Bohumil Bečka

Příspěvek k theorii tečen a asymptot křivek rovinných

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 8 (1879), No. 2, 59--74

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121017`

se Fourier na škole normální dodělal, získaly mu věhlasnosť v takovém stupni, že brzy odtud byl povolán za učitele na školu polytechnickou.

(Pokračování.)

Příspěvek k theorii tečen a asymptot křivek rovinných.

Podává

Dr. Boh. Bečka,
assistent při c. k. hvězdárně.

Analytická geometrie učinila od dob Cartesiových značný pokrok ku předu. Kdežto dřívější analytisté hlavně ku správnosti jednotlivých důkazů přihlíželi, málo dbajíce o to, aby důkaz byl co možná zaokrouhlený a přehledný, jest hlavní snahou novější analytiky, aby celý postup počtu stal se vždy co nejjednodušším a forma výrazů pro výsledky co nejelegantnější. Účelu toho hledí se pak dosíci vhodnou symbolikou, jednak i zavedením souřadnic všeobecnějších, než jaké jsou souřadnice Cartesiovy; z oné tanou nám zde na mysli hlavně determinanty, z těchto souřadnice Plückerovy*) a Hesseovy, o nichž lze vším právem říci, že se jimi vyšinula analytika k témuž stupni dokonalosti, na jakémž stojí geometrie novější, stavši se odborem mathematiky stejně oprávněným a přijavši na se ráz rovněž moderní. —

---

*) Značíli $p, q, r \dots s$, lineární funkce souřadnic rovnoběžných, značí rovnice

$$F(p, q, r, \dots s) = 0,$$

kdež jest F funkce stupně n-tého funkcí $p, q, \dots s$, křivku téhož stupně. Tohoto způsobu vyjadřování křivek rovinných užil slavný Plücker, professor mathematiky na universitě v Halle, později v Bonnu s výsledkem překvapujícím ve spisech svých o analytické geometrii, z nichž zvláště připomínáme „System der analyt. Geometrie“ (roku 1835), a „Theorie der algeb. Curven“ (z roku 1839); jest však s podivením, že se v knihách o analytice křivek rovinných vůbec a kuželoseček zvlášť souřadnice ty obyčejně mlčením pomíjejí, ač by se jimi často mnoho práce a času uspořilo.

Následujícími problemy budiž tu poukázáno k tomu, jak lze mnohdy zavedením vhodné symboliky vtěsnati výrazy jinak rozsáhlé v dosti úzký rámec, má-li se zároveň k theorii determinantů patřičný zřetel.

1. Problem.

Předložena jest všeobecná rovnice křivky stupně n-tého a sice ve formě

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} [ax + by]^k = 0; \tag{1}$$

má se vyšetřiti třída této křivky.

a) Abychom tento pro celou theorii singularit křivek algebraických důležitý úkol rozřešili, připomeňmež si známé podmínky, kteréž platí, má-li rovnice

$$a_0 + \sum_{n=1}^{n} a_k x^k = 0 \tag{2}$$

$(m+1)$ stejných kořenů, a jež lze nejpohodlnější vyvinouti, uváží-li se, že jest v rovnici (2)

$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0,$$

jestli $x = 0$ kořenem $(m+1)$-násobným; nechť jest totiž $x = h_1$ kořen téže rovnice, takže položíme-li v ní

$$x = \xi + h_1,$$

plyne zmocněním dle poučky binomické

$$a_0 + \sum_{n=1}^{n} a_k h_1^k + \xi \sum_{k=1}^{n} k a_k h_1^{k-1} + \xi^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} a_k h_1^{k-2} + \ldots$$
$$+ a_n \xi^n = 0.$$

Má-li tedy býti $\xi = 0$ aneb $x = h_1$ $(m+1)$-násobným kořenem poslední rovnice, jest nutno, aby dle učiněné poznámky

$$\left.\begin{array}{lll}
a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k h_1^k = 0 & \text{co součinitel při} & \xi^0 \\
\sum\limits_{k=1}^{n} k a_k h_1^{k-1} = 0 & \text{„ \quad „} & \xi^1 \\
\vdots & & \vdots \\
\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{k}{m} a_k h_1^{k-m} = 0 & \text{„ \quad „} & \xi^m
\end{array}\right\} \tag{3α}$$

aneb podlé známého označení *)

$$\left.\begin{aligned}(a)_0 &= 0\\ (a)_1 &= 0\\ (a)_2 &= 0\\ &\vdots\\ (a)_m &= 0\end{aligned}\right\} \tag{3β}$$

