Bedřich Procházka
Fotogrametrické konstrukce. [I.]

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 27 (1898), No. 1, 1--12

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121007

# Fotogrammetrické konstrukce. *)

Napsal

**B. Procházka,**
ředitel realky v Náchodě.

Úkolem perspektivy jest sestrojovati průměty centralné vyhovující určitým podmínkám, je-li předmět zobrazení přesně určen aneb jiným zákonitým obrazem vyjádřen. Tak se sestrojuje perspektivný obraz pomocí methody průsečné z daného půdorysu a nárysu; aneb z jediného obrazu orthogonalného s příslušnými souřadnicemi, na př. z kotovaného situačního plánu.

Ve fotogrammetrii vyskytuje se však úkol opačný, totiž z fotografického obrazu perspektivného určiti přesně předmět zobrazený aneb odvoditi kotovaný obraz situační. Jediný obraz fotografický k tomuto určení nestačí, jest zapotřebí dvou takových obrazů. Jinak jest tomu při zobrazování předmětů známých, kde právě známost, na př. úhlů a poměru délek na předmětu se vyskytujících, nahrazuje obraz perspektivný.

Pojednejme především o vztazích vyskytujících se při odvození průmětu perspektivného z průmětu orthogonalného a prozkoumejme napřed případ obecný, jaký se ve fotogrammetrii často vyskytuje, kdy perspektivná průmětna jest nakloněna k orthogonalné průmětně horizontalní.

*1. Vztah mezi orthogonalným a perspektivným průmětem bodu.*

---

* Slovutný pan professor na c. k. české vysoké škole technické *František Müller*, zabývaje se pracemi fotogrammetrickými, shledal, že mnohé konstrukce fotogrammetrické zakládají se na výkonech deskriptivní geometrie a že je do jisté míry lze považovati za zobecnění obvyklých konstrukcí této nauky, zejména perspektivy.

Odevzdav mně laskavě svoje velice cenné zápisky, přenechal mně jejich spracování, jež tuto uvádím. —

V orthogonalné průmětně horizontální M, kterou rovinou základní zváti budeme, máme v přímce $M$ stopu roviny perspektivné R, a v přímce $M' \parallel M$ pak stopu roviny $R_s$, procházející středem $s$ centralného promítání a rovnoběžné s rovinou R. Bod $s_1$ jest orthogonalným průmětem středu promítání do průmětny M, jehož výška $\zeta s$ nad rovinou základní jest dána. Osa (optická) perspektivného promítání $O$, obsahující střed promítání $s$ a kolmá ku průmětně R, má svůj orthogonalný průmět v přímce $O_1$, procházející průmětem $s_1 a$ kolmé ku stopě $M$.

Je-li dán nějaký bod $a$ svým orthogonalným průmětem $a_1$ a výškou svou $\zeta a$, sestrojíme příslušný průmět centralný *) do roviny R jakožto průsečík paprsku centralně promítajícího $sa$ s touto průmětnou. Za tím účelem, nechceme-li použiti žádného jiného pomocného obrazu orthogonalného, položme promítajícím paprskem $sa$ rovinu svislou jakožto orthogonalně promítající do roviny základní a sklopme ji kolem průmětu $s_1 a_1$ jakožto její stopy do této průmětny. Vyhledejme průsečnici této roviny svislé s průmětnou R, kteráž bude rovnoběžna s průsečnicí téže roviny s rovinou $R_s$, již ve sklopení sestrojíme, jest-li bod $m'$, ve kterém průmět $s_1 a_1$ protíná stopu $M'$ spojíme se současně sklopeným středem promítání $s$. (Sklopený střed obdržíme, učiníme-li $ss_1 \perp s_1 a_1$ a $s_1 s = \zeta s$.) Proto vedouce ve sklopení průsečíkem $m$ průmětu $s_1 a_1$ s přímkou $M$ rovnoběžku ku přímce $m's$, obdržíme sklopenou průsečnici roviny R se svislou rovinou promítající přímky $sa$. Tato průsečnice protíná pak sklopený promítající paprsek $sa$ v bodu $a_2$, který jest sklopeným centralným průmětem bodu $a$ do roviny perspektivné R.

Spustíme-li kolmici s bodu $a_2$ na průmět $s_1 a_1$, obdržíme v patě její orthogonalný průmět $a_{2_1}$ tohoto centralného průmětu $a_2$ a v délce $a_2 a_{2_1}$ výšku $\zeta a_2$ centralného průmětu $a_2$ nad rovinou základní.

