Václav Obešlo

O logarithmicko-grafickém počítání. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 45 (1916), No. 1, 81--99

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121029

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

O logarithmicko-grafickém počítání.

Napsal **Václav Obešlo**.

Úvod.

Jak známo, rozeznáváme:

a) *počítání s čísly úplnými* (na př. $345 \times 247 = ?$);

b) *počítání s čísly neúplnými*, v kteréžto příčině možno vytknouti případy:

α) Jde o *čísla irracionální*, t. j. taková, která nelze vyjádřiti v uzavřeném tvaru zlomkem desetinným (na př. číslo π, dále $\sqrt{2}$, atd.).

β) Čísla udávají výsledek měření, pokusů atd. a jsou následkem *chyb pozorovacích* neúplná nebo jen až k určité mezi spolehlivá.

γ) Čísla bylo by možno napsati úplně, ale jejich poslední jednotky nemají *v praksi* významu, takže píšeme je ve tvaru zkráceném. Tak na př. cenu zboží vyjadřujeme číslem jdoucím až do jednotek značících haléře, neboť haléř jest nejmenším platidlem.

Počítání s čísly neúplnými, čili t. zv. *počet přibližný* (**princip approximace**) má v životě i ve vědě mnohem důležitější význam než počítání s čísly úplnými, jehož některá odvětví zůstávají pro svůj výchovný význam v platnosti jen při vyučování školním.

Budiž při této příležitosti upozorněno na to, že k principu approximace druží se nerozlučně **princip percentuálnosti**, v životě platný a každému praktikovi značnou měrou vžitý. Čím větší jest totiž absolutní hodnota veličiny a, tím větší jest *prakticky pří-*

pustný rozdíl mezi approximací (a) a veličinou a, takže porovnáme-li rozdíl ten s absolutní hodnotou veličiny a, můžeme psáti

$$\frac{a-(a)}{a} \doteq konst.$$

Tak měříme-li délku narýsované úsečky na papíře měřítkem, udáváme ji zpravidla s přesností na $\frac{1}{10}$ *mm*. Měříme-li však v přírodě délku asi 100 *m*, udáváme ji na 1 *dm*, neboť údaj přesnější neměl by pro obyčejná měření smyslu, atd.

Důležitým faktorem jest také čas (**princip ekonomie**). Ve škole nezáleží nám obyčejně na tom, jak dlouho na úkolu pracujeme, je-li jen výsledek správný. V praktickém životě nelze však plýtvati časem; tu jest třeba, abychom s minimem prostředků a při minimu času dospěli k výsledku, jenž nám vzhledem k účelu naší práce úplně vyhoví.

Postulátům uvedeným úplně vyhovují *grafické methody počítací*. Citujme zde jen *Arithmografii* a *Grafickou statiku*. Grafická statika, vybudována namnoze zcela nezávisle na ostatních methodách grafických, vžila se velmi rychle a jest dnes v rukou technika nepostradatelnou pomůckou. Arithmografie zůstala theoretickým kuriosem až téměř do let devadesátých minulého století, kdy hlavně M. *d'Oçagne* postavil ji na nové základy. Nyní zdokonalena jest tak, že může závoditi s grafickou statikou.

Geometrické konstrukce lze mnohdy nahraditi *mechanismem*. Tak vznikají stroje počítací v širším slova smyslu, z nichž nejrozšířenější jest *logarithmické pravítko*, jež najdeme nyní v ruce každého technika a praktického počtáře a jež jest jedním z nejlepších plodů mathematického myšlení. Možno v té příčině uvésti na doklad výroky mnohých na slovo vzatých učenců. Tak *B. Esmarch* praví ve svém spise „Die Kunst des Stab-Rechnens“: „*Die Stabrechenkunst sollte Gemeingut werden und das gesamte praktische Leben allenthalben durchdringen.* Es kontrastiert sonderbar mit den grossen Erfindungen des Dampfzeitalters und der sozialen Reformsucht, dass der Rechenstab bis heute für das grosse Publikum im Dunkel bleiben und ein Verfahren von unermesslichem Nutzen und unvergleichlicher Eleganz in stiefmütterlicher Abschliessung gehalten werden konnte.“

O důležitosti a účelnosti tohoto přístroje svědčí dále slova [1]) Dra. *E. Hammera*, praktika i theoretika nad jiné povolaného: „Wer sich genügende Handfertigkeit im Gebrauch des Schiebers angeeignet hat, wird in dem logarithmischen Rechenschieber eine der wichtigsten Erfindungen der praktischen Zahlenrechnung erblicken. Die Schnelligkeit der Rechnung neben ihrer Bequemlichkeit muss dem Rechenschieber für die Genauigkeitstufe, für die er überhaupt in Betracht kommen kann (etwa bis auf $\frac{1}{500}$ des Ergebnisses), seinen Vorrang sichern."

Theorie logarithmického pravítka, jíž jest věnována I. část našeho článku, jest jen malou součástí theorie *logarithmického abbaku*, t. j. grafických method početních v rovině logarithmicky dělené, o kterých bude pojednáno ve II. části. A theorie ta jest opět specielní kapitolou obecné nauky, *nomografie.*

Pokud se týče *logarithmického pravítka*, bylo by velmi účelno, kdyby, jako v mnohých jiných státech, i u nás bylo pravítko to zavedeno *do školy.* Princip jeho jest tak jednoduchý a čas věnovaný úvodu do jeho theorie ponese mnohonásobné úroky. Názory v té příčině jsou dnes již zcela jiné než dříve. Tak neužívá dnes nikdo ve škole logarithmů 7-místných a jest mnoho paedagogů i praktiků, kteří považují 4-místné logarithmy za více než postačitelné pro školu i život nehledě k některým applikacím, pro školu bezvýznamným. Tím se značně blížíme přesnosti dosažitelné logarithmickým pravítkem, která v mnohých případech jest zcela dostatečná.