Podmínky tyto stanou se mnohem průzračnější, položíme-li v rovnici (2) symbolicky

$$a_k \equiv \binom{n}{k} (a^{n-k} b^k),$$

čímž se táž promění v novou, totiž:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (a^{n-k} b^k) x^k \equiv (a + bx)^n = 0\,, \tag{3γ}$$

a příslušné podmínky pro $(m+1)$-násobné kořeny obdrží pak tvar

$$\left.\begin{aligned}(a + bh_1)^n &= 0\\ nb\,(a + bh_1)^{n-1} &= 0\\ 2\binom{n}{2} b^2 (a + bh_1)^{n-2} &= 0\\ &\vdots\\ m!\binom{n}{m} b^m (a + bh_1)^{n-m} &= 0\end{aligned}\right\}. \tag{3δ}$$

Relace (3) mohou vždy platnosti nabýti, obsahuje-li rovnice m proměnných parametrů $v_1, v_2, v_3 \ldots v_m$; tehdy lze totiž vyloučením těchto z rovnic (3) stanoviti $(m+1)$-násobné kořeny h_1, a pomocí jich pak parametry samy blíže určiti. Pro lepší objasnění ustanovmež, kolik soustav proměnných parametrův $v_1\ v_2 \ldots v_m$ lze voliti tak, aby rovnice

$$\sum_{k=0}^{n} \{ a_k + v_1 b_k + v_2 c_k + \ldots v_m m_k \} x^k = 0\,.$$

měla pro každou z nich kořen $(m+1)$-násobný.

---

*) Viz: Časopis pro pěstování math. roč. VI. čís. 1. pag. 11. rov. (4)

Podmínky (3β) zní pro tento případ

$$
\begin{array}{l}
(a)_0 + v_1 (b)_0 + v_2 (c)_0 + \ldots + v_m (m)_0 = 0 \\
(a)_1 + v_1 (b)_1 + v_2 (c)_1 + \ldots + v_m (m)_1 = 0 \\
(a)_2 + v_1 (b)_2 + v_2 (c)_2 + \ldots + v_m (m)_2 = 0 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
(a)_m + v_1 (b)_m + v_2 (c)_1 + \ldots + v_m (m)_m = 0
\end{array}
$$

aneb vyloučíme-li veškerá v,

$$
\begin{vmatrix}
(a)_0 & (b)_0 & (c)_0 & \ldots & (m)_0 \\
(a)_1 & (b)_1 & (c)_1 & \ldots & (m)_1 \\
(a)_2 & (b)_2 & (c)_2 & \ldots & (m)_2 \\
\vdots & \vdots & & & \\
(a)_m & (b)_m & (c)_m & \ldots & (m)_m
\end{vmatrix} = 0
$$

a též kratčeji dle označení Cauchyho

$$\Sigma \pm (a)_0 (b)_1 (c)_2 \ldots (m)_m = 0.$$

Přihlédneme-li tu k významu jednotlivých prvků tohoto determinantu, seznáme, že v každém členu posledního součtu objeví se součin

$$\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3} \ldots \binom{n}{m} a_n b_n c_n \ldots m_n x^n x^{n-1} x^{n-2} \ldots x^{n-m};$$

součiny tyto podvojně se ruší, a v celku vyskytne se co nejvyšší mocnosť při x číslo

$$\{n + (n-1) + (n-2) \ldots (n-m)\} - 1 = \frac{(m+1)(2n-m)-2}{2}$$

Dle tohoto výsledku jest $\frac{(m+1)(2n-m)-2}{2}$ soustav možných, z nichž pro každou obdrží rovnice (4) kořen $(m+1)$-násobný. Přičiníme se, abychom výsledku tohoto v geometrii zužitkovali, řešíce následující úkol všeobecný:

Dány jsou funkce stupně n-tého U_n, U_n', U_n'' ... $U_n^{(m)}$ pravoúhlých souřadnic v tvaru (1); má se rozhodnouti, zdaž rovnice s m proměnnými parametry v

$$U_n + v_1 U_n' + v_2 U_n'' \ldots + v_m U_n^{(m)} = 0 \ldots \qquad (5\alpha)$$

též ony křivky značí, jichž $(m+1)$ průsek s danou přímkou

$$y = \alpha x + \beta \qquad (5\beta)$$

v jedno splývá, a značí-li, mnoho-li jest takovýchto křivek. Řešení tohoto úkolu nečiní žádných obtíží; vložíme-li totiž hodnotu za y z rovnice (5β) do rovnice (1), obdržíme co všeobecný člen v (5α) výraz

$$v\left\{a_0+\sum_1^n\{(a+b\alpha)x+b\beta\}^k\right\}=vU_n,$$

aneb umocníme-li podlé poučky binomické, značíce jednotlivé součinitele při x^0, x^1, x^2, ... x^n zkrátka A_0, A_1, A_2 ... A_n, též

