}{x} - \frac{n^{3,-1}}{x^3} + \frac{n^{5,-1}}{x^5} - \ldots\right]$$
$$+ x^n \sin x \left[1 - \frac{n^{2,-1}}{x^2} + \frac{n^{4,-1}}{x^4} - \ldots\right],$$

kdežto by podlé vzorců (12) a (13) vyšlo

$$\int x^n \sin x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \sin x \left[1 - \frac{x^2}{(n+2)^{2,1}} - \frac{x^4}{(n+2)^{4,1}} - \ldots\right]$$
$$- \frac{x^{n+2}}{(n+1)^{2,1}} \cos x \left[1 - \frac{x^2}{(n+3)^{2,1}} + \frac{x^4}{(n+3)^{4,1}} - \ldots\right],$$

z kteréhožto vzorce plyne pro $n = o$, použíjeme-li řady pro *sin.* a *cos.* známé,

$$\int \sin x\, dx = -\cos x.$$

A podlé vzorce (13) bude tu podobně

$$\int x^n \cos x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cos x \left[1 - \frac{x^2}{(n+2)^{2,1}} + \frac{x^4}{(n+2)^{4,1}} - \ldots\right]$$

$$+ \frac{x^{n+2}}{(n+1)^{2,1}} \sin x \left[1 - \frac{x^2}{(n+3)^{2,1}} + \frac{x^4}{(n+3)^{4,1}} - \ldots\right],$$

z čehož taktéž plyne pro $n = o$

$$\int \cos x\, dx = \cos x \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right]$$

$$+ \sin x \left[\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \ldots\right] = \sin x.$$

Že poslední vzorce pro celistvé a positivní n poskytují řady zcela jiného rázu nežli vzorce předcházející, kde fakulty mají negativní inkrementy, poznává se velmi snadno. Zároveň pak tu viděti, jak rozmanité tvary se vyskytují v těchto řadách, jakmile rozličným spůsobem provádíme tak zvaná integrování po částech tam, kde gonimetrické funkce jsou obsaženy v differencialním výrazu. Konečně však jde z tohoto stručného výkladu na jevo, jak opatrně nutno zacházeti s nekonečnými řadami, má-li se obdržeti výsledek nejen formálně, nýbrž i realně správný, což zde vystopovati ponecháváme bedlivosti čtenářstva.

Poznámky k nekonečným řadám.

Studujícím napsal

P. Cornelius Pich, T. J. v Bohosudově (Mariaschein).

I. Značiž α úhel na podstavě daného *trojúhelníku rovnoramenného*, k_1 příslušnou výšku čili kolmici s vrcholu na podstavu spuštěnou, a pokládejmež podstavu jakožto první rameno daného úhlu α.

Vedeme-li z paty kolmice k_1 na druhé rameno úhlu α kolmici k_2, z paty kolmice k_2 na podstavu kolmici k_3, z paty kolmice k_3 na druhé rameno kolmici k_4, a postupujeme-li tímto spůsobem aspoň v myšlénkách tak dlouho, jak jen libo, vedouce totiž pokaždé z paty poslední přímky, na jednom rameně úhlu α kolmo stojící, ještě jinou kolmici na druhé rameno téhož úhlu, tož tvoří poměrná čísla oněch n buď skutečně, buď jen