Budiž se zřetelem k české literatuře podotčeno, že *Valouch* již v roce 1904 připojil 4-místné tabulky logarithmické ke své mathematické Sbírce vzorců. V roce 1908 vydal pak *Osovský* pro účely středoškolské „Čtyřmístné logarithmické a trigonometrické tabulky", které zavedeny ihned do mnohých českých ústavů. [2])

V *Německu* objevila se již snaha zavésti 4-místné tabulky na místo 5-místných. Přes to převládají ještě i tam tabulky 5-místné. Jaké poměry vládnou v Německu ve příčině logarith-

---

[1]) Spis „Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch" (Stuttgart).

[2]) Berichte über den mathematischen Unterricht in Österreich, Heft 13, str. 7.

mického pravítka, o tom svědčí citát ze spisu „Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland“ von F. Klein, 1913, str. 70: „In neuer Zeit begnügt man sich in speziellen Fällen, z. B. bei Berechnungen in den physikalischen Übungen, auch mit dreistelligen Logarithmen. Tafeln sind dabei wohl selten üblich, meist verwendet man die dreistelligen Logarithmen in der handlichen Form des Rechenschiebers. Auf den Rechenschieber ist schon vor langer Zeit von der Heyden hingewiesen, immerhin ist er früher kaum benutzt werden. Dass heute die Sachlage sich geändert hat, liegt allgemein in der praktischen Tendenz des modernen Unterrichts; verdienstlich waren insbesondere die Hinweise von C. H. Müller. (In Sachen des Rechenstabes. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 28 (1897), Der logarithmische Rechenstab und die Schule. Tamtéž 38 (1907), 526). Für die Schule geeignete Modelle erleichtern die Verwendung immer mehr; in den Lehrbüchern wird allerdings nur erst vereinzelt auf den Rechenschieber hingewiesen, so bei Bork-Crantz-Häntzschel, Kambly-Langyuth, in der Schülkeschen und in der Adlerschen Logarithmentafel.“

Rovněž možno vřele doporučiti, aby *do školy* byl zaveden *logarithmický abbakus* v užším slova smyslu (viz odstavce: Abakus Lalanne-ův, Multiplikační abakus nomografický, v části II. našeho článku).

O praktickém počítání ve škole podává *H. Müller* ve svém spise [3]) následující obraz: „Es muss vorgehoben werden, dass folgende drei Stufen des dezimalen, praktischen Rechnens an höheren Schulen zu unterscheiden sind: Rechnungen mit 1 und 2 Stellen auf Grund des Einmaleins; solche mit 2—4 Stellen nach dem gemeinen (Partial-) Verfahren; endlich Rechnungen mit 4 und mehr giltigen Stellen auf Grund von Tafeln. Bei der *ersten* Stufe hat man durchweg *im Kopfe* (oder mündlich) zu verfahren; das Einmaleins (ich meine das kleine und einzelne Reihen des grossen) ist gewissermassen die *erste* Zahlen-Tafel, die der Schüler benutzt und die den Vorteil hat, dass man sie ausvendig lernen kann. Die *zweite* Stufe setzt ebenfalls die Einmaleins-Tafel voraus, bedient sich aber im wesentlichen der aus dem Elementar-Unterricht zum Gemeingute gewordenen Schablone des Partial-Rechnens; bekanntlich sind diese

[3]) Der log. Rechenstab. Für die Oberklassen höh. Schulen. (Frankfurt a. M. 1899). Spis lze každému učiteli doporučiti.

Rechnungen trotz ihres holies geistigen Gehaltes in der Form recht ermüdend und geisttötend. *Hier nun setzt das log. Stabrechnen ein, aber natürlich in einer Stufe, auf welcher der Algorithmus der Logarithmen vollständig beherrscht wird, in den Oberklassen.* In den Unter- und Mittelklassen haben unsere Schüler gründlich und fleissig ihre Partial-Rechnungen nach *Adam Riese* zu üben. — In Betreff der *dritten* Rechenstufe (4 und mehr giltige Stellen) werden wohl bis auf weiteres die *Tafeln* in Gebrauch bleiben; immerhin bietet auch hier *der Rechenstab ein wichtiges Hilfsmittel* und zwar zum vorläufigen Überschlagen des Rechnens und dann zur Kontrole". — „*Ist nun nicht zu befürchten, dass das Kopfrechnen, das schon ohnehin durch das bequeme dezimale Ziffern-Rechnen geschädigt worden ist, nicht noch mehr durch das Stab-Rechnen in den Hintergrund geschoben wird?*" Na tuto otázku, mu učiněnou, odpovídá *Müller* takto: „Gerade so wie bei der Log.-Tafel liegt es in der Hand des Lehrers, das betr. Werkzeug nützlich oder schädlich wirken zu lassen. Wer die Tafel oder selbst die gewöhnlichen Ziffern-Schablonen benutzen lässt, wo man ganz oder teilweise im Kopfe rechnen muss, da werden die geistigen Kräfte des Schülers eine Lähmung erfahren; wer aber jene Hilfsmittel an der richtigen Stelle anwendet — und die wird auch ein mässig geschickter Schüler bald erkennen lernen, — wird die eintretende „Ökonomie des Geistes" dankbar empfinden, ohne eine Einbusse an logischer Schulung zu erfahren." (Esmarch betont, dass man schliesslich *rechnen* müsse, wie man *schreibt* und *liest*, nämlich ohne bewusste Kopf-Arbeit, blos durch das Auge und nennt das Stabrechnen „die Stenographie des Rechnens.")

Nebude zde nevhodno uvésti též poznámku, kterou činí R. Neuendorff[4]) slovy: „Mit Recht werden wir uns freuen können, wenn es in vernünftiger Weise möglich wird, geistige Arbeit zumal wenn sie einförmig und immer gleichartig ist, durch mechanische Hilfsmittel zu leisten. Zu dieser Art Tätigkeit gehört z. B. das Rechnen. Hochwillkommen und bald unentbehrlich sind uns heute Rechenmaschinen. Aber es muss vor Übertreibungen gewarnt werden. Die Rechenkunst soll nach wie vor sehr ernst gepflegt werden. Jene Techniker z. B., die ohne ihren Rechenschieber ganz hilflos sind, die mit ernstestem Gesicht auf ihm ablesen $2 \times 2 = 3 \cdot 999$, also rund „4" und erstaunt um sich blicken, wenn sie ausgelacht werden, sind doch ein gar trauriger Anblick; übrigens kann man ähnliches nicht nur immer wieder beim Rechenschieber, sondern gerade so gut bei Verwendung der Logarithmentafel beobachten."

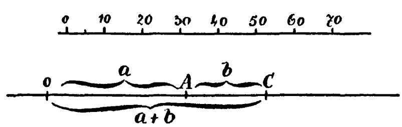
---

[4]) Praktische Mathematik. (Sbírka: Aus Natur und Geisteswelt.) Teubner 1911.

I. Logarithmické pravítko.

1. Při grafickém počítání přiřaďujeme kontinuu čísel reálných spojitou řadu bodů na přímce, vycházejíce z určitého bodu přímky jako počátku a volíce jeden z obou smyslů postupu na přímce za kladný. Za základ béřeme při tom vhodně volenou jednotku délky. Vytkneme-li nyní značkami body odpovídající arithmetické řadě čísel dekadických, nabýváme t. zv. **stupnice pravidelné.** Zvolenou jednotku délky nazýváme „modulem“ stupnice.

Užitím stupnice pravidelné možno prováděti *sečítání* a *odčítání* čísel, kterýžto způsob jest prvním základem arithmografie. Jest k tomu třeba kromě této stupnice, jíž zde nazýváme *měřítkem*, ještě *kružidla*, jež slouží k přenášení délek, a *přímky*, na kterou délky nanášíme.



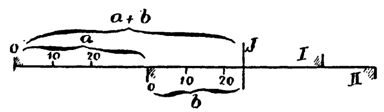
Obr. 1.

Máme-li utvořiti součet $a + b$ dvou čísel a, b, vezmeme na měřítku do kružidla délku odpovídající číslu a a naneseme ji na přímku do úsečky OA, takže možno ve smyslu tom psáti $OA = a$. (Obr. 1.)

Nyní naneseme týmž způsobem a v témž smyslu délku $AC = b$, načež získanou tím úhrnnou délku OC vezmeme do kružidla a na měřítku změříme; jest pak $OC = a + b$.

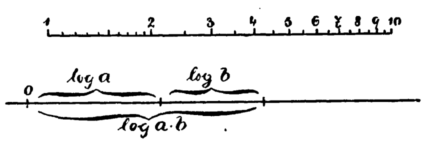
Všecky tyto operace odpadají a postup provádí se *mechanicky*, jestliže užijeme dvou shodných souběžných stupnic I, II, které lze navzájem parallelně posouvati, při čemž ku co možno rychlému a přesnému vytýkání protilehlých navzájem bodů obou stupnic užijeme s výhodou t. zv. *indexu*, t. j. jemné rýhy příčné ke směru obou stupnic a vyryté na skleněné destičce, kterou lze podél stupnic posouvati. (Obr. 2.) Na stupnici I vytkněme indexem číslo a, uveďme proti němu počátek O stupnice II, na této vyhledejme indexem číslo b a čtěme pod tímto indexem na stupnici I hledaný součet $a + b$.

2. Béřeme-li za základ stupnice funkci $y = f(x)$ tak, že nanášíme na přímku od počátku délky úměrně hodnotám funkce y a ke koncovým bodům připisujeme příslušné hodnoty proměnné x, nabýváme t. zv. *stupnice funkcionální.*



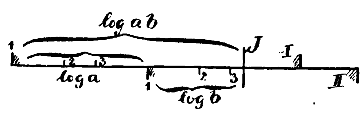
Obr. 2.

Nás zajímati bude specielně **stupnice logarithmická**, jejíž základní funkcí jest *logarithmus dekadický* $y = \log x$. Vzhledem k tomu, že $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, bude počátek logarithmické označen číslem 1 a bod 10 stupnice udává svou vzdáleností od počátku 1 jednotku délky čili modul stupnice. Logarithmickou stupnicí násobíme čísla tak, jako jsme stupnicí pravidelnou sečítali.



Obr. 3.

Jak z obrazce patrno, možno opět nanášeti délky *kružidlem* na *přímku* a měřiti je na logarithmické stupnici mající úkol *měřítka*. (Obr. 3.)



Obr. 4.

A postup stává se opět mechanickým, užijeme-li dvou shodných souběžných stupnic logarithmických I, II, navzájem posuvných, za použití posuvného indexu. (Obr. 4.)

Logarithmická stupnice má dvě význačné vlastnosti, jež jí zajišťují přední místo. Především jest to *periodicita* uspořádání dílků na stupnici, v důsledku které délka a obraz dělení pro intervaly číselné 1—10, 10—100, 100—1000 atd. jest týž, jen číslování jest 10× resp. 100× atd. větší. Důkaz snadno plyne. Uvažujme totiž jednak čísla x_1, x_2, jednak jejich násobky $x_1 = 10^n . x_1$, $x_2 = 10^n . x_2$ jednou z celistvých mocnin čísla 10. Pak vzdálenost d dílků stupnice označených čísly x_1, x_2, jest $d = m(\log x_1 - \log x_2)$, kde m značí modul stupnice, vyjádřený na př. v millimetrech; a vzdálenost D dílků x_1, x_2 jest $D = m(\log 10^n + \log x_1 - \log 10^n - \log x_2) = m(\log x_1 - \log x_2)$, takže jest $D = d$. Tím jest důkaz proveden.