Sklopíme-li centralnou průmětnu R kolem stopy $M$ do základní roviny, obdržíme ve sklopení sklopený průmět $a_2$, který zkrátka $(a_2)$ označovati budeme. Tento bod $(a_2)$ obdrželi bychom

*) Tento průmět zoveme centralným, jelikož za příčinou zjednodušení konstrukcí nebudeme přihlížeti k podmínkám perspektivného zobrazování.

také tak zvaným klinogonalným promítáním v pravém tvaru a proto toto sklopení roviny R nazývati budeme ***klinogonálným promítáním v pravém tvaru*** na rozdíl od sklopení orthogonalně promítajících rovin centralně promítajících paprsků ku př. paprsku $sa$. Abychom klinogonalný průmět v pravém tvaru $(a_2)$ bodu $a$ obdrželi, použijeme souvislosti příbuznosti, ve které se nalézá s průmětem orthogonalným $a_{2_1}$. Stačí, jak známo, znáti sklopení jediného bodu roviny R a za takový nejlépe zvolíme hlavní bod $o$ průmětny této, ve kterém protíná optická osa $O$ tuto rovinu. Sestrojujíce tento bod, položme osou $O$ rovinu svislou orthogonalně promítající, která protíná roviny R a $R_s$ ve přímkách $E$ a $E_s$ taktéž spolu rovnoběžných. (Stopa $m$ přímky $E$ nalezá se ve stopě $M$ a stopa $m'$ ve stopě $E_s$ ve stopě $M'$.)

Sklopíme-li tuto promítající rovinu, obdržíme $E \parallel E_s$, k níž bodem $s$ vedeme kolmici $O$ protínující přímku $E$ v bodu $o$, jehož orthogonalný průmět $o_1$ a klinogonalný průmět $(o_2)$ snadno sestrojíme. Spojíme-li pak $o_1$ s $a_{2_1}$, protne tato přímka stopu $M$ v bodu ${}^1m$ který spojen se sklopeným $(o_2)$ dává přímku, protínající přímku $a_{2_1}$ $(a_2) \perp M$, udávající směr příbuznosti, v bodu $(a_2)$. —

Při sestrojení průmětu $(a_2)$ můžeme však také přijíti jinou cestou k cíli. Na místě abychom odvozovali z daného průmětu orthogonalného průmět $a_{2_1}$ a z toho pak průmět $(a_2)$, sestrojíme centralný průmět bodu $a$ z téhož středu centralného promítání $s$ do roviny základní, který $a_3$ znamenati budeme. Průmět tento $a_3$ jest prvou stopou centralně promítajícího paprsku, kterou obdržíme hned při sklopení orthogonalně promítající roviny tohoto paprsku.

Jelikož dva průměty centralné téhož předmětu z téhož středu promítání do dvou různých rovin jsou v souvislosti kollinearné, při níž jest průsečnice obou rovin průmětných osou a střed promítání středem kollineace, budou i průměty $a_3$, $a_2$ bodu $a$ v centralné kollineaci, pro stopu $M$ jakožto osu a střed $s$ jakožto střed kollineace. Stopa $M_s$ jest jednou a přímka $R'_s$ t. j. průsečnice roviny $R_s$ s rovinou $M_s \parallel M$ jest druhou osou centralnou, t. j. přímkou, již v této kollinearné závislosti v druhé rovině přísluší přímka úběžná (nekonečně vzdálená).

Tento vztah zůstane, i když rovinu průmětnou R klinogonalně v pravém tvaru promítneme do roviny základní čili když sklopíme rovinu R kol stopy $M$ do této roviny základní. Středem kollineace jest pak klinogonalný průmět v pravém tvaru $(s)$ středu promítání $s$ a osou kollineace zůstane stopa $M$.

Stopa $M'$ zůstane jednou osou centralnou a průmět klinogonalný $(R'_2)$ osy centralné $R'$ jest druhou osou centralnou této kollineace rovinné.

Na základě této kollineace sestrojíme tedy průmět $(a_2)$ takto: Průmět $(a_2)$ leží jednak na kollinearném paprsku $(s)a_3$, jinak na přímce $(L_2)$, která jest kollinearně sdružena s některou přímkou $L_3$ vedenou bodem $a_3$. Ona přímka $(L_2)$ protíná se s přímkou $L_3$ na ose kollineace t. j. v průsečíku $l$ přímky $L_3$ se stopou $M$ a jest rovnoběžna ku kollinearnému paprsku $(s)l'$ příslušícímu bodu $l'$, v němž $L_3$ protíná centralnou osu $M'$, jakožto bodu, jemuž přísluší úběžný (nekonečně vzdálený) bod téhož paprsku.