$$vU_n=v\sum_{k=0}^n A_k x^k.$$

Pro průseky křivky (5α) s danou přímkou (5β) plyne tudíž rovnice

$$\sum_{k=0}^n A_k x^k+v_1\sum_{k=0}^n A_k' x^k+v_2\sum_{k=0}^n A_k'' x^k+\ldots+v_m\sum_{k=0}^n A_k^{(m)} x_k=0,$$

aneb zřetelněji

$$\sum_{k=0}^n\left\{A_k+v_1 A_k'+v_2 A_k''\ \ldots\ +v_m A_k^{(m)}\right\}x_k=0,$$

kterýžto tvar s tvarem (4) úplně souhlasí; *dle toho zahrnuje rovnice* (5α) $\dfrac{(m+1)(2n-m)-2}{2}$ *takových křivek, kteréž tou vlastností se honosí, že mají s jistou přímkou v jistém bodě styk* ($m+1$)*-bodový.*

Pro $m=2$ obdrží rovnice (5α) tvar:

$$U_n+v_1 U_n'+v_2 U_n''=0,$$

kterýž znače síť křivek stupně n-tého, dává následující větu:

V síti křivek stupně n-tého jsou ($3n-4$) *křivky, jimž jest daná přímka tečnou obratu.*

Pro $m=1$ promění se táž rovnice v jednodušší

$$U_n+v_1 U_n'=0,$$

kteráž však značí svazek křivek stupně n-tého t. j. veškeré křivky procházející všemi n^2 průseky křivek

$$U_n=0,\ U_n'=0.$$

Tím dokázaná jest následující jednoduchá věta:

Ve svazku křivek stupně n-tého jest všeobecně $2(n-1)$ *křivek, jimž jest určitá přímka společnou tečnou;* ve svazku kuželoseček tedy dvě.

Poznámka. Každá z křivek svazku protíná přímku onu v n bodech, kteréž však v takové vzájemné souvislosti se nacházejí, že jedním z nich, na př. (h_1, h_2) též $(n-1)$ ostatních jest určeno; neboť pro tento bod plyne dle (6γ)

$$v_1 = -\int_{y=h_2}^{x=h_1} \frac{U_n}{U'_n},$$

čímž bodu $(h_1\ h_2)$ přidružená křivka a tudíž i veškeré ostatní průseky její s přímkou přesně jsou stanoveny; pro veškerá v obdržíme veškeré křivky svazku s příslušnými soustavami průsekův; o takovýchto soustavách n bodů na přímce, z nichž každá jedním z bodů úplně jest určena, díme, že jsou v *involuci* stupně n-tého, v níž dle našeho vyšetření $2(n-1)$ bodů dvojných se vyskytuje.*)

Obdobný výsledek reciproční bychom též o svazku křivek třídy n-té stvrditi mohli.

b.) Majíce již hlavní prostředek po ruce, přikročíme k řešení původního problemu.

Jak známo, nazývá se třídou křivky číslo udávající, mnoho-li tečen z libovolného bodu ku křivce vésti lze; vyšetříme nejprvé číslo toto vzhledem k počátku souřadnic aneb hleďmež udati, mnoho-li tečen s počátku souřadnic ku křivce (1) vésti lze.

Rovnice tečny zní v tomto případě

$$y = \alpha x, \tag{6}$$

kdež α blíže jest stanoviti, pomocí této hodnoty y plyne z (1) pro průseky

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a + b\alpha)^k x^k = 0, \tag{6α}$$

kterážto rovnice, ježto jest přímka tečnou dva stejné kořeny obsahuje, platí tedy též dle podmínek (3α)

$$\sum_{k=1}^{n} k\,(a + b\alpha)^k x^{k-1} = 0. \tag{6β}$$

Vyloučením úsečky x z rovnic (6α) a (6β) nabudeme rovnice pro α, jejíž stupeň jest nám vyšetřiti. Za tou příčinou položme symbolicky

$$(a + b\alpha)^k = a_k + \binom{k}{1}(a_{k-1} b_1)\,\alpha + \binom{k}{2}(a_{k-2} b_2)\,\alpha^2 + \dots + b_k\,\alpha^k = N_k\,. \tag{7}$$

*) Viz: „Cremona: Úvod do geom. theorie křivek“ pag. 25. a pag. 56.

a pišme rovnice (6α) a (6β), $\left\{\begin{matrix}\text{první}\\\text{druhou}\end{matrix}\right\}$ veličinou $\left\{\begin{matrix}n\\x\end{matrix}\right\}$ násobíce ve formě

$$na_0 + n\sum_{k=1}^{n-1} x^k N_k + nx^n N_n = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} kx^k N_k + nx^n N_n = 0\,;$$

jichž odečtením plyne nová

$$na_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\, x^k N_k = 0 \ldots \qquad (6\gamma)$$

