

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 45 (1916), No. 1, 124--128

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/121025>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1916

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

- Lva a Panny (AR 175°, $\delta + 10^\circ$); let volný. Činný do do 14. — *Radiant* v souhvězdí Lva (AR 166°, $\delta + 4^\circ$); let volný, dráha jasná. Činný do 4.
2. *Min. Algolu* 6^h 47^m.
- 3.
5. 11^h *konjunkce* Jupitera s Měsícem.
7. 2^h *konjunkce* Venuše s Měsícem.
9. 23^h Merkur v odsluní.
- 11.
12. 21^h *konjunkce* Saturna s Měsícem.
13. 15^h Mars v odsluní.
15. 14^h *konjunkce* Marta s Měsícem.
16. *Min. Algolu* 14^h 52^m.
18. *Radiant* v souhvězdí Cephea (AR 316°, $\delta + 76^\circ$); let volný, dráha jasná.
19. *Min. Algolu* 11^h 41^m.
20. 12^h rovnodennost jarní: *Začátek jara*.
22. *Min. Algolu* 8^h 29^m.
24. *Radiant* v souhvězdí Velkého Vozu (AR 161°, $\delta + 58^\circ$); let rychlý.
- 26.
27. *Radiant* mezi souhvězdím Koruny a Boota (AR 229°, $\delta + 32^\circ$); let rychlý, dráha slabá.
31. 5^h Venuše v přísluní. S.

Úlohy.

a) Z matematiky.

1.

Určiti jest geometrické místo bodů, jichž poláry vzhledem k parabole $y^2 = 2px$ jsou tečnami ellipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

† Dr. Vladimír Živanský.

2.

Kosočtverec, jehož plocha jest 100, má jednu úhlopříčku na přímce $3x + 4y - 22 = 0$, protilehlý vrchol v bodě $A(8, 12)$. Jaké jsou souřadnice ostatních vrcholů?

Dr. Marie Nábělková.

3.

Sestrojiti ohniska ellipsy, dán-li její střed S , tečna t s bodem dotyčným T a délka velké poloosy a .

Dr. V. Hruška.

4.

Dokažte analyticky větu, že kružnice jdoucí průseččky tří tečen paraboly jde ohniskem. Použijte této věty ke konstrukci paraboly ze čtyř tečen.

Týž.

5.

Proměnný pravouhlý rovnoramenný trojúhelník ABC otáčí se kolem vrcholu $y^2 = 2px$, kdežto vrchol C pravého úhlu šine se po parabole. Které geometrické místo opisuje vrchol B ?

Jiří Archleb, prof. r. v Č. Budějovicích.

6.

Do rovnoramenného trojúhelníka o základně $2q$ a výšce p vepište ellipsu, jejíž osa splývá s výškou trojúhelníka, tak aby obsah ellipsy byl co největší. Jaký bude výsledek pro trojúhelník rovnostranný?

Týž.

7.

Do kruhu narýsovatí daný úhel α jakožto úhel obvodový tak, aby plocha omezená rameny jeho a příslušným obloukem byla maximální.

Školní rada V. Hübner.

8.

Kdy jest harmonický průměr dvou čísel současně harmonickým průměrem arithmetického a geometrického průměru těchto čísel.

Jan Svoboda, úř. hypot. banky v Brně.

9.

Které trojčíslné číslo děleno číslem, vzniklým z něho tím, že píšeme číslice v obráceném pořádku, dává zbytek rovný součtu jeho číslic?

Prof. Antonín Lochmann.

10.

V trojúhelníku ostroúhlém platí vztah

$$\frac{u_1 u_3}{ab} + \frac{u_2 u_3}{bc} + \frac{u_3 u_2}{ca} = 1,$$

značí-li u_1, u_2, u_3 části výšek od vrcholů k jejich průsečíku.

Týž.

11.

Dokažte, že číslo $A_n = 4^n + 5$, $n = 1, 2, 3, \dots$, není současně dělitelno 7 a 9.

Prof. M. Haas.

12.

