František Josef Studnička

O složení čísel mocněných

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 13 (1884), No. 1, 30--32

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121043

$$c_1 : c_2 : c = m(n^2 - 1) : n(m^2 - 1) : (m + n)(mn - 1),$$
jsou patrně i tyto hodnoty racionálné.

Vytkněme nyní dva vrcholy racionálného trojúhelníka, ku př. a, b, tak, aby měly racionálné souřadnice; potom jest
$$c = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
hodnota racionalná a rovněž i úkony
$$\cos\varphi = \frac{x_2 - x_1}{c}, \quad \sin\varphi = \frac{y_2 - y_1}{c},$$
značí-li φ úhel strany $\overline{ab}$ s osou X. Pro třetí vrchol trojúhelníka obdržíme pak souřadnice
$$x_3 = x_1 + c_2 \cos\varphi - v_c \sin\varphi$$
$$y_3 = y_1 + c_2 \sin\varphi + v_c \cos\varphi,$$
kdež v_c značí výšku k straně $\overline{ab}$ příslušnou a jest
$$v_c = \frac{2mnc}{(m+n)(mn-1)}.$$

Dosazením hodnot lze konečně vzorcům pro x_3 a y_3 dáti podobu:
$$x_3 = \frac{m(n^2 - 1)x_1 + n(m^2 - 1)x_2 - 2mn(y_2 - y_1)}{(m+n)(mn-1)}.$$
$$y_3 = \frac{m(n^2 - 1)y_1 + n(m^2 - 1)y_2 + 2mn(x_2 - x_1)}{(m+n)(mn-1)}.$$

Vzorci těmito jest při dvou daných vrcholech trojúhelníka racionálného třetí vrchol určen pomocí dvou neodvislých racionálných argumentů m, n; zároveň odtud zřejma jest věta:

Mají-li dva vrcholy racionálného trojúhelníka v pravoúhlé soustavě racionálné souřadnice, má je i třetí.

O složení čísel mocněných.

Pro žáky středních škol napsal Dr. F. J. Studnička.

Rozeznávati čísla *sudá* a *lichá* bylo již od pradávna obyčejem a vyšetřovati složení čísel prostých a mocněných taktéž od nejstarších dob bylo úkolem pro počtáře vítaným. Rozvoj nauky o číslech*) poskytuje poučných toho dokladů hojnost, a jeden

*) Viz krátký jeho přehled na počátku spisu: *Studnička* „Základové nauky o číslech“ Praha, 1875, pag. 5—25.

z nich představuje poučka *Pythagorova, že součet po sobě jdoucích čísel lichých vyjadřuje číslo kvadratické*, což symbolicky praví se vzorcem

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2.$$

Zajímavá tato vlastnost čísel lichých jest však jen zvláštním případem vlastnosti všeobecné, že *každá mocnina představuje součet čísel lichých, je-li mocnitel i mocněnec číslem celistvým.*

Abychom důkaz toho podali, rozeznávejme mocnitele sudého a lichého, a připomeňme si, že součet arithmetické řady stupně prvního, když d jest stálým rozdílem sousedních dvou členů, vyjadřuje se vzorcem

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{(u_n + u_1)(u_n - u_1 + d)}{2d}.$$

A tu obdržíme

a) pro *sudé* mocniny součet arithmetické řady

$$s_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2x^n - 1) = x^{2n}; \qquad (1)$$

neb tu jest patrně

$$u_1 = 1,\ u_n = 2x^n - 1,\ d = 2,$$

tedy

$$u_n + u_1 = 2x^n$$
$$u_n - u_1 + d = 2x^n,$$

z čehož přímo plyne vzorec (1).

Podlé toho jest na př. pro

$n = 1$ $\quad 1^2 = 1,$
$\quad 2^2 = 1 + 3,$
$\quad 3^2 = 1 + 3 + 5,$
. . . .

$n = 2$ $\quad 1^4 = 1,$
$\quad 2^4 = 1 + 3 + 5 + 7,$
$\quad 3^4 = 1 + 3 + 5 \ldots + 17,$
. . . .

$n = 3$ $\quad 1^6 = 1,$
$\quad 2^6 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15,$
$\quad 3^6 = 1 + 3 + 5 \ldots + 53,$
. . . .

b) Pro *liché* mocniny obdrží se podobně

$$s_n = [1 + (x-1)x^n] + [3 + (x-1)x^n] + \ldots$$
$$+ [2x^n - 1 + (x-1)x^n] = x^{2n+1}; \qquad (2)$$

neb tu jest

$$u_1 = 1 + (x-1)x^n,\quad u_n = 2x^n - 1 + (x-1)x^n,\quad d = 2$$

tedy

$$u_n + u_1 = 2x^{n+1}$$

$$u_n - u_1 + d = 2x^n,$$

z čehož opět přímo plyne vzorec (2).

Podlé toho jest na př. pro

$n = 1$ $\quad 1^3 = 1$

$2^3 = 3 + 5,$

$3^3 = 7 + 9 + 11,$

. . . .

$n = 2$ $\quad 1^5 = 1$

$2^5 = 5 + 7 + 9 + 11,$

$3^5 = 19 + 21 + 23 + \ldots + 35,$

. . . .

$n = 3$ $\quad 1^7 = 1,$

$2^7 = 9 + 11 + 13 + \ldots + 23,$

$3^7 = 55 + 57 + 59 + \ldots + 107,$

. . . .

Jak patrno, rozeznává se složení lichých a sudých mocnin tím, že u těchto nepočínají řady vesměs číslem 1 jak u oněch.

Příspěvek k vlastnostem ploch mimosměrek.

Napsal **F. Machovec.**

O každé ploše mimosměrek platí věta:

„*Myslíme-li si body dotyčnými rovin tečných, které se plochy mimosměrek* (A) *dotýkají v bodech libovolné přímky* (P), *přímky největšího spádu těch rovin naproti libovolné rovině* (M), *tvoří tyto přímky plochu mimosměrek* (B), *která jest všeobecně stupně* 3. *a která má za řídící útvar plochu kuželovou stupně* 2. (C), *jejíž stopou na rovině M jest kružnice. Je-li však rovina M kolma na té rovině centralné plochy A, která přísluší přímce P, jest onou plochou největšího spádu hyperboloid mimosměrek.*“

Abychom větu tuto dokázali, mysleme si libovolným bodem s 1) přímku $Q \parallel P$ a 2) roviny $R' \ldots \parallel$ s rovinami tečnými R plochy A v bodech přímky P. Přímky C, které procházejí bodem s a jsou stejnosměrny s přímkami povrchovými plochy B, jsou