Můžeme však na místě libovolné přímky $L_3$ vzíti pohodlněji taktéž průmětem $a_3$ procházející, sklopený paprsek promítající, $sa$ anebo také průmět jeho $s_1a_1$ a dospěti touž konstrukcí ku průmětu $(a_2)$. Z bodu $(a_2)$ můžeme pak na základě souvislosti příbuznosti odvoditi prúmět $a_{2_1}$. Tak jako jsme sestrojili ku $a_3$ respekt. $a_1$ příslušný průmět $(a_2)$ jakožto průsečík paprsku kollinearního $(s)a_3$ a přímky $(L_2)$, můžeme sestrojiti ke každému jinému bodu bod kollinearně sdružený a naopak ku každému $(a_2)$ příslušné průměty $(a_{2_1})$ a $a_3$.

Jak patrno jsou body $a_3$, $(a_2)$, $a_{2_1}$ v té vzájemné závislosti, že je-li dán jeden, lze druhé dva určiti. Zřejmo však, že nelze úplně určiti polohu průmětu $a_1$ z pouhého průmětu $a_3$ nebo $(a_2)$ nebo $a_{2_1}$, jelikož jsou tyto dva body společny vždy jednomu paprsku.

Ku sestrojení bodu $(a_2)$ můžeme však také užiti bodů kollinearně združených $(o_2)$ a $o_3$. Stopu $p$ osy $O$ obdržíme tam, kde se sklopená tato osa se svým průmětem $O_1$ protíná. Jelikož tento bod $p$ můžeme pokládati za bod $o_3$ příslušící hlavnímu bodu $o$ v rovině R, můžeme tento odvoditi z onoho.

Sestrojíme-li bodem $p = o_3$ libovolnou přímku $K_3$ v rovině M přísluší jí v rovině R kollinearně sdružená jiná přímka $(K_2)$, kteráž s ní se v průsečíku $k$ jejím se stopou $M$ protínajíc jest rovnoběžna ku spojnici průsečíku $k'$ přímky $K_3$ a stopy $M'$ s průmětem $(s)$. Kde tato přímka protíná $O_1$, jakožto kollinearný paprsek $(s)$ $o_1$, tam obdržíme průmět $(o_2)$.

Opačně možno, je-li dán průmět $(o_2)$, určiti bod $p = o_3$, spojíme-li bod $(o_2)$ s libovolným bodem $k$ přímkou $(K_2)$ a sestrojme bodem $(s)$ rovnoběžku k této přímce, která protne stopu $M$ v bodu $k'$, určujícím s bodem $k$ přímku $K_3$, kteráž $O_1$ v hledaném bodě $p$ protíná.

Také lze sestrojiti, jak ze souvislosti těchto průmětů patrno, průmět $o_1$, jest-li $k'$ spojíme s $s_1$ a bodem $k$ vedeme ku této spojnici rovnoběžku $K_1$, která protíná $O_1$ v bodu $o_1$. Cestou opáčnou lze pak sestrojiti z bodu $o_1$ bod $p$. Tento vzájemný vztah mezi body $o$ a $p$ nám usnadní konstrukce, při kterých bod tento se nalézá mimo meze nákresny.

Vraťme se ještě jednou ku promítání libovolného bodu $a$ do roviny R.

Jest zřejmo, že úloha z průmětu $(a_2)$ nebo $a_3$ určiti průmět $a_1$ jest neurčita a že musí býti dána ještě jedna podmínka bod $a$ určující. Takovou podmínkou jest známost výšky $\zeta a$ bodu $a$ nad rovinou základní.

Mějme na zřeteli orthogonalně promítající rovinu paprsku $sa$ přislušného bodu $a$. Nechť jest délka $\overline{s_1 s}$ kolmá ku průmětu $s_1 a_1$ a rovná výšce $\zeta s$ středu promítání nad rovinou základní; $\overline{s_1 a_{2_1}}$ jest rovno vzdálenosti průmětu $a_{2_1}$ od průmětu $s_1$ a $\overline{a_{2_1} a_2} \perp s_1 a_3$ jest rovná výšce průmětu $a_2$ nad rovinou základní.

Spojíme-li bod $s$ s bodem $a_2$ obdržíme průmět $a_3$ v průsečíku paprsku $sa_2$ s přímkou $s_1 a_1$, vlastně s rovinou základní. Bod $a_3$ může však býti dán jako podmínka základní, tak že se bezprostředně délka $s_1 a_3$ při konstrukci použije.