Druhou význačnou vlastnost stupnice logarithmické seznáme takto[5]: Je-li modulem stupnice délka m, jest číslo y, vyznačené číslem x, kde $y = \log x$, dáno úsečkou $y . m$. Značí-li Δs dílek, jejž možno ještě odhadnouti (ježto bod na stupnici, jenž leží mezi dvěma dílky vzdálenými nejvýše 1 *mm*, dovedeme odhadnouti až asi na $^1/_{10}$ *mm*, můžeme klásti $\Delta s = 0{\cdot}1$ *mm*), můžeme vyčísti na naší stupnici číslo y přesně až na možnou chybu Δy, jež plyne z rovnice $\Delta s = m . \Delta y$, čili

$$\Delta y = \frac{\Delta s}{m}.$$

S takovou chybou nutno tedy počítati při čtení veličiny y na naší stupnici. Nyní, vzhledem k tomu, že

$$\frac{d \log nat\, x}{dx} = \frac{1}{x}, \text{ tedy } \frac{d \log x}{dx} = M \frac{1}{x},$$

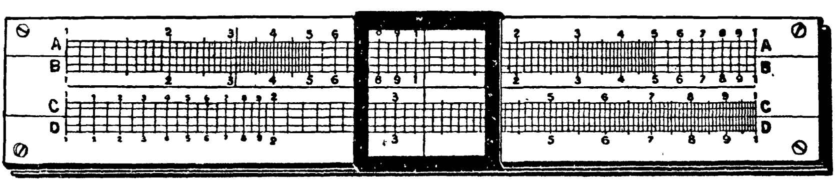
(kde koefficient M převádí logarithmus přirozený *log nat* v logarithmus dekadický *log*), platí mezi chybou Δy a příslušnou změnou Δx proměnné x přibližně vztah $\Delta y = M \frac{\Delta x}{x}$. Má tedy poměr $\frac{\Delta x}{x}$ stále touž hodnotu, pracujeme-li s touž stupnicí, čili chyba Δx jest úměrna hodnotě proměnné x. Jinak řečeno, *relativní chyba* při čtení veličiny x na stupnici logarithmické jest stálá pro touž stupnici; logarithmická stupnice vyhovuje *principu percentuálnosti.*

---

[5]) H. v. Sanden, Praktische Analysis (1914) str. 12.

3. **Logarithmické pravítko** (Logar. Rechenschieber nebo krátce Rechenschieber či Rechenstab; règle à calcul) skládá se ze tří oddělitelných částí: *pravítka* (der Stab, la règle) čili části pevné, *posouvátka* (die Zunge, la réglette), které lze ve žlábku pravítka posouvati, a *běhounu* (der Läufer, l'index), jenž jest též posuvný a obsahuje na skleněné destičce jemně vyrytou čáru, *index.* Viz obr. 5.

V Německu zabývají se výrobou log. pravítka firmy Dennert und Pape in Altona, A. Nestler in Lahr, A. W. Faber in Stein bei Nürnberg, Niethammer, Frankfurt a. M., atd. Se zřetelem k vyučování školnímu uveďme citát ze zmíněného již článku: H. Müller, Der Logarithmische Rechenstab und die Schule, Zeitschrift . . 38., str. 528: „Als *Schulstäbe* habe ich lange Zeit Karton-Stäbe benutzt, deren Leistungsfähigkeit genügend war. Um aber grössere Genauigkeit zu erzielen, wurde eine Anzahl von Präzisions-Stäben von der Schule beschafft und an die Schüler ausgeliehen. Neuerdings hat die Firma *Niethammer* (Frankfurt a. M., Rossmarkt) einen Präzisions-Schulstab aus Buchsbaum zum Preise von 4·75 *M mit Kapsel* in den Handel gebracht, der allen Anforderungen genügt und selbst dem Techniker willkommen ist. Von diesem Stabe ist alles Beiwerk (trigonometrische Skalen usf.) entfernt, doch besitzt er noch die Millimeter-Teilung am Rande und in der Tiefe, um daneben noch als gemeiner Massstab dienen zu können. Der niedrige Preis erleichtert die Anschaffung in grosser Zahl durch die Anstalt. Viele Schüler aber erwerben sich einen solchen Stab gern als Eigenthum, da sie ihn für das ganze Leben brauchen können. — Im Laufe der Obersekunda sind die Schüler im allgemeinen soweit im Gebrauch des Rechenstabs eingeübt, dass sie ihn in *allen physikalischen* Rechnungen, bei denen gewiss 3 Wertstellen genügen, gebrauchen. Im eigentlichen *mathematischen* Unterrichte wechsle man in Stereometrie und Trigonometrie *fortwährend* mit Log. Tafel und Stab, um die Übung für *beide* zu erhalten. Daneben aber ist es nötig, die *gemeinen* Rechnungsarten nach abgekürzten Methoden recht lebhaft zu betreiben. —



Obr. 5.

Technikovi a praktikovi vůbec možno doporučiti pravítko: A. W. Faber, Rechenstab Ordnungs-Nr. 378 für Elektro- und Maschinen-Ingenieure, jež obsahuje kromě stupnic základních též stupnici *log.-log.* [6])

4. Vyjměme nejprve posouvátko (předpokládáme ovšem, že čtenář má přístroj v ruce) a pozorujme jen *pravítko.* Má dvě logarithmické stupnice. *Stupnice dolní* má modul 25 *cm* a vidíme na ní ovšem zejména čísla 1, 2, .. 10, mezi nimiž jsou v přiměřeném počtu vyznačeny dílky odpovídající zlomkům desetinným. *Stupnice horní* má modul 12·5 *cm*, tedy právě poloviční, takže celá délka 25 *cm* dělí se zde na dvě stejné části, při čemž jsou vzhledem k předchozímu odstavci ve druhé části psána opět čísla 1, 2, .. 10.

Index stanoví nám v každé své poloze dva nad sebou ležící body obou stupnic. Vzhledem k souvislosti modulů obou stupnic jest číslo na horní stupnici *dvojmocí* protilehlého čísla stupnice dolní. (Stanov dvojmoci celých čísel od 1 do 10!)

Je-li číslo, jehož dvojmoc hledáme, větší než 10, vyjadřme číslo to jako součin z čísla majícího jednu cifru před tečkou a příslušné mocniny čísla 10. Každý z obou činitelů umocníme zvláště.

Tak [7])

$$0{\cdot}00376^2 = (3{\cdot}76\,.\,10^{-3})^2 \doteq 14{\cdot}2\,.\,10^{-6} = 0\,0000142.$$

Při *oddvojmocňování* pokračujeme obdobně, jenom že zde nutno vyjmouti jako činitel vždy sudou mocninu čísla 10, takže činitel druhý bude míti před tečkou buďto jednu nebo dvě cifry.

Na př. $\sqrt{0{\cdot}0455} = \sqrt{4{\cdot}55\,.\,10^{-2}} \doteq 2{\cdot}133\,.\,10^{-1} = 0{\cdot}2133.$

Příklady. $\sqrt{0{\cdot}3725} = 0{\cdot}610$, $\sqrt{0{\cdot}03725} = 0{\cdot}193$, $\sqrt{37{\cdot}25} = 6{\cdot}10$, $\sqrt{13780} = 117{\cdot}4.$

Čísla více než čtyřciferná zkrátíme na čtyřciferná.

Cvičení. Stanoviti druhou odmocninu z čísel: 187.456, 0·43823; místo nich uvažujeme čísla 18·75; 43·82.

5. Zasuňme nyní posouvátko v t. zv. **první poloze**, t. j. tak, že k horní resp. dolní stupnici pravítka přilehne shodná s ní horní resp. dolní stupnice posouvátka, o čemž se přesvěd-

[6]) Viz odst.: Stupnice log. log.

[7]) H. v. Sanden, Praktische Analysis (1914, Teubner).

číme ztotožněním počátečních a koncových bodů stupnic těch. Polohu tu možno nazvati též *přímou* polohou, neboť cifry na posouvátku stojí před námi zpříma současně s ciframi na pravítku.

Posuňme nyní posouvátko v jakoukoli délku, takže počátek stupnic posouvátka neleží proti počátku stupnic pravítka, a pozorujme na př. obě horní stupnice. Značí-li x číslo na horní stupnici A pravítka, x' číslo na horní stupnici B posouvátka, platí pro každá dvě protilehlá čísla obou stupnic vztah

$$log\, x - log\, x' = log\, a \text{ čili } \frac{x}{x_{\prime}} = a,$$

kde a jest číslo stupnice A ležící proti počátku 1 stupnice B.

Vidíme tedy, že „při prvé poloze posouvátka leží proti sobě na obou horních stupnicích čísla stálého poměru.“

Táž věta platí v tomto případě ovšem též o protilehlých navzájem číslech ξ resp. ξ' obou dolních stupnic D resp. C pravítka resp. posouvátka.

Každý zásun v prvé poloze posouvátka vede nás tudíž takto k úplně vypočtené *tabulce proporční*, t. j. tabulce poměrů, jejíž vyvození počtem by vyžadovalo značného času.

Cvičení. Zaveď takovou polohu posouvátka, která dává vzájemnou přeměnu stupňů Celsiových a Réaumurových, korun a marek atd. — Obchodník chce při prodeji zboží získati 28%; jak bude prodávati zboží, které kupuje za 1·85 K? — Dvě ozubená kola[8]) měla by míti 239 a 97 zubů; kterými menšími počty zubů možno docíliti téže přeměny rychlosti? (nutno míti ovšem na zřeteli pouze čísla celá.)

6. Jsou-li a, b daná čísla, vede nás vzhledem k právě řečenému první poloha posouvátka, při níž na dvou přilehlých stupnicích leží čísla a, b, ke stanovení všech dvojic čísel m, n, řešících úměru

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}.$$

---

[8]) Hammer, cit., str. 45.

Jinak řečeno, dává nám přímá poloha $\frac{a}{b}$ ke každému λ ve výraze

$$x = \frac{a}{b}\lambda$$

příslušnou hodnotu x; ať již při tom uvažujeme obě stupnice horní nebo obě stupnice dolní.

Je-li specielně ve výraze

$$x = \frac{a}{b}c,$$

jehož výpočet pravítkem jsme seznali, buďto $b = 1$ nebo $c = 1$, máme *součin* $x = a \,.\, c$ (na př. $2 \times 3 = 6$),

nebo *podíl* $x = \frac{a}{b}$.

Postup, jehož v tomto případě užíváme, možno vzhledem k odst. 2. pojímati též jako applikaci pravidla, že logarithmus součinu resp. podílu rovná se součtu resp. rozdílu logarithmů obou faktorů.

Často přichází v praxi též řada součinů o jednom činiteli společném

$$x = c \,.\, \lambda\,.$$

Řešení provedeme v naší prvé poloze tím, že počátek 1 posouvátka uvedeme proti číslu c pravítka, načež proti jednotlivým číslům λ posouvátka čteme na pravítku žádané výsledky x.

Pravidlo. Prve než přistoupíme k dalšímu, připomeňme čtenáři následující pravidlo, jež mu bude samozřejmým vzhledem k téže okolnosti při tabulkách logarithmických: „Při vytýkání čísla na stupnici čteme číslo to *obyčejně* bez tečky desetinné, tedy při pravých desetinných zlomcích i bez nul předcházejících cifry jeho, prostě pořadem jeho cifer; na př. čísla 12·43, 1·243, 0·1243, 0·001243 vesměs pouze 1—2—4—3. Jestliže v počítaném výraze vyskytují se všecka čísla, jež nutno navzájem násobiti nebo děliti, pouze v prvních mocninách [9]), činíme totéž ve

[9]) Není-li tomu tak, pracujeme-li tedy v průběhu počtu i s horními i s dolními stupnicemi, jest třeba jisté opatrnosti, jak jest již patrno z odst. 4.

všech faktorech počítaného výrazu a tímto způsobem čteme též výsledek výpočtu, rozhodujíce v tomto teprve pak o umístění tečky, dle pravidel v následujícím uvedených.

7. V některých případech provádíme t. zv. **proložení posouvátka.** Volme v té příčině jednoduchý příklad. Vytkněme si za úlohu stanoviti užitím *dolních* stupnic součin

$$x = 3 \,.\, 7 \,.$$

Připojením počátku 1 posouvátka k číslu 3 pravítka dospěli bychom s číslem 7 posouvátka mimo stupnici pravítka, není tedy možno takto postupovati. V tomto případě mysleme si *s počátku* součin ten proveden následujícím způsobem:

$$x = \left[\frac{3}{10}\, 7\right] . \, 10 .$$

Prvý součin provedeme dle předchozího tím, že k číslu 3 pravítka připojíme koncový bod 1 (čili 10) posouvátka, načež proti číslu 7 posouvátka čteme na pravítku výsledek 2·1. Výsledek jest tedy 21.

Jednodušeji však vede nás zde k cíli následující pojetí tohoto postupu, jež dává nám postup zcela *mechanický*: Provádíme-li žádaný součin 3×7 přímo, posouvátko *přečnívá v pravo.* Tomu zabráníme, jestliže posouvátko *proložíme v levo* o celou délku modulu. Tím přejde vyznačená stupnice 1, 2 . . 10 posouvátka na místo nejblíže předchozí části 0·1, 0·2 . . 1 nekonečně dlouhé stupnice, takže obdržíme výsledek

$$x_1 = 3 \,.\, 0{\cdot}7 = \frac{x}{10}, \text{ načež } x = 10 \times x_1 .$$

Z toho již plyne, že „kolikrát jsme během počtu provedli proložení v levo, tolikrát nutno získaný výsledek násobiti desíti."

Příklad. Stanoviti součin $x = 0{\cdot}486 \times 0{\cdot}0252$.

Pracujme stupnicemi *dolními.* Vzhledem k pravidlu v odst. 6. a postupu právě uvedenému, vytkněme na stupnici *D* číslo 4 – 8 — 6 užitím indexu. Kdybychom nyní pod index uvedli počátek 1 stupnice *C*, přečnívalo by číslo 2 — 5 — 2 této stupnice v pravo; jest nutné proložení v levo. Pod index uvedeme tudíž koncový (pravý) bod 1 stupnice *C*, načež index přesuneme na číslo 2—5—2 stupnice C. Pod indexem čteme na stupnici D číslo 1—2—2—5, čímž dostáváme sled cifer výsledku.

Nyní jest zřejmým *pravidlo o násobení*: „Abychom stanovili řád nejvyšší cifry součinu, sečteme řády nejvyšších cifer jednotlivých činitelů a k výsledku přičteme tolikrát (+ 1), kolikrát jsme během počtu prokládali v levo [10].“

Příklad. V příkladě právě provedeném jest tedy řád nejvyšší cifry výsledku dán číslem: $(-1) + (-2) + 1 = -2$, takže máme

$$x = 0{\cdot}01225. \text{ (Přesně by bylo } x = 0{\cdot}0122472).$$

Cvičení. $x = 5{\cdot}65 \times 3{\cdot}68 \times 0{\cdot}38 \times 1{\cdot}72 = 13{\cdot}6$. Opakováním předchozího postupu obdržíme sled cifer 1—3—6 konečného výsledku (jednotlivé částečné výsledky máme přechodně vytčeny indexem; na jejich hodnotě nám ovšem nezáleží). Během počtu jest třeba dvou proložení v levo, takže řád výsledku jest dán číslem

$$0 + 0 + (-1) + 0 + 2 = 1.$$

Obdobný případ nastává při *dělení*. Mějme na př. stanoviti *dolními* stupnicemi podíl

$$x = 4 : 5.$$

Připojíme-li k číslu 4 stupnice D číslo 5 stupnice C, vidíme, že počátek 1 stupnice C *přečnívá v levo* stupnicí pravítka. V tomto případě provedeme *proložení v pravo*, t. j. místo počátku stupnice 1, 2 .. 10 posouvátka užijeme jejího koncového bodu, čili počátku stupnice sousední v pravo 10, 20, .. 100. Proti koncovému bodu stupnice C čteme na stupnici D číslo 8, jež jest tedy dáno výrazem

$$x_1 = [4 : 5] \times 10, \text{ takže}$$

$$x = \frac{x_1}{10},$$

t. j. zde $x = 8 : 10 = 0{\cdot}8$.

Z toho plyne, že „kolikrát jsme během počtu provedli proložení v pravo, tolikrát nutno získaný výsledek děliti desíti.“

V důsledku toho jest nám opět zřejmým *pravidlo o dělení*: „Abychom stanovili řád nejvyšší cifry podílu dvou čísel, ode-

[10]) Srovnej: H. Müller, citovaný spis.

čteme řády nejvyšších cifer dělence a dělitele a od výsledku odečteme (+ 1), jestliže jsme během počtu prokládali v pravo."

Příklad. Stanoviti podíl $x = 6{\cdot}54 : 0{\cdot}778$. ($x = 8{\cdot}40$).

Užitím proložení v pravo stanovíme sled cifer výsledku 8—4—0. Pro jeho řád obdržíme: $0 - (-1) - 1 = 0$.

Příklad. Stanoviti podíl [11])

$$x = \frac{13{\cdot}6}{5{\cdot}65 \times 3{\cdot}68 \times 1{\cdot}72}.$$

Opakujíce předchozí postup, dělíme za sebou čísly 5—6—5, 3—6—8, 1—7—2, při čemž částečné výsledky, na jichž hodnotě nám nezáleží, máme přechodně vyznačeny indexem. Pro výsledek obdržíme cifry 3 8 0, při čemž bylo třeba celkem dvou proložení v pravo. Řád výsledku obdržíme, opakováním předchozího pravidla, dán číslem

$$1 - 0 - 0 - 0 - 2 = -1, \text{ takže } x = 0{\cdot}38.$$

8. Znamenitou výhodu skýtá nám užití logarithmického pravítka při výpočtu výrazů tvaru

$$x = \frac{a}{b} \cdot \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdots \frac{a_n}{b_n}\, c,$$

kde ovšem mohou některá čísla a i b i číslo c býti rovna 1. Uveďme proti číslu a stupnice D číslo b stupnice C, posuňme index na a_1 stupnice C, uveďme pod tento index číslo b_1 stupnice C, posuňme index na a_2 této stupnice, uveďme pod něho její číslo b_2, atd., až proti číslu c stupnice C čteme na stupnici D výsledné číslo x.

Vidíme zde, že následkem užití indexu dospíváme při výrazech takového druhu velmi rychle k cíli, jestliže provádíme střídavě dělení a násobení.

Je-li v takovémto případě nutno proložení v levo resp. v pravo, nutno ovšem při hledání řádu výsledku bráti k tomu zřetel dle předchozích pravidel.

Příklad. Vypočti

$$x = \frac{316 \times 913 \times 0{\cdot}3}{45 \times 37{\cdot}6 \times 70}.$$

---

[11]) H. Müller, cit., str. 22.

Pracujíce, jako dosud stále, stupnicemi *dolními*, řídíme se vytčeným postupem střídavého násobení a dělení. Zachováme-li daný pořádek činitelů:

$$\frac{316}{45} \times \frac{913}{37{\cdot}6} \times \frac{0{\cdot}3}{70},$$

užijeme jediného proložení v pravo při posledním dělení. Výsledek jest dán ciframi 7 3 1. Řád jeho obdržíme opakováním předchozího pravidla o násobení a pravidla o dělení dán číslem

$$(+2)-(+1)+(+2)-(+1)+(-1)-(+1)-1=-1;$$

$$x = 0{\cdot}731.$$

Příklad. Vypočti

$$x = \frac{1{\cdot}25 \times 2{\cdot}48 \times 0{\cdot}13 \times 0{\cdot}245}{3{\cdot}13 \times 0{\cdot}995}.$$

Piš na př. ve tvaru

$$\frac{1{\cdot}25}{3{\cdot}13} \times \frac{2{\cdot}48}{0{\cdot}995} \times 0{\cdot}245 \times 0{\cdot}13.$$

Pravidlo. Při každém numerickém počtu nutno provésti kontrolu správnosti. V případech právě uvažovaných provedeme kontrolu nejjednodušeji tím, že faktory navzájem přemístíme. — V případech, kdy jest třeba výsledek stanoviti přesně na více než 3 místa, skýtá nám užití logarithmického pravítka kontrolu velmi rychlou a spolehlivou.

9. V předchozích případech, kde faktory byla vesměs čísla v prvních mocninách, bylo možno užívati stále jenom stupnic dolních. Zcela stejně mohli jsme ovšem pracovati stupnicemi horními. Stupnice dolní však, majíce větší modul, vedou nás ku přesnějším výsledkům, doporučuje se tedy v příkladech takového druhu užívati výhradně jen stupnic dolních.

Ježto však vzhledem k dalšímu jest nutna jistá zběhlost v provádění předchozích příkladů užitím stupnic horních, budiž v té příčině uvedeno: Pracujeme-li se stupnicemi horními, možno prokládati buď o jednoduchou délku modulu (t. j. o polovinu celé vyznačené stupnice) nebo o dvojnásobnou délku modulu (t. j. o celou délku stupnice vyznačené), následkem čehož získaný výsledek násobíme resp. dělíme pak buďto 10^1 nebo 10^2, jestliže jsme prokládali v levo resp. v pravo. Proložení v levo o jednu délku modulu nevyžaduje v mnohých případech skutečného přesouvání posouvátka, nýbrž jest zde mnohdy prostě možno přejíti od pravé poloviny stupnice posouvátka k její polovině levé, nebo, což jest v podstatě totéž, od levé poloviny stupnice pravítka k její polovině pravé (na př. při součinu $3 \times 7 = 21$ neprokládáme, nýbrž výsledek čteme v pravo).

Cvičení. Proveď některé předchozí příklady užitím horních stupnic.

Jestliže při provádění předchozích operací místo obou stupnic dolních nebo obou stupnic horních užíváme střídavě **stupnic obojího druhu** na pravítku a posouvátku, nabýváme jednoduchého způsobu výpočtu součinů a podílů, jejichžto některé faktory jsou kvadráty neb odmocniny. Především nabudeme vhodnou kombinací stupnic těch výpočtu všech proporcí

$$x = \frac{\alpha}{\beta} \gamma,$$

kde faktory α, β, γ jsou střídavě první mocniny, dvojmoci a odmocniny (druhé) čísel.

Jak již podotčeno v pravidle v odst. 6., není zde ovšem možno z jednotlivých čísel ve faktorech obsažených vytýkati libovolné mocniny čísla 10.

Příklady. Stanovme na př. druhou odmocninu ze součinu nebo podílu

$$x = \sqrt{a \,.\, b}, \quad x = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Výraz pod znaménkem vypočteme užitím horních stupnic, takže tento částečný výsledek obdržíme na stupnici A, načež konečný výsledek obdržíme užitím indexu pod ním na stupnici D. — Zde jest nutno bráti zřetel k tomu, že výraz pod odmocnítkem možno úhrnem násobiti (nebo děliti) jen sudou mocninou čísla 10.

Tak $\sqrt{1{\cdot}75 \times 0{\cdot}0342} = \sqrt{1{\cdot}75 \times 3{\cdot}42} \times 10^{-1} = 0{\cdot}2447$ (přesněji $0{\cdot}24465$).

Výrazy tvaru

$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}, \quad \sqrt{\frac{a^2}{b}} = a\sqrt{\frac{1}{b}}, \quad \sqrt{\frac{a^2 b}{c}} = a\sqrt{\frac{b}{c}}$$

nevyžadují již zvláštního vysvětlení.

Výrazy

$$x = a^2 b, \quad x = \frac{a^2}{b}.$$

Nad číslem a stupnice D umístíme počátek 1 posouvátka, načež nad číslem b stupnice B čteme na A číslo $a^2 b$. Nebo nad řečeným číslem a umístíme číslo b stupnice B, načež nad počátkem 1 čteme na A číslo $\frac{a^2}{b}$.

Analogického postupu vyžadují výrazy

$x = \frac{a}{b^2}$ (a na A méně b na C, výsledek na A indexem),

$x = \frac{a}{\sqrt{b}}$ (a na D méně b na B), $x = \frac{\sqrt{a}}{b}$ (a na A méně b na C, výsledek na D).

Cvičení. Maje na zřeteli upozornění ve příčině vytýkání mocnin čísla 10, vypočti [12]: $27{\cdot}3 \times 4{\cdot}25^2 = 493$, $\frac{3{\cdot}75^2}{5{\cdot}14} = 2{\cdot}735$ (přesněji $2{\cdot}736$), $\frac{17{\cdot}5}{4{\cdot}14^2} = 1{\cdot}022$, $\sqrt{9{\cdot}55} \times 3{\cdot}125^2$ $= 9{\cdot}655$ (přesněji $9{\cdot}6572$).

$$x = \sqrt{\frac{0{\cdot}0375}{124}}, \quad x = \sqrt{\frac{0{\cdot}0035 \times 9{\cdot}81}{3{\cdot}425}}.$$

Jaký jest průměr měděného drátu, jehož $24{\cdot}5$ *m* váží $7{\cdot}43$ *kg*? (spec. hmota $8{\cdot}85$.) — Rotační kužel z kamene spec. hmoty $2{\cdot}24$ má základnu o průměru $1{\cdot}24$ *m* a výšku $1{\cdot}97$ *m*; co váží? — Jakým břemenem [13]) možno zatížiti přímou tyč čtvercového průřezu o straně 19 *mm*, snese-li kujné železo, z něhož jest vyrobena, tah 35 *kg* na 1 mm^2 a žádáme-li 10tinásobně zajištění poručení tyče?

Ježto v praksi pracujeme často s číslem π, bývá na stupnici naneseno*) jak číslo

$$\pi = 3{\cdot}142, \text{ tak číslo } \frac{\pi}{4} = 0{\cdot}7854.$$

---

[12]) Hammer, cit., str. 55 a další.

[13]) Anleitung zum Gebrauche der A. W. Faber Rechenstäbe (1912), str. 12.

*) Ve příčině dalších značek viz odst. 14.

Též nalézáme značky

$$C = 1{\cdot}128\ldots = \frac{2}{\sqrt{\pi}},\quad C1 = 3{\cdot}568\ldots = 2\sqrt{\frac{10}{\pi}}.$$

Poznámka. Užitím logarithmického pravítka a tužky počítáme rychle výrazy $\sqrt{a^2 \pm b^2}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2$ atd.

Logarithmického pravítka užijeme též při přibližném vyčíslování výrazů dle vzorců

$$\sqrt[n]{(1 \pm \delta)^p} = 1 \pm \frac{p}{n}\,\delta,\quad \sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2a},\ \text{je-li}\ (b < a);$$

$$\frac{a}{b \pm \delta} = \frac{a}{b} \mp \frac{a\delta}{b^2}\ \text{(je-li } \delta \text{ vůči } b \text{ velmi malé) atd.}$$

(Pokračování.)

Příspěvek ke kuželosečkám.

Podává **Václav Hübner**, školní rada na Král. Vinohradech.

Rovnice elipsy má též tvar $x = a \cos\varphi$, $y = b \sin\varphi$ (a, b jsou poloosy a φ úhel, který svírá paprsek procházející počátkem s kladným směrem osy x-ové). Elipsu možno z těchto rovnic — jak známo — sestrojiti užitím soustředných kružnic o poloměrech a, b, nebo provésti kladením proužku papíru, na který přenesen buď součet nebo rozdíl poloos.

Ježto $\frac{x}{a} = \cos\varphi$, $\frac{y}{b} = \sin\varphi$,

jest $$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

K bodu $m\ (x, y)$ lze sestrojiti příslušný úhel φ, jak z obr. 1. jest zřejmo.

Ježto se hodnoty $\cos\varphi$ a $\sin\varphi$ pohybují v mezích od 0 až do ± 1, není na křivce bodu, jehož x a y by bylo nekonečně veliké, t. j. elipsa nemá bodů v nekonečnosti.

Směrnice tečny A_T příslušná bodu $m\ (x, y)$ jest

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\cot\varphi = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

a směrnice normály

$$A_N = \frac{a}{b}\,tg\,\varphi = \frac{a \sin\varphi}{b \cos\varphi} = \frac{a^2y}{b^2x}.$$