Vyloučíme-li nyní z (6α) a (6γ) dle methody Bézoutovy veličinu x, objeví se pro α následující diskriminant:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_0 & N_1 & N_2 & \ldots & N_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & N_1 & \ldots & & N_n & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \ldots & & & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & & & & N_n \\ na_0 & (n-1)\,N_1 & (n-2)\,N_2 & \ldots & & & & 0 \\ 0 & na_0 & (n-1)\,N_1 & \ldots & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & & & & N_{n-1} \end{vmatrix} = 0, \quad (8)$$

kdež počet null v první řádce $(n-2)$ obnáší. Nebude obtížno seznati stupeň, v jakémž se tu α objeví; rozviňmež totiž jednotlivá N v mysli podlé relace (7), a rozložme pak $\varDelta$ v součet determinantů; v součtu tomto vyskytne se též determinant nejvyšší mocnosti α z jednotlivých N obsahující, na němž jedině stupeň rovnice $\varDelta = 0$ bude závislým a jenž zní:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_0 & b_1\,\alpha & b_2\,\alpha^2 & \ldots & b_n\,\alpha^n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & b_1\,\alpha & \ldots & & b_n\,\alpha^n & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & & & & & b_n\,\alpha^n \\ na_0 & (n-1)\,b_1\,\alpha & (n-2)\,b_2\,\alpha^2 & \ldots & & & & & 0 \\ 0 & na_0 & (n-1)\,b_1\,\alpha & \ldots & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & & & & & b_{n-1}\,\alpha^{n-1} \end{vmatrix}$$

násobíme-li tu 2. 3. 4. $(n-1)$-ní řádku vztahmo veličinami $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^{n-2}$, a podobně $(n+1)$; $(n+2) \ldots (2n-1)$-ní veličinami $\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots \alpha^{n-1}$, celý determinant tedy hodnotou $\alpha^{(n-1)^2}$, získáme relaci

$$\alpha^{(n-1)^2} \delta \equiv \alpha^{(2n-1).(n-1)} \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 \ldots b_n & 0 \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & b_1 \ldots & b_n \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ na_0 & (n-1) & b_1 \ldots & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 \ldots & & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

aneb

$$\delta = const.\ \alpha^{n(n-1)}.$$

Podlé tohoto výsledku lze vésti z počátku souřadnic ku křivce všeobecně $n(n-1)$ tečen; poněvadž však u volbě počátku ničím nejsme omezeni, platí totéž o každém bodu roviny; tím dokázáno:

Křivka stupně n-tého jest všeobecně $n(n-1)$ třídy.

Pro kuželosečky

$$a_0 + \sum_{k=1}^{2} \{ax + by\}^k \equiv a_0 + a_1 x + b_1 y + a_2 x^2 + 2(a_1 b_1) xy + b_2 y^2 = 0$$

jest

$$\varDelta \equiv \begin{vmatrix} a_0 & N_1 & N_2 \\ 2a_0 & N_1 & 0 \\ 0 & 2a_0 & N_1 \end{vmatrix}$$

aneb ježto

$$N_1 = a_1 + b_1 \alpha,\ N_2 = a_2 + 2(a_1 b_1)\alpha + b_3 \alpha^2,$$

též

$$2a_2 - a_1^2 + \{2(a_1 b_1) - (a_1).(b_1)\} 2\alpha + (2b_2 - b_1^2)\alpha^2 = 0,$$

zaměníme-li tu a s b, vznikne rovnice

$$2b_2 - b_1^2 + \{2(a_1 b_1) - (a_1).(b_1)\} 2\alpha + 2(a_2 - a_1^2)\alpha^2 = 0;$$

jejíž kořeny jsou kořenům předešlé reciproké; dle toho jsou kuželosečky

$$a_0 + a_1 x + b_1 y + a_2 x^2 + 2(a_1 b_1) xy + b_2 y^2 = 0$$
$$b_0 + b_1 x + a_1 y + b_2 x^2 + 2(a_1 b_1) xy + a_2 y^2 = 0$$

v takové vzájemné souvislosti, že z tečných k oběma z bodu $x = y = 0$ vedených dvě a dvě na sobě kolmo stojí.

Úloha. Ve svazku kuželoseček
$$U_2 + v\, U'_2 = 0$$
a specielně ve svazku
$$2 + v\,(4x - y^2) + 8x^2 - 5xy + 2y^2 = 0.$$
mají se určiti ony kuželosečky, jimž přisluší tečna
$$x = 0, \text{ aneb } y = 0,$$
a zároveň jich ostatní z bodu $(x = y = 0)$ vedené tečny stanoviti.