Je-li dále známa výška $\zeta a$ bodu $a$, naneseme ji, abychom sestrojili bod $a$ a jeho orthogonalný průmět $a_1$ na výšku $s_1 s$ bodu $s$ od průmětu $s_1$ až do bodu $(a)$ a vedeme bodem tímto rovnoběžku ku $s_1 a_1$, kteráž přímku $sa_3$ protíná v hledaném bodu $a$; sestrojíme-li $aa_1 \perp s_1 a_3$ obdržíme průmět $a_1$ bodu $a$.

Poněvadž se přímky $(a) a$ a $sa_3$ protínají obyčejně pod příliš malým úhlem, nahrazuje se za příčinou docílení větší přesnosti tato konstrukce výpočtem.

Položíme-li jako dříve

$$\overline{ss_1} = \zeta s, \quad \overline{aa_1} = \zeta a, \quad \overline{a_2 a_{2_1}} = \zeta a_1,$$

a vedle toho

$$\overline{s_1 a_3} = \delta, \quad \overline{a_{2_1} a_3} = \delta', \quad \overline{s_1 a_{2_1}} = \delta - \delta' = \Delta$$

a

$$\overline{s_1 a_1} = x,$$

pak bude jak snadno lze odvoditi

$$\zeta s : \zeta a = \delta : (\delta - x).$$

Z úměry té plyne

$$x = \delta - \frac{\zeta a}{\zeta s}\,\delta = \delta\,\frac{\zeta s - \zeta a}{\zeta s}.$$

Dále však lze odvoditi úměru

$$(\zeta s - \zeta a_2) : \Delta = (\zeta s - \zeta a) : x,$$

z kteréž plyne

$$x = \frac{\zeta s - \zeta a}{\zeta s - \zeta a_2}\,\Delta.$$

Také i konstruktivně lze přesněji docíliti bodu $a$, naneseme-li na $s_1 s$ výšku $\zeta s$ místo jednou několikráte; a zvětšíme-li i délku $s_1\,(a)$ právě tolikráte, obdržíme při téže konstrukci bod $a$ přesněji.

Je-li $\zeta a = \zeta s$, t. j. je-li paprsek promítající $sa$ rovnoběžný s rovinou základní, pak bude $\zeta a_2 = \zeta s$ a $x = \frac{0}{0}$; poloha bodu $a_1$ se v tomto případě ani pomocí výšky určiti nedá.

2. *Vztahy průmětů bodů, když perspektivní průmětna jest kolma k rovině základní.*

Pro fotogrammetrii jest důležitým onen případ, kdy průmětna perspektivná jest kolma ku rovině základní Jak patrno, zjednoduší se konstrukce v tomto případě značně.

Je-li opět $M$ stopou roviny $\mathrm{R} \perp \mathrm{M}$ a $M'$ stopou roviny $\mathrm{R}_s \parallel \mathrm{R}$, tu bude v tomto zvláštním případě průmět orthogonalný $s_1$ středu promítání $s$ nalezati se v přímce $M$. Přímka $O_1 \perp M$ průmětem $s_1$ procházející jest průmětem osy optické $O \parallel \mathrm{M}$ a průsečík $\mathrm{O}_1$ s $M$ jest orthogonalným průmětem hlavního bodu $o$ průmětny perspektivné. Promítneme-li tuto průmětnu klinogonalně v pravém tvaru do roviny základní, pak bude

$$\overline{o_1(o_2)} = s_1(s_2) = \zeta s.$$

Budiž $a_1$ orthogonalným průmětem nějakého bodu $a$, pak bude $s_1a_1$ orthogonalným průmětem jeho paprsku $sa$. Učiníme-li nyní $s_1s \perp s_1a_1$ a $a_1a \perp s_1a_1$ a zároveň $\overline{s_1s} = \zeta s$ a $\overline{a_1a} = \zeta a$, pak obdržíme v přímce $sa_1$ kolem průmětu $s_1a_1$ do roviny základní sklopený promítající paprsek $sa$.

Průmět $s_1a_1$ protíná stopu $M$ v bodu $a_{2_1}$ t. j. v orthogonálném průmětu centrálného průmětu $a_2$. Sestrojíme-li v bodu tomto kolmici $a_{2_1}a_2$ ku $s_1a_1$, kteráž sklopený paprsek $sa$ v bodu $a_2$ protíná, obdržíme v délce $a_{2_1}a_2$ výšku $\zeta_{a_2}$ průmětu $a_2$ nad rovinou základnou. Klinogonalný průmět $(a_2)$, pak obdržíme, učiníme-li $a_{2_1}(a_2) \parallel \mathrm{O}_1$ a $\overline{a_{2_1}(a_2)} = \overline{a_{2_1}a_2}$. Přímka $sa$ protíná průmět $s_1a_1$ v průmětu $a_3$, který jest stopou paprsku $sa$ v rovině základní.

Tohoto bodu $a_3$ můžeme jako v předcházejícím obecném případě (člán. 1.) užiti k tomu, abychom určili bod $(a_2)$. Sestrojíme-li totiž bodem $a_3$ v rovině základní přímku $L_3$, protíná tato $M$ v bodu $l$ a stopu $M'$ v bodu $l'$. Přímka $(L_2)$ bodem $l$ vedená rovnoběžně ku přímce $l'(s)$ protíná pak paprsek kollinearný $(s)\,a_3$ v hledaném průmětu $(a_2)$. Určení bodu $a_1$, jsou-li $a_{2_1}$, $(a_2)$ nebo $a_3$ z dané výšky $\zeta_a$ jest totéž jako v uvedeném případě obecném (člán. 1.).

3. *Vztahy mezi průměty přímky.*

Budiž opět perspektivná průmětna R dána stopou $M$ v rovině základní a stopou $M'$ roviny $\mathrm{R}_s \parallel \mathrm{R}$, obsahující střed promítání $s$, který jest určen svým orthogonalným průmětem $s_1$ a výškou $\zeta_s$. Na základě tohoto určení, lze také sestrojiti průmět $(s)$ středu promítání.

Přímka $P$, jejíž perspektivný průmět $P_2$ do roviny R hledáme, budiž určena dvěma body $a$ a $b$, jichž výšky $\zeta_a$, $\zeta_b$ jsou dány. Těmto bodům příslušné průměty $a_3$, $b_3$ sestrojíme způsobem v předcházejícím článku uvedeným. V bodech $s_1$ a $a_1$ sestrojíme kolmice $s_1 s$, $a_1 a$ ku průmětu $s_1 a_1$ a naneseme na ně $\overline{s_1 s} = \zeta_s$, respektive $\overline{a_1 a} = \zeta_a$; pak přímka $sa$ protne $s_1 a_1$ ve hledaném průmětu $a_3$. Právě tak sestrojen průmět $b_3$. Přímka spojující tyto dva průměty $a_3$ a $b_3$ jest pak centrálným průmětem $P_3$ přímky $P$ do roviny základní.

Padne-li průmět některého z těchto dvou bodů, k. př. bodu $b$, mimo nákresnu, možno vždy pomocí známých planimetrických konstrukcí průmět $P_3$ sestrojiti jakožto přímku procházející průmětem $a_3$ a průsečíkem přímek $s_1 b_1$ a $sb$.

Známe-li tento průmět centrálný přímky $P_3$, můžeme sestrojiti dle konstrukce v předcházejícím článku uvedené ku průmětům $a_3$ a $b_3$ příslušné průměty $(a_2)$, $a_{2_1}$ a $(b)$, $b_{2_1}$ a tím i průměty $(P_2)$, $P_{2_1}$. Pro kontrolu správnosti konstrukce máme, že přímky $(a_2)$ $a_{2_1}$ a $(b_2)$ $b_{2_1}$ jsou vždy kolmy ku stopě $M$. Průmět $(b_2)$ můžeme sestrojiti též bez průmětu $b_3$, když by na př. tento průmět vypadl mimo meze nákresny. Dle způsobu uvedeného ve článku 1., vedeme průsečíkem $k$ průmětu $s_1 b_1$ se stopou $M$ rovnoběžku $k(b_2)$ ku spojnici průsečíku $k'$ téhož průmětu se stopou $M'$, s průmětem $(s)$; stejně můžeme užiti přímky $s_1 b_1$, taktéž průmětem $b_3$ procházející; v průsečíku takto sestrojených přímek obdržíme průmět $(b_2)$, Poněvadž však přímka $sb$ prochází také bodem $b_3$, můžeme i této přímky tak jako průmětu $s_1 b_1$ použiti ku konstrukci bodu $(b_2)$.

