Zdeněk Pírko

Úpatnice a pseudoúpatnice. II.

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 69 (1940), No. Suppl., D5--D8

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121000

Třetí koeficient rovnice (ε)

$$B^2 - 4CF^2 - 4E = A^2F^2 + 4AFt + 4t^2 - 4CF^2 - 4E = F^2(A^2 - 4C) + 4(AFt + t^2 - E) = (s+u)^2\frac{2r}{t} + 4[(t+r)(s+u) + t^2 - (s+t)(t+u)] = \frac{2r}{t}[(s+t+u-r)^2 - (t^2+r^2)].$$

Vrátíme-li se s těmito hodnotami koeficientů k rovnici (ε) a dělíme ji prvním koeficientem $\frac{2r}{t}$, máme konečně rovnici

$$\eta^2 - 2(s+t+u-r)\eta + (s+t+u-r)^2 - (t^2+r^2) = 0. \qquad (\zeta)$$

Řešením rovnice (ζ) obdržíme kořeny

$$\eta_{1,2} = s + t + u - r \pm \sqrt{t^2 + r^2}$$

neboli (pro znaménko —)

$$x + z = s + t + u - r - \sqrt{t^2 + r^2}$$

a cyklickou substitucí další dvě rovnice

$$y + x = s + t + u - r - \sqrt{u^2 + r^2},$$

$$z + y = s + t + u - r - \sqrt{s^2 + r^2}.$$

Odečteme-li postupně od součtu dvou rovnic rovnici třetí, dospějeme snadno k řešení Malfattiovu (I).

Úpatnice a pseudoúpatnice II.

Zdeněk Pírko, Praha.

Článek je pokračováním stejnojmenného článku otištěného v „Rozhledech mat. přír.", 1935. Tam byla úpatnicová a pseudoúpatnicová konstrukce aplikována na t. zv. křivky Laméovy a sinusové spirály a tímto způsobem odvozena řada křivek zvláštních. Zde ve formě úloh (s nástinem řešení a s výsledky) podávám některé obecnější vlastnosti těchto křivek, ukazuji jejich souvislost. Posléze připojena aplikace na kuželosečky.[1])

1. Obalovou křivkou ∞^1 křivek Laméových indexu n,

$$\left(\frac{x}{\xi}\right)^n + \left(\frac{y}{\eta}\right)^n - 1 = 0,$$

---

[1]) Oba články budou uzavřeny stejně upraveným článkem o t. zv. křivkách harmonických, v jejichž výtvarném principu jsou konstrukce úpatnicová i pseudoúpatnicová obsaženy jako jednoduchá metrická specialisace.

kde mezi parametry ξ, η platí vztah

$$\left(\frac{\xi}{a}\right)^p + \left(\frac{\eta}{b}\right)^p - 1 = 0,$$

je opět Laméova křivka indexu $\nu = \dfrac{np}{n+p}$ (Magnus).

Metodou Lagrangeových neurčitých součinitelů nalezneme rovnici hledané obálky ve tvaru $\left(\frac{x}{a}\right)^\nu + \left(\frac{y}{b}\right)^\nu - 1 = 0$. Zvláštní případy: 1. $n = 1$, $p = 1$; $\nu = \frac{1}{2}$ (Sohncke): Obálkou ∞^1 přímek, jejichž úseky na souřadných osách ξ, η jsou vázány vztahem $b\xi + a\eta - ab = 0$ je parabola, dotýkající se souřadných os v bodech $(a, 0)$, $(0, b)$. Zvláště $a = b$; konstruktivně-geometrická interpretace úlohy! 2. $n = 2$, $p = 2$; $\nu = 1$ (François): Obálkou ∞^1 elips, jejichž poloosy ξ, η jsou pravoúhlé souřadnice bodů elipsy $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0$, je „rovnoběžník" $\pm \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} - 1 = 0$. Jeho poloha vzhledem k předcházející elipse; zvláště $a = b$! 3. $n = 2$, $p = 1$; $\nu = \frac{2}{3}$ (Loria): Obálkou ∞^1 elips, jejichž poloosy ξ, η jsou vázány vztahem $b\xi + a\eta - ab = 0$ je evoluta elipsy o poloosách $ab^2/(b^2 - a^2)$, $a^2b/(b^2 - a^2)$. Zvláště $a = b$: Obálkou ∞^1 elips s konstantním součtem poloos a jest astroida $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0$. Vyměníme-li navzájem n, p, dostaneme v tomto případě větu (index ν je symetrickou funkcí veličin n, p): Astroida jest obálkou úsečky stálé délky, jejíž koncové body se pohybují po ramenech pravého úhlu. 4. $n = -1$, $p = 2$; $\nu = -2$ (Wieleitner): Obálkou ∞^1 hyperbol (jakých?), jejichž střed se pohybuje po elipse (které?) je eliptická stauroida. Případ „rovnoosé" eliptické stauroidy dostaneme pro $a = b$. Vyměníme-li navzájem n, p, dostaneme obdobnou větu pro ∞^1 elips; proveďte! Atd.

2. Na Laméovu křivku aplikujte konstrukci inversní ke konstrukci pseudoúpatnicové (Loria)!

Považujme křivku $\left(\frac{\xi}{a}\right)^p + \left(\frac{\eta}{b}\right)^p - 1 = 0$ za základní a označme ji $\Gamma_0^{(p)}$. Z jejího obecného bodu spusťme kolmice na souřadné osy; přímka spojující jejich paty má rovnici $\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta} - 1 = 0$. Obálkou těchto přímek podle úlohy 1 jest Laméova křivka $\Gamma_1^{(p_1)}$, pro niž $p_1 = 1/\left(1 + \frac{1}{p}\right)$. Pokračujíce, dostaneme Laméovu křivku $\Gamma_2^{(p_2)}$, pro niž $p_2 = 1/\left(1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{p}}\right)$, atd. Sukcesivní indexy jsou tvořeny podle určitého zákona, tento zákon lze odvoditi také z výrazu $\nu = np/(n + p)$.

3. Křivka polárně reciproká ke křivce Laméově vzhledem k dané kuželosečce je opět křivka Laméova. Rozšiřte tuto větu na případ polár vyšších!

Základní křivka a řídicí kuželosečka mějtež rovnice $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n - 1 = 0$, $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 - 1 = 0$. Rovnice křivky polárně reciproké pak zní

$\left(\frac{ax}{\alpha^2}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \left(\frac{by}{\beta^2}\right)^{\frac{n}{n-1}} - 1 = 0$. Zvláště $\alpha = a$, $\beta = b$! Tak odpovídají si indexy $\frac{1}{2}$, -1 (parabole hyperbola), 2, 2 (elipse elipsa), $\frac{2}{3}$, -2 (astroidě eliptická stauroida) atd.

r-tá polára bodu (x_1, y_1, z_1) vzhledem ke křivce $F(x, y, z) = 0$ je křivka se (symbolickou) rovnicí $\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} + z_1 \frac{\partial}{\partial z}\right)^{(r)} F = 0$. Pro náš případ tedy, vrátíme-li se k souřadnicím nehomogenním (t. j. klademe-li $z = z_1 = 1$), zní rovnice první poláry

$$\frac{x_1}{a^n} x^{n-1} + \frac{y_1}{b^n} y^{n-1} - 1 = 0;$$

je to Laméova křivka indexu $(n - 1)$ a „poloos" $(x_1/a^n)^{n-1}$, $(y_1/b^n)^{n-1}$. Druhou polárou je Laméova křivka indexu $n - 2$ atd.; obecně: r-tá polára Laméovy křivky indexu n je Laