Vincenc Jarolímek

Kterak dvě plochy druhého stupně přemístiti do polohy perspektivně kollineárné

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 45 (1916), No. 1, 18--23

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121039

Kterak dvě plochy druhého stupně přemístiti do polohy perspektivně kollineárné.

Podal dvorní rada prof. dr. **Vinc. Jarolímek.**

Dotýkají-li se dvě plochy 2. stupně ε, φ ve dvou různých bodech x, y (reálných nebo imaginárných), t. j. mají-li v každém z nich společnou rovinu tečnou τ_x, τ_y, rozpadá se společný pronik ploch (obecně prostorová křivka stupně čtvrtého) ve dvě kuželosečky P, R. Také tyto mohou býti (buď jedna nebo obě) imaginárné, což však nezáleží na jakosti bodů x, y. Zároveň rozpadá se společná rozvinutelná plocha obalová (obecně třídy čtvrté) ploch ε, φ ve dvě kuželové (po případě válcové) plochy 2. stupně α, β, z nichž zase jedna nebo i obě mohou být pomyslné. Plochy ε, φ jsou za daného předpokladu v poloze perspektivně kollineárné; roviny π, ϱ křivek P, R jsou rovinami této kollineace, vrcholy pak a, b ploch α, β středy kollineačními (reál. či imag.). Jsou-li útvary π, ϱ, a, b všecky reálné, jsou plochy ε, φ *čtverým* způsobem v perspektivné kollineaci, totiž v soustavách $(a\pi)$, $(b\pi)$, $(a\varrho)$, $(b\varrho)$. Středy a, b připadají na průsečnici rovin $\overline{\tau_x\tau_y}$; tato a spojnice $\overline{xy}$ jsou reciproké poláry vzhledem ku ploše ε i φ, jsou to tedy dvě protější hrany společného polárného tetraedru ploch ε, φ. Na nich leží tudíž i vrcholy tetraedru; dva z nich jsou x, y, ostatní dva (na přímce $\overline{\tau_x\tau_y}$) jsou ve vrcholech kuželových ploch, jež proložiti lze kuželosečkami P, R.

Vytkněme si úlohu: dvě plochy 2. stupně ε, φ, dané v poloze jakékoli, přemístiti tak, aby byly v perspektivné kollineaci.

Řešení 1. To způsobíme zajisté tím, že plochy ε, φ přemístíme tak, aby se pronikaly v téže kuželosečce P (ať reál. č. imag.); neboť potom zbytek proniku přemístěných ploch ε', φ' musí býti nutně také kuželosečkou R (ev. degenerovanou), a věta v čele tohoto pojednání uvedená má platnost i zvratnou: pronikají-li se dvě plochy 2. stupně ve dvou kuželosečkách, dotýkají se navzájem ve dvou bodech (reál. č. imag.), totiž v společných bodech x, y oněch dvou kuželoseček.

Když pak roviny kollineační π, ϱ (ve kterých leží křivky P, R) sestrojeny, stanovíme středy kollineační a, b takto: Vytkněme v rovině π (nebo ϱ) libovolnou přímku N*), proložme přímkou N dvě tečné roviny ku ploše ε' (dotyčné body buďtež e_1, e_2) a dvě tečné roviny ku ploše φ' (dotyčné body f_1, f_2), načež spojnice $\overline{e_1 f_1}$, $\overline{e_2 f_2}$ protnou se v bodě a, spojnice $\overline{e_1 f_2}$, $\overline{e_2 f_1}$ v bodě b. Tato pak konstrukce nepozbývá platnosti, jsou-li tečné kuželové plochy α, β imaginárny; vrcholy jejich a, b jsou nicméně reálny.

Řešení 2., reciproke, záleží v tom, že plochám ε, φ opíšeme dvě kuželové plochy $\varkappa$, λ spolu *shodné*, tyto pak i s plochami ε, φ přemístíme tak, aby se kužele $\varkappa$, λ spolu sjednotily; společný vrchol jejich dá střed kollineační a. Abychom pak sestrojili roviny kollineační, veďme středem a sečnu S ku plochám přemístěným do ε', φ'. V bodech e_1, e_2, v nichž S seče ε', sestrojme tečné roviny ε_1, ε_2 ku ε', a v bodech f_1, f_2, ve kterých S seče φ', položme tečné roviny φ_1, φ_2 ku φ'. Průsečnice rovin $\overline{\varepsilon_1\varphi_1}$ a průsečnice $\overline{\varepsilon_2\varphi_2}$ stanoví spolu jednu, π, průsečnice $\overline{\varepsilon_1\varphi_2}$, $\overline{\varepsilon_2\varphi_1}$ druhou rovinu kollineační ϱ.

Ad 1. Protože v kollineárné transformaci reálné přímce odpovídá zase přímka reálná, musí dané plochy, aby řešení bylo možné, býti buď obě přímkové nebo obě nepřímkové.

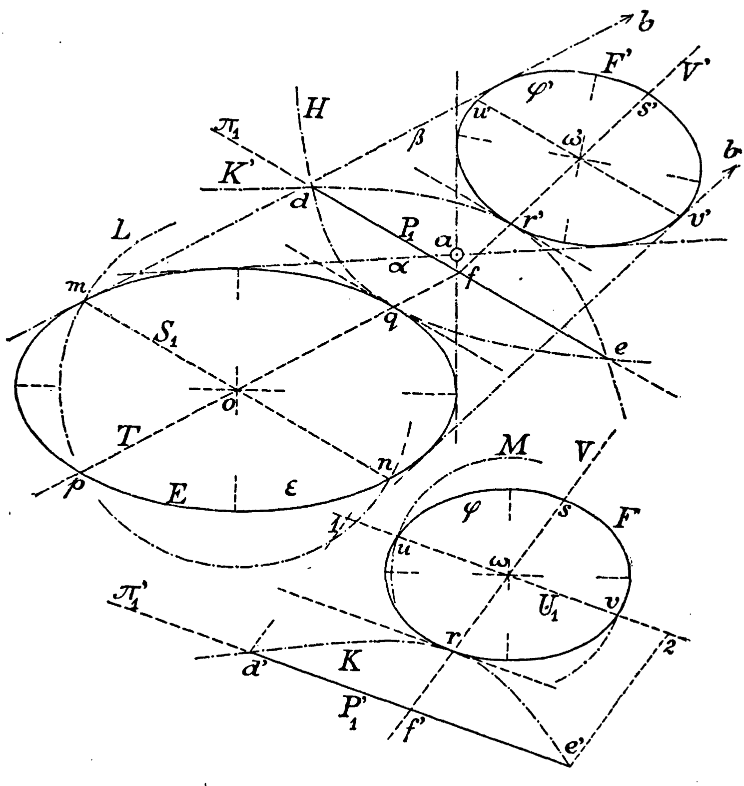
a) Jsou-li plochy nepřímkové, užijeme s výhodou řezů kruhových. Snadno zajisté stanovíme na ploše ε kružnici P a na ploše φ kružnici P' tak, aby $P \cong P'$, načež přiložíme plochy ε, φ k sobě tak, aby kružnice P, P' se sjednotily. Plochy pronikají se pak nutně ještě v další kuželosečce R (reál. č. imag.). Otáčíme-li pak jednu z ploch ε, φ okolo osy kružnice P, takže tato otáčí se sama v sobě, zůstávají plochy napořád v poloze perspektivné.

Přejeme-li si však, aby *obě* společné tečné plochy kuželové α, β byly na jisto *reálné*, postarejme se o to, aby křivky P, R, ve kterých se plochy ε, φ po svém přemístění pronikají, byly obě imaginárné, každá pak z ploch ε, φ aby byla vně druhé. Roviny kollineační π, ϱ, ve kterých leží pomyslné křivky P, R, jsou nicméně reálné.

---

*) Jsou-li plochy ε, φ nepřímkové, nutno, aby další konstrukce byla možna, zvoliti přímku N tak, aby plochy ε', φ' neprotínala; jsou-li však zborcené, musí N protínati je v bodech reálných.

Příslušnou konstrukci provedeme takto: Předpokládajíce promítání orthogonálné a nákresnu (viz obraz) průmětnou σ, postavme dané plochy, na př. ellipsoidy ε, φ tak, aby každý měl nejdelší a nejkratší osu v průmětně σ (obrysy E, F); střední osa $\perp$ σ promítá se tudíž do středu o (resp. ω). Tyto střední



osy jsou průměry dvou koulí (obrysy L, M), jež dotýkajíce se ellipsoidů ve dvou vrcholech, protínají je v kružnicích. Jedna z nich (na ε) promítá se do společné tětivy $\overline{mn} \equiv S_1$ obrysů E, L, jiná (na φ) do společné tětivy $\overline{uv} \equiv U_1$ obrysů F, M. Průměr $\overline{pq} \equiv T$, sdružený v ellipse E k průměru S_1, obsahuje středy jedné soustavy povrchových kružnic na ellipsoidu ε; totéž platí o průměru $\overline{rs} \equiv V$ vzhledem ku ploše φ. Každá rovina $\pi \parallel S$ (průmět $\pi_1 \parallel S_1$), která jde mimo ellipsoid ε, seče jeho plochu v imaginárné kružnici P (průmět P_1 v π_1 reálný), jejíž střed $f \equiv (\pi T)$ a poloměr $= i \,.\, \overline{fd} = -i \,.\, \overline{fe}$ (kdež $i = \sqrt{-1}$). Body d, e obdržeti lze souměrnou družinou elliptické involuce, již na přímce π_1 indukuje ellipsa E. Všecky body takto sestrojené na přímkách $\| S_1$ vyplňují hyperbolu H*), jejíž dva sdružené průměry jsou $\overline{pq}$ (reálný) a $\overline{mn}$ (laterálný). V prostoru pak vyplňují imaginárné kružnice P (v rovinách $\| \pi$) imaginárný hyperboloid, jehož ideální transformací (afinní dle osy $\overline{pq}$ a karakteristiky $\pm i$) je hyperboloid reálný, supplementární k ellipsoidu ε; obě plochy dotýkají se podél ellipsy, jejíž průmět je $\overline{pq}$.

Sestrojme nyní rovinu π', která protne druhý ellipsoid φ v imaginárné kružnici $P' \cong P$. V hyperbole K (supplementární k ellipse F) narýsované ze sdružených průměrů $\overline{rs}$, $\overline{uv}$, která vzhledem k φ má týž význam, jako H k ε, snadno stanovíme tětivu $\overline{d'e'} \equiv P'_1 \| \overline{uv}$ tak, aby $\overline{d'e'} = \overline{de}$ ($\overline{\omega 1} = -\overline{\omega 2} = \overline{fd}$, $\overline{1d'} \| \overline{2e'} \| \overline{\omega f'}$). Rovina π', jejíž průmět $\pi'_1 \equiv \overline{d'e'}$, seče ellipsoid φ v imaginárné kružnici $P' \cong P$, jejíž střed jest f' a poloměr $= i \,.\, \overline{f'd'} = i \,.\, \overline{fd}$. Posléze přemístíme ellipsoid φ a kružnici P' s ním pevně spojenou do polohy φ' tak, aby kružnice $P' \cong P$ se sjednotily: položíme $\overline{d'e'}$ na $\overline{de}$, učiníme $\sphericalangle\, \omega' fe = \sphericalangle\, \omega f' e'$ atd. Ellipsoidy ε, φ' pronikají se v téže imaginárné kružnici P, jsou tedy v perspektivné kollineaci. Společné tečné obrysů E, F' dají průsečíky svými a, b průměty středů kollineačních; jedna rovina kollineační π je totožna s rovinou kružnice P. Ježto však průmětna σ obsahuje jednu hlavní rovinu ploch ε i φ', jsou také obě společné tečné plochy kuželové souměrny dle roviny σ, a obrysové přímky jejich i vrcholy a. b leží tudíž v průmětně σ. Plochy ε, φ' pronikají se pak v další ještě kuželosečce imaginárné R, jejíž rovina $\varrho' \perp \sigma$ jest druhou rovinou kollineační; průmětem jejím jest druhá kollineační osa ellips E, F' (připadá mimo nákresnu).

b) Jsou-li plochy ε, φ sborcené hyperboloidy, lze užiti buď téže methody, anebo nahraditi kružnice $P \cong P'$ površkami: vytkneme na ε dvě površky A, M se protínající, a stanovíme na φ dvě površky A', M' tak, aby $\sphericalangle\, A'M' = \sphericalangle\, AM$. K tomu

---

*) *Supplementární* k ellipse E dle *Ponceleta*, „*imaginární projekce*" její dle *Wienera* (viz též Jarolímek, Geometrie polohy, III., str. 56. a 67.).

konci vytkněme na asymptotickém kuželi hyperboloidu φ dvě površky A'', M'' tak, aby $\sphericalangle A''M'' = \sphericalangle AM$, položíme k hyperboloidu φ tečnou rovinu $\tau \parallel (A''M'')$ a stanovíme přímky A', M', ve kterých rovina τ hyperboloid φ seče. Přemístíme-li pak plochy ε, φ tak, aby $\sphericalangle A'M'$ sjednotil se s $\sphericalangle AM$, bude úloha rozřešena. Plochy pronikají se pak v přímkách A, M a mimo to v kuželosečce K (která také rozpadnouti se může ve dvě různoběžky); jeden střed kollineační připadá zde do průsečíka (AM). Tohoto řešení lze užiti i tehdy, je-li jedna ploch ε, φ hyperbolickým paraboloidem. Místo asymptotického kužele vezmeme ku pomoci obě řídící roviny paraboloidu.