Rotační kužel má danou stranu s . Jak musíme voliti ostatní jeho rozměry, aby koule vepsaná měla objem co největší?

Týž.

13.

Řešiti jest rovnici

$$(x + 1)^{12} + (x - 1)^{12} = 2(x^4 + 6x^2 + 1)^3.$$

Prof. R. Hruša.

14.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z + xyz &= 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= x^2 y^2 z^2 - 1 \\ xy + yz + zx &= 2. \end{aligned}$$

Týž.

15.

Naléztí největší číselný součinitel v rozvoji

$$(5x + 2y)^{15}.$$

Týž.

16.

Který vztah musí býti mezi veličinami a, b, c, d , aby platily současně rovnice

$$xzu + y^2u + yz^2 - ayzu = 0$$

$$yux + z^2u + zu^2 - bzux = 0$$

$$zxy + u^2y + ux^2 - cuxy = 0$$

$$uyz + x^2y + xy^2 - duy = 0.$$

Prof. Jan Schuster.

17.

Do paraboly vepište maximální lichoběžník nad danou tětivou rovnoběžnou s tečnou vrcholovou, nad kratší základnou nový a podobně dále do nekonečna. Který jest obsah všech těchto lichoběžníků?

Týž.

18.

Vrcholy AB trojúhelníků ABC se posunují po osách souřadných, při čemž C opisuje ellipsu. Dokažte, že její plocha jest $\frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$.

Týž.

19.

Trojúhelník ABC má stranu AB pevnou a vrchol C se pohybuje tak, že úhel, pod nímž je z C viděti stranu AB , je týž jako úhel, v němž se jeví strana AC z daného pevného bodu D , jenž leží v prodloužení strany AB . Nalezněte geometrické místo bodu C .

Týž.

20.

Objem pravouhlého rovnoběžnostěnu jest roven dvojnásobnému součinu řezu, jenž jde třemi rohy ležícími na hranách téhož trojhranu a vzdálenosti obou možných řezů rovnoběžných. Čtverec plochy tohoto řezu jest roven součtu čtverců plochy trojúhelníka, sestrojeného z rozměrů rovnoběžnostěnu a čtverce nad polovicí tělesné úhlopříčky.

Týž.

21.

Promítneme-li tři hrany pravouhlého rovnoběžnostěnu, jež s tělesnou úhlopříčkou tvoří sborcený čtyřúhelník, na rovinu kolmou k úhlopříčce, vznikne trojúhelník, jehož obsah nezávisí na sledu rozměrů a jest roven $\frac{abc}{2u}$. Osy tělesných úhlopříček a hran s nimi mimoběžných, jež označíme v_a , v_b , v_c , splňují relaci

$$\frac{1}{v_a^2} + \frac{1}{v_b^2} + \frac{1}{v_c^2} = 2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).$$

Hrana je střední měřickou úměrnou tělesné úhlopříčky a svého průmětu na úhlopříčku mimoběžnou. Týž.

22.

Stanovte objem tělesa, jež vznikne, otočí-li se prostorový čtyřúhelník příkladu předešlého kolem tělesné úhlopříčky.

Týž.

Řešení úloh.

Řešení úloh buďtež zaslána do 15. dubna 1916 na adresu: S. doc. Dr. K. Rychlík, v Praze II., Mikulandská 3.

Páni řešitelé se žádají, aby řešení každé úlohy bylo napsáno *zvlášť* na jednu neb několik čtvrtek papíru obyčejného formátu. V čelo *každého* řešení budiž uvedeno číslo úlohy (text úlohy není nutno psát), jméno řešitele a ústavu, na němž studuje. Řešení buďtež seřazena dle čísel, a jsou-li zasílána v obalu menšího formátu než čtvrtkového, jako celek složena. Zároveň uveďte páni řešitelé při poslední zásilce na zvláštním lístku papíru seznam všech řešení, která vůbec zaslali.

Mimo to je nutno, aby páni řešitelé uvedli přesnou adresu svou, aby mohly býti ceny správně rozeslány.