Dodatek. Prochází-li křivka počátkem souřadnic, jest $a_0 = 0$, načež obdržíme vyloučením x z (6α) a (6γ) determinant Δ stupně $2n - 3$, totiž
$$\Delta = \begin{vmatrix} N_1 & N_2 & & \ldots & N_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & N_1 & & \ldots & & N_n & & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \ldots & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & & \ldots & & & & N_n \\ (n-1)\,N_1 & (n-2)\,N_2 & & \ldots & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & & & & N_{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Jedna hodnota pro α plyne tedy z rovnice
$$N_1 = a_1 + b_1\,\alpha = 0,$$
čili
$$\alpha = -\frac{a_1}{b_1}$$
a tudíž tečná
$$a_1\,x + b_1\,y = 0,$$
jakž při vyvinutí podmínek pro body obratu *) též podotknuto; pro δ obdrží se pak podobným spůsobem jako dříve
$$\delta = const.\ \alpha^{n\,(n-1)-1},$$
z čehož plyne:

„Z každého bodu na křivce stupně n-tého vésti lze k téže toliko $n\,(n-1) - 1$ *tečen,* což se tím vysvětluje, že tečná v bodě onom platí za dvé tečen splývajících.**)

Podobným spůsobem lze odvoditi tečny v bodech mnohonásobných.

---

*) Časopis roč. VI pag. (10).

**) Viz: Plücker: „System der analyt. Geom. pag. 243.

Úkol. Čtenář vezma ku pomoci transformační rovnici (3α), již jsme na str. 11. roč. VI. byli vyvinuli, odvodiž na základě relace (8) rovnici tečny v libovolném bodě křivky,-(h_1 h_2).

2. Problem.

Mají se ustanoviti asymptoty křivky (1) *a vyšetřiti, jaké podmínky platí pro asymptoty* ($m+1$)*-styčné.**)

Spůsob, jakýmž úkol tento pojednati hodláme, zakládá se nanásledující známé větě.

Má-li rovnice

$$A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k x^k = 0$$

($m+1$) kořenů nekonečně velkých, jest

$$A_n = A_{n-1} = \ldots A_{n-m} = 0.$$

Budiž tedy neznámá posud rovnice asymptoty

$$y = \alpha x + \beta,$$

kterouž, s (1) kombinujíce obdržíme pro průseky

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} \{(a + b\alpha)\, x + b\beta\}^k = 0;$$

poněvadž tu pro ($m+1$) styčné asymptoty jest $x = \infty$ ($m+1$)-kráte, musí dle svrchu uvedené věty následující relace platnosti nabýti:

$$\left.\begin{array}{c} (a+b\alpha)^n = 0 \\ (a+b\alpha)^{n-1} + n\beta b\,(a+b\alpha)^{n-1} = 0 \\ (a+b\alpha)^{n-2} + \binom{n-1}{1}\beta b\,(a+b\alpha)^{n-2} + \binom{n}{2}\beta^2 b^2 (a+b\alpha)^{n-2} = 0 \\ \vdots \\ (a+b\alpha)^{n-m} + \binom{n-m+1}{1}\beta b\,(a+b\alpha)^{n-m} + \ldots \\ + \binom{n}{m}\beta^m b^m (a+b\alpha)^{n-m} = 0 \end{array}\right\} \quad (9)$$

Patrno, že první z těchto rovnic od ostatních neodvisle jest řešiti podlé neznámé α; a ježto vedlé ní rovnice druhá

*) Splyne-li z n průseků přímky s křivkou stupně n-tého ($m+1$) v nekonečnu, nazýváme ji asymptotou ($m+1$) styčnou [($m+1$) punctig osculirend.]

vždy může obstáti, neznámou β obsahujíc, stvrzena následující věta:

Každá křivka stupně n-tého má n nejméně dvojstyčných (jednoduchých) asymptot buď realných neb imaginárných; hodnoty kořenů α jsou tytéž, jako ony, které plynou pro poměr $\frac{y}{x}$ z rovnice

$$\frac{(ax+by)^n}{x^n} = \frac{F_n}{x^n} = 0,$$

jež však značí n počátkem souřadnic procházejících přímek při rovnici křivky

$$\sum_0^n F_{k=0}\,, \qquad (9\alpha)$$

kdež jest F_k stejnoměrná funkce stupně k-tého souřadnic x a y; značí tedy rovnice

$$F_n = 0$$

n bodem $x = y = 0$ procházejících a k asymptotám rovnoběžných přímek a poskytuje dle poměru $\frac{y}{x}$ byvši řešena, poměry souřadnic bodů křivky v nekonečnu, jak se též pomocí souřadnic Hesseových *) jinak dokazuje.