Jsou-li obě plochy hyperbolickými paraboloidy, bude lépe stanoviti na nich shodné hyperboly nebo (jsou-li možny) paraboly.

Ad 2. K řešení reciprokému lze s výhodou užiti tečných kuželových ploch *rotačních.* Plocha 2. stupně ε promítá se z každého bodu *fokálního,* t. j. ležícího na některé fokální křivce plochy ε, rotačním kuželem, který však je reálným jen potud, pokud vrchol jeho leží *vně* plochy ε. Jsou-li tedy plochy ε, φ na př. ellipsoidy, sestrojme jejich fokální hyperboly H, K *). Vytkněme na hyperbole H, ale *vně* ellipsoidu ε, bod v, sestrojme z něho tečný rotační kužel $\varkappa$ k ellipsoidu ε, jehož úhel vrcholový buď α**), stanovme na K bod u tak, aby tečny vedené jím k střední ellipse ellipsoidu φ svíraly spolu úhel $= \alpha$, a opišme ellipsoidu φ z vrcholu u rotační kužel $\lambda \cong \varkappa$. Posléze přemístíme ellipsoidy ε, φ s opsanými jim kuželi λ, $\varkappa$ tak, aby tyto se sjednotily. Učiníme-li to tak, aby společný vrchol a sjednocených kuželů připadl *mezi* přemístěné ellipsoidy ε', φ', pak zajisté bude lze těmto opsati ještě druhý (vnější) kužel obalový o určitém vrcholu b.

Vrchol b sestrojíme takto: Libovolným bodem v prostoru (který leží vně ε' i φ') proložme obě vnější společné tečné roviny ku plochám ε', φ'; jsou-li dotyčné body roviny jedné e_1, f_1, roviny druhé e_2, f_2, protnou se spojnice $\overline{e_1 f_1}$, $\overline{e_2 f_2}$ v bodě b.

*) H leží v rovině určené nejdelší a nejkratší osou ellipsoidu ε, má ohniska svá v ohniskách střední hlavní ellipsy, vrcholy pak v ohniskách největší hlavní ellipsy; obdobně K.

**) Osou kužele je tečna hyperboly H v bodě v.

Ellipsoidy ε', φ' jsou v poloze perspektivně kollineárné, a, b středy kollineační; konstrukce rovin kollineačních podána v odstavci „*Řešení 2.*“ svrchu nadepsaném (na str. 19).

Této methody — pomocí rotačních kuželů — lze užiti při všech plochách 2. stupně; neboť i hyperbolickému paraboloidu lze opsati reálné kužele rotační, totiž z každého bodu fokální paraboly jedné i druhé. Sestrojíme-li na př. k hyperbolickému paraboloidu (jehož vrchol buď v) tečný kužel z ohniska o jedné hlavní paraboly P, bude tento kužel rotační dotýkati se paraboloidu podél hyperboly, jejíž rovina (polárná k pólu o) $\pi \perp \overline{ov}$ (vrchol v půlí vzdálenost ohniska o od roviny π), osa pak kužele rotačního jde ohniskem o rovnoběžně k vrcholové tečně paraboly P.

Dodatek

k úloze: Společné body a tečny dvou homothetických kuželoseček nerýsovaných (ročník 1914—15, str. 378).

Pokud obě homothetické křivky jsou ellipsy, možno s výhodou užiti též affinity. Sdružíme-li ellipsu E affinně s kružnicí K nad velkou osou $\overline{II}$, bude v této soustavě affinní (o též ose affinní $\overline{II}$) druhé ellipse E' odpovídati také určitá kružnice K', již sestrojíme snadno. Společné body a tečny kružnic K a K' promítneme pak affinně zpět. Této methody však užiti nelze, dány-li dvě homothetické hyperboly nebo paraboly.

Dr. *V. Jarolímek.*

Příspěvek ku geometrii dvojiny bodové.

Napsal Dr. **Václav Simandl**, docent české techniky v Brně.

Buďtež dány na určité přímce dvě libovolné reálné dvojiny bodové, dvojiny U, V a A_1, B_1. Buďtež λ a $\frac{1}{\lambda}$ hodnotami dvojpoměrů těchto dvou dvojin, buďtež totiž:

$$(UVA_1B_1) = \lambda, \qquad (UVB_1A_1) = \frac{1}{\lambda}$$

a budiž **J** involucí, která jest stanovena dvěma svými dvojinami