Na místě dvou libovolných bodů $a$ a $b$ nějaké přímky $P$ můžeme k sestrojení průmětu $(P_2)$ užiti výhodně ty body její, které *mají zvláštní polohu.*

Takovými body jsou:

*a*) stopa $m$ přímky $P$ v rovině základní. Tuto stopu obdržíme, sestrojíme-li $a_1 a \perp a_1 b_1$ a $b_1 b \perp a_1 b$ a učiníme-li $\overline{a_1 a} = \zeta_a$, a $\overline{b_1 b} = \zeta_b$, v průsečíku přímky $ab$ s jejím průmětem $a_1 b_1$. Jelikož tento bod $m$ v rovině M leží a tedy jeho průmět $m_3$ se s ním stotožňuje, můžeme jeho průmět $(m_3)$ bezprostředně určiti způsobem ve článku 1. uvedeným. Sestrojíme totiž bodem $m \equiv m_3$ libovolnou přímku $K_3$, kteráž stopy $M$ a $M'$ v bodech $k$ a $k'$

protíná; bodem $k$ vedená rovnoběžka $(K_1)$ ku přímce $k'$ $(s)$ protíná pak kollinearný paprsek $(s)\, m$ ve hledaném průmětu $(m_2)$. Kdybychom byli vedli bodem $k$ rovnoběžku $km_{2_1}$ ku přímce $k's_1$, obdrželi bychom v jejím průsečíku s paprskem $s_1m_3$ průmět $m_{2_1}$.

Jest zřejmo, že musí se mimo to bod $(m_2)$ nalézati na průmětu $(P_2)$ a $m_{2_1}$ na $P_{2_1}$; zároveň pak musí býti přímka $(m_2)\, m_{2_1} \perp M$.

*b*) Jiným zvláštním bodem dané přímky $P$ jest bod $t$, jehož průmět $t_2$ padá do průsečíku průmětu $P_2$ s rovinou základní. Průmět tento obdržíme v průsečíku průmětu $P_2$ se stopou $M$ roviny R, jakož i s jeho průmětem orthogonalným $P_{2_1}$. Konečně jest zřejmo, že průmět $t_2$ i v průmětu $P_3$ se nalézati musí a tudíž průmět tento jím prochází. Jest proto $(t_2) \equiv t_{2_1} \equiv t_3$. Průmět $t_1$ bodu $t$ obdržíme pak v průsečíku průmětu $P_1$ s průmětem $s_1t_{2_1}$ paprsku $st$.

*c*) Další zvláštní bod přímky obdržíme v průsečíku $r$ přímky $P$ s rovinou průmětnou R. Jest to zároveň průsečík přímky $P$ s průmětem $P_2$ a proto jeho průmět $r_2 \equiv r$, a tudíž $r_{2_1} \equiv r_1$ Tedy $r_1$ jest zároveň v průsečíku průmětů $P_1$ a $P_{2_1}$.

Spojnice bodu $r_2$ s $s_1$ jest orthogonalným průmětem paprsku $rs$ do roviny základní a protíná průmět $P_3$ v bodu $r_3$ to jest v průmětu centrálném bodu tohoto $r$ do roviny základní. Spojíme-li tento průmět $r_3$ — na základě kollinearného vztahu mezi oběma centrálnými průměty — se středem $(s)$ obdržíme v průmětu $(P_2)$ průmět $(s_2)$. Mimo to nalézají se pak průměty $(r_2)$ a $r_{2_1}$ na kolmici ku stopě $M$.

*d*) Zvláštním bodem jest i bod úběžný (nekonečně vzdálený) $u$ přímky $P$. Tomuto úběžnému bodu $u$ přísluší centralně promítající paprsek $su$, který jest s přímkou $P$ rovnoběžný a proto jeho orthogonalný průmět $s_1u_1 \parallel P_1$. Tento průmět protíná průmět $P_3$ v bodu $u_3$ jakožto centralném průmětu bodu úběžného $u$ do roviny základní. Z tohoto průmětu $u_3$ odvodíme si již známým způsobem průmět $(u_2)$ a průmět $u_{2_1}$, použitím opět pomocné přímky $H_3$ průmětem $u_3$ procházející, tak jako v případech předcházejících. Rychleji dospějeme však k cíli, použijeme-li známého kollinearného vztahu mezi oběma centralnými průměty a vedeme kollinearné paprsky $(s)\, u_3$ a $s_1u_3$, kteréž protínají průměty $(P_2)$

respektive $P_{2_1}$ v bodech $(u_2)$ respektive $u_{2_1}$, kteréž mimo to nalézají se na přímce kolmé ku stopě $M$.

$e$) Zajímavým jest povšimnouti si i onoho bodu $v$ přímky $P$, jehož průmět centralný $v_3$ jest bodem úběžným. Tomuto bodu $v$, jehož průmět $v_3$ jest úběžný bod $P_3$, přísluší paprsek $sv$, jehož průmět $s_1v_1$ jest rovnoběžný s $P_3$. V průsečíku tohoto průmětu $s_1v_1$ s průmětem $P_1$ obdržíme orthogonalný průmět $v_1$ bodu $v$, jehož výška $\zeta_v = \zeta_s$.