Při listu kartesianském

$$y^3 + x^3 - 3ayx = 0$$

jest

$$(a+b\alpha)^3 = 1 + \alpha^3, \quad (a+b\alpha)^2 = -3a\alpha,$$
$$3b\,(a+b\alpha)^2 = 3\alpha^2$$

a tudíž parametry α, β pro asymptoty

$$\alpha_1 = -1, \qquad \beta_1 = -a,$$
$$\alpha_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \qquad \beta_2 = \frac{a}{2}(1-i\sqrt{3});$$
$$\alpha_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \qquad \beta_3 = \frac{a}{2}(1+i\sqrt{3});$$

rovnice tří asymptot zní pak

$$y + x \quad + a = 0,$$
$$y - \alpha_2\, x - \beta_2 = 0,$$
$$y - \alpha_3\, x - \beta_3 = 0.$$

*) Časopis pro pěst. math. roč. I. pag. 167. —

Rovnice (9) jsou k praktickému počítání poněkud nepohodlné; společnou jich formu

$$\sum_{k=0}^{m}\left\{\begin{matrix} n-m+k \\ k \end{matrix}\right\}\beta^k b^k (a+b\alpha)^{n-m} = 0 \quad [\text{pro } m=0,\,1,\,2,\ldots m]$$

lze však mnohem přehlednější učiniti, pomníme-li, že platí vztah

$$\binom{n-m+k}{k}\beta^k b^k (a+b\alpha)^{n-m} = \frac{\beta^k}{k!}\,\frac{d^k N_{n-m+k}}{d\alpha^k}$$

srovnej označení (7), jímž se udaný tvar promění na vhodnější

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{\beta^k}{k!}\,\frac{d^k N_{n-m+k}}{d\alpha^k} = 0. \quad [\text{pro } m=0,\,1,\,2,\,\ldots\, m],$$

dle něhož obdržíme za rov. (9) následující soustavu rovnic:

$$N_n = 0$$

$$N_{n-1} + \beta\,.\,\frac{dN_n}{d\alpha} = 0$$

$$N_{n-2} + \frac{\beta}{1!}\,\frac{d\,N_{n-1}}{d\,\alpha} + \frac{\beta^2}{2!}\,\frac{d^2 N_n}{d\,\alpha^2} = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$N_{n-m} + \frac{\beta}{1!}\,\frac{d\,N_{n-m+1}}{d\,\alpha} + \frac{\beta^2}{2!}\,\frac{d^2 N_{n-m+2}}{d\,\alpha^2} + \ldots \frac{\beta^m}{m!}\,\frac{d^m N_n}{d\alpha^m} = 0.$$

Jest tu pak, jak z rovnic (7) a (9α) jest patrno, všeobecně

$$N_k = \left/\frac{F_k}{x_k}\right._{\frac{y}{x}=\alpha}.$$

Při křivce na př.

$$(3 - x + 5y) + (x^2 - 2xy) + (-2x^3 - yx^2 + 2y^2 x + y^3) = 0$$

jest

$$N_n = N_3 = -2 - \alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3,\ N_{n-1} = N_2 = 1 - 2\alpha$$

$$\frac{dN_3}{d\alpha} = -1 + 4\alpha + 3\alpha^2,$$

tudíž

$$\begin{matrix} \alpha_1 = +1, \\ \alpha_2 = -1, \\ \alpha_3 = -2, \end{matrix} \quad \beta = -\frac{1-2\alpha}{3\alpha^2+4\alpha-1}, \quad \begin{matrix} \beta_1 = \frac{1}{6} \\ \beta_2 = \frac{3}{2} \\ \beta_3 = \frac{5}{3} \end{matrix}$$

pročež jsou rovnice asymptot

$$6x - 6y + 1 = 0,$$
$$2x + 2y - 3 = 0,$$
$$6x + 3y - 5 = 0,$$

některá zvláštní řešení rovnic (9) buďtež zde zvláště vytknuta.