Abychom odvodili průmět $(v_2)$, spojíme bod $(s)$ s bodem úběžným $v_3$ čili vedeme rovnoběžku bodem $(s)$ s průmětem $P_3$; v průsečíku této rovnoběžky s průmětem $(P_2)$ obdržíme průmět $(v_2)$. Jest zřejmo, že bod tento $(v_2)$ se musí zároveň nalézati na centralné ose $(R'_2)$, tedy v průsečíku přímek $(R'_2)$ a $(P_2)$. V průsečíku přímky $s_1v_3$ s průmětem $P_{2_1}$ máme průmět $v_{2_1}$.

$f$) Konečně sluší povšimnouti si bodu $w$, jehož průmět $w_2$ jest bodem úběžným průmětu $P_2$. Abychom nalezli ostatní průměty tohoto bodu $w$, odvodíme především $w_3$, který se nalézá v průsečíku průmětu $P_3$ s paprskem kollinearným $(s)w_3$ rovnoběžným s $(P_3)$. Bod tento $w_3$ se musí nalézati v centrálné ose $M'$, kteráž obsahuje takové body roviny základní, jimž přísluší úběžné body roviny R. Z bodu $w_3$ odvodíme pak průměty$_1$, vedením průmětu $s_1w_3$.

4. *Vztahy mezi průměty přímky při svislé poloze průmětny perspektivné.*

Předpokládejme opět jako při odvozování průmětu bodu že průmětna centrálná R jest kolma k rovině základní. Budiž opět $M$ stopou roviny R $\perp$ M, stopa $M'$ roviny $R_s$ || R obsahuje průmět $s_1$ středu promítání $s$, a $(s)$ jest jeho klinogonalným průmětem v pravém tvaru ($s_1\,(s) \perp M$ a $s_1\,(s) = \zeta_s$). Budiž dále $a_1$, $b_1$ orthogonalným průmětem přímky $P$ určené body $a$ a $b$. Učiníme-li $a_1a \perp a_1b_1$, $b_1b \perp a_1b_1$ a $\overline{a_1a} = \zeta_a$, $\overline{b_1b} = \zeta_b$, pak přímka $ab$ protíná $a_1b_1$ ve stopě $m$ přímky $w$ v rovině základní.

Průměty centralné $a_3$, $b_3$ bodů $a$ a $b$ sestrojíme právě tak jako v případech předcházejících. (Sestrojíme-li $s_1s \perp s_1a$ a $s_1s = \zeta_s$, a $s_1a \perp s_1a_1$ a $a_1a = \zeta_a$, pak přímka $sa$ protíná $s_1a_1$ v bodu $a_3$ a tak sestrojíme i průmět $b_3$. Vypadá-li jeden z těchto průmětů $a_3$, $b_3$ ku př. $b_3$ z mezí nákresny, můžeme přece průmět $P_3$

určený průměty $a_3$ a $b_3$ sestrojiti, jelikož víme, že musí stopou $m$ procházeti. Abychom sestrojili průměty $(a_2)$ a $(b_2)$, uvažme, že v průsečíkách průmětů $s_1a_1$ a $s_1b_1$ se stopou $M \equiv R_1$ máme průměty $a_{2_1}$ a $b_{2_1}$. Sestrojíme-li v těchto bodech kolmice $a_{2_1}(a_2)$, $b_{2_1}(b_2)$ ku stopě $M$, protínají je centraly $(s)\,a_3$, respektive $(s)\,b_3$ v průmětech $(a_2)$ a $(b_2)$. Poněvadž však $b_3$ jak jsme předpokládali leží mimo meze nákresny, nemůžeme centrálu $(s)\,b_3$ vésti a proto ku sestrojení průmětu $(b_2)$ užijeme jiné konstrukce. V bodu $b_{2_1}$ vztýčíme kolmici ku $s_1b_2$, která protíná paprsek $sb_1$ v bodu $b_2$, a ve vzdálenosti $b_{2_1}b_2$ máme jednak souřadnici $\zeta b_2$, jakož i vzdálenost bodu $b_2$ od stopy $M$. Naneseme ji v tomto případě na kolmici v bodu $b_{2_1}$ ku stopě $M$ sestrojenou a obdržíme bod $(b_2)$.

Spojnice bodů $(a_2)$ a $(b_2)$ jest hledaným průmětem $(P_2)$. Jako ve všeobecném případě tak i zde všimneme si význačných bodů promítnuté přímky $P$.

*a*) Ku stopě $m$, právě tak jako v předešlém článku, sestrojené, jakožto prvnímu zvláštnímu bodu přímky $P$, jehož průmět $m_3$ se s ním stotožňuje, sestrojíme bezprostředně průmět $(m_2)$ pomocí kollinearného paprsku $(s)\,m$, která průmět $(P_2)$ protíná v hledaném průmětu. Také můžeme v průsečíku průmětu $s_1m$ s $M$ vztýčiti kolmici ku této stopě, která týmž bodem $(m_2)$ prochází.

*b*) Bod $t$, v jehož průmětu $t_2$ protíná průmět $P_2$ stopu $M$ roviny R totožnou s průmětem $P_{2_1}$, má svůj průmět $t_{2_1}$ totožný s tímto průmětem a jeho průmět $t_1$ obdržíme pomocí průmětu $s_1t_{2_1}$ na průmětu $P_1$. Sestrojíme-li $t_1t \perp ab_1$ protíná tato přímku $ab$ v bodu $t$, takže $t_1t = \zeta_t$.

*c*) Průsečík $r$ přímky $P$ s průmětnou R má svůj průmět $r_1$ v průsečíku $P_1$ s $P_{2_1} \equiv M$. K tomu příslušný $(r_2)$ obdržíme, když v $r_1 \equiv r_{2_1}$ vztýčíme kolmici ku stopě $M$, která $(P_2)$ v bodu $(r_2)$ protíná, anebo sestrojíme dříve $r_3$ pomocí průmětu $s_1r_1$ a vedeme kollinearný paprsek $(s)\,r_3$, který v $(P_2)$ týž bod $(r_2)$ určuje.

Výška $\zeta_r$ bodu $r$ jest bezprostředně stanovena v délce $r_1\,(r_2)$

*d*) Bod úběžný $u$ přímky $P$ má svůj průmět $u_3$ v průsečíku $s_1u_1 \,||\, P_1$ s $P_3$. Z tohoto průmětu odvodíme průmět $(u_2)$ pomocí centraly $(s)\,u_3$. V průsečíku průmětu $s_1u_1$ s $M$ máme průmět $u_{2_1}$, který je s průmětem $(u_2)$ na přímce kolmé ku stopě $M$. Výška $\zeta_u$ jest nekonečně veliká.

*e*) Bodu $v$, jehož $v_3$ jest bod úběžný průmětu $P_3$, příslušný průmět $v_1$ sestrojíme pomocí průmětu $s_1 v_1 \parallel P_3$, který $P_1$ protíná ve $v_1$. Zároveň v průsečíku $s_1 v_1$ s $M$ máme průmět $v_{2_1}$ a v průsečíku kollinearného paprsku $(s)\, v_3 \parallel P_3$ s průmětem $(P_2)$ máme průmět $(v_2)$. Zároveň musí ležeti $(v_2)$ na centralní ose kollineace $(R_2')$ obou průmětů centralných.

*f*) Konečně bodu $w$, jehož průmět $w_2$ jest bodem úběžným průmětu $P_2$, dostaneme průmět $w_3$ pomocí kollineace, na centralné $M'$, tedy v průsečíku průmětu $P_3$ s $M'$. Jeho průmět $w_2$ jest v průsečíku průmětu $P_1$ s $M'$, poněvadž $M' = s_1 w_1$. Výšku $\zeta_w$ bodu $w$ odvodíme pak známým způsobem.

(Dokončení.)

---

# Osmotická theorie sil elektromotorických.

Vykládá

Dr. O. Šulc v Praze.

Probírajíce se ve starší literatuře nesoucí se k elektrochemii, žasneme věru nad hojností i rozmanitostí theorií, které snaží se vysvětliti základní úkazy elektrochemické: vodivost elektrickou, elektrolysi a vznik sil elektromotorických. Mnohým vývodům nelze upříti duchaplnost, jiným strojenost, leč velmi četným nejasnost. Pročetše ty veškery theorie, máme málo jasnější obraz na př. o elektrolysi, než měli jsme před studiem. Spíše pociťujeme tíseň chaosu, z něhož nesnadno si cos definitivního vybrati.*)

Jasno začlo svitati teprve po pracích *Kohlrauschových* o vodivosti elektrolytů, totiž kyselin, zásad a zejména solí. Tu ukázáno předem, že molekulárná vodivost solí, to jest součin z vodivosti specifické a z koncentrace molekulárné, s rostoucím

*) Srovn. ku př. příslušné stati v obsáhlém díle *G. Wiedemannově.* Die Lehre von der Elektricität. — Nejvíce podrobností ovšem jest ve spise *W. Ostwaldově*: Elektrochemie, ihre Geschischte und Lehre. V Lipsku 1896.