Rovnice

$$N_n = 0$$

má:

1) n rozličných kořenů, křivka neprostírá se v n rozličných větvích do nekonečna; aneb

2) může nastati případ, že $(i+1)$ z kořenů v jedno splývá; označme pro okamžik společnou jim hodnotu α_1, a příslušný bod (α_1); nastává pak otázka, jaký význam jest případu tomuto přiložiti, k níž snadno odpovíme pomníce, že podlé podmínek (3δ) jest tu pro kořen $(i+1)$-násobný:

$$\left.\begin{aligned} (a + b\alpha_1)^n &= 0 \\ nb\,(a + b\alpha_1)^{n-1} &= 0 \\ 2!\binom{n}{2} b^2 (a + b\alpha_1)^{n-2} &= 0 \\ &\vdots \\ i!\binom{n}{i} b^i\,(a + b\alpha_1)^i &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

dle toho vymizí v 2. 3. 4. ... $(i+1)$-té z rovnic (9) členy obsahující mocnosti resp. $\beta\ \beta^2\ \beta^3 \ldots \beta^i$, což jest znamením, že rovnice ty mají za kořen $\beta = \infty$; přímka v nekonečnu

$$y = \alpha_1 x + \infty \quad \left\{\alpha_1 \begin{matrix} < \infty \\ > -\infty \end{matrix}\right\}$$

jest tudíž asymptotou $(i+1)$ styčnou, a bod (α_1) $\left\{\begin{matrix}\text{jest}\\ \text{není}\end{matrix}\right\}$ bodem obratu, jest-li $\left\{\begin{matrix} i \text{ sudé} \\ i \text{ liché}\end{matrix}\right\}$ *).

3. Podřízený případ nastane při hodnotě $\alpha_1 = \infty$; tehdy může asymptota příslušná ležeti v konečnu jsouc rovnoběžná s osou pořadnic; nelze tedy pro ni užíti tvaru $\{y = \alpha x + \beta,\}$ nýbrž nutno klásti

*) Viz: Plücker. „Theorie der algebraischen Curven“ pag. 160.

$$x = p, \qquad (11)$$

což vloženo do (1) dává

$$a_0 + \sum_1^n \{ap + by\}^k = 0;$$

má-li tedy býti přímka (11) asymptotou $(m+1)$ styčnou, musí býti pro podobnou příčinu jako dříve:

$$b_n = 0 \qquad \text{co součinitel při } y^n$$

$$b_{n-1} + n\,(a_1\, b_{n-1})\, p = 0 \qquad \text{„ „ } y^{n-1}$$

$$b_{n-2} + \binom{n-1}{1}(a_1\, b_{n-2})\, p + \binom{n}{2}(a_2\, b_{n-2})\, p^2 = 0 \qquad \text{„ „ } y^{n-2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$b_{n-m} + \binom{n-m+1}{1}(a_1\, b_{n-m})\, p + \binom{n-m+2}{2}(a_2\, b_{n-m})\, p^2 + \dots$$

$$+ \binom{n}{m}(a_m\, b_{n-2})\, p^m = 0 \qquad \text{co součinitel při } y^{n-m}$$

z kterýchžto podmínek druhá p stanoví.

4) Mohou vedlé podmínek (10) též veškerá N_k [pro $k = 1, 2, 3, \dots i$] jakož i veškeří součinitelé při $\beta\, \beta^2 \dots \beta^i$ pro kořen α_1 vymizeti. Tehdy učiní se zadost rovnici 1. 2. 3.... $(i+1)$-té kterýmkoliv β, což značí, že každá přímka o směrnici α_1 protíná v bodě (α_1) křivku $(i+1)$-kráte; bod ten jest tudíž $(i+1)$-násobný; k $(i+1)$ větvím příslušné asymptoty, přímky to, jichž $(i+2)$ průseků v (α_1) v jedno splývá, stanoví pak $(i+2)$ rovnice z (10), totiž

$$\sum_{k=0}^{i+1} \binom{n}{k} \beta^k\, b^k\, (a + b\alpha_1)^{n-(i+1)} = 0$$

kterážto $(i+1)$ hodnot pro β poskytuje; splyne-li g z těchto hodnot, obdrží bod (α_1) zároveň špičku stupně $(g-1)$-ho. —

Tím podána jsou kriteria pro singularity bodů v nekonečnu. Celou theorii příklady zvláště objasňovati, vedlo by příliš daleko.

Poukážeme na konec ještě k některým větám asymptot se týkajícím.

Ukázali jsme v ročn. V., že pro bod dvojnásobný $(h_1\, h_2)$ platí

$$(a)_1 = 0, \quad (b)_1 = 0;$$

a že tudíž rovnice křivky se promění na následující:

$$(\eta - k_1 \xi)(\eta - k_2 \xi) + F_3 + F_4 \ldots + Fn = 0\,. \text{---}\,. \tag{12}$$

kdež značí F_i funkci stupně i-tého souřadnic ξ, η majíc tvar*)

$$F_i \equiv (a)_i \xi^i \binom{i}{1} (ab)_{i-1,1} \xi^{i-1} \eta + \ldots + (b)_i \eta^i,$$

rovnice

$$\eta - k_1 \xi = 0,\ \eta - k_2 \xi = 0$$

pak tečné v bodě $(h_1\, h_2)$ aneb $(\xi = \eta = 0)$.

Předpokládejme nyní, že tečné tyto mají v témž bodě m průseků s křivkou společných, a mimo to nechť jest možno vésti z něho ku křivce i asymptot $(n - m + 1)$ styčných

$$y = \alpha_1 \xi,\ y = \alpha_2 \xi \ldots y = \alpha_i \xi;$$

při čemž $i \leqq m$.

Při těchto podmínkách přijme na se rovnice (12) tvar:

$$\left.\begin{array}{l}(\eta - k_1\xi)(\eta - k_2\xi) F'_{m-3} + (\eta - \alpha_1\xi)(\eta - \alpha_2\xi)\ldots \\ \qquad (\eta - \alpha_i\xi) F_{n-i} = 0,\end{array}\right. \tag{13}$$

ježto tu pro hodnotu $\left\{\begin{array}{l} y = k\,\xi \\ y = \alpha\,\xi \end{array}\right\}$ plyne pro úsečky průseků $\left\{\begin{array}{l} x = 0\ m\text{-kráte} \\ x = \infty\ (n - m + 1)\text{-kráte} \end{array}\right\}$; třeba tu jen připomenouti, že součiny

$$\left\{\begin{array}{l} (\eta - k_1\xi)\ \ .\ \ (\eta - k_2\xi), \\ (\eta - \alpha_1\xi) \ldots . (\eta - \alpha_i\xi), \end{array}\right\}$$

jsou společnými součiniteli funkcí resp.

$$\left\{\begin{array}{l} F_3, F_4 \ldots\ldots F_{m-1}, \\ F_m\ F_{m+1} \ldots F_n, \end{array}\right\},$$

čímž význam úkonů F'_{m-3}, F'_{n-i} jest objasněn.

Z tvaru rovnice (13) soudíme, že ostatní průseky asymptot leží na téže křivce stupně $(m - 3)$-ho. —

Pro $n = 6$, $m = 6$, dává poučka tato následující větu:

Má-li křivka stupně 6tého takový bod dvojný 0, *že obě tečny jeho splývají v jedinou přímku P, a splývá-li zároveň všech 6 průseků této přímky s křivkou v bodě* 0, *pak leží ostatních* 18 *průseků křivky s 6 přímkami rovnoběžně k asymptotám bodem* 0 *vedenými na téže křivce stupně 3tího.*

---

*) Srovnej „časopisu" roč. VI. pag. 11. rov. (3α).

Podobně obdržíme pro $n = 5$, $m = 5$ větu:

Má-li křivka stupně 5tého takový bod dvojný O, že obě tečny jeho splývají v jedinou přímku P, a splývá-li zároveň všech 5 průseků této přímky s křivkou v bodě O, pak leží ostatních 10 průseků křivky s 5 přímkami rovnoběžně k asymptotám bodem O vedenými na téže kuželosečce. —

Jest-li $m = 4$, jest bod $(h_1 h_2)$ bodem dvojobratu, a lze tedy hořejší výsledek pro $n = 4$, $i = 4$ takto vysloviti:

Vedeme-li bodem dvojobratu křivky stupně čtvrtého čtyři přímky k asymptotám rovnoběžné, leží ostatní průseky jejich m_1 m_2 m_3 m_4 na určité přímce P. *)

Totéž platí o jiném bodu dvojobratu $(h'_1 h'_2)$ a příslušných mu průsecích m'_1 m'_2 m'_3 m'_4; poněvadž pak body m_1 m'_1, m_2 m'_2, m_3 m'_3, m_4 m'_4 vytvořeny jsou na přímkách P a P' rovnoběžkami, lze řady (m) a (m') považovati za promětné, čímž stvrzen též dle známé věty **) následující zákon:

Průsek přímek m_k m'_i, m'_k m_i leží na jisté přímce, která se nemění, nechť k a i značí kterékoliv dvě rozdílné číslice z řady: 1, 2. 3, 4; jest to osa promětnosti řad (m) a (m').

Poznámka. Pro jasnější porozumění podotýkáme, že bodem dvojobratu nazýváme takový bod dvojný, v němž obě ramena mají bod obratu. —

Přehled novějších pokroků v astronomii.

Sepsal

Dr. **A. Seydler.**

(Pokračování.)

5. Výzkumy spektroskopické na kraji slunce.

Při pamětihodném zatmění slunce, 18. srpna 1868, překvapen byl Francouz *Janssen,* jenž pozoroval zatmění v Guntooru, neobyčejnou jasností některých světlých čar ve spektru jedné

*) Srovnej Plücker: „Theorie der alg. Curven“ pag. 185.

**) Viz Weyr: „Základové vyšší geom.“ pag. 40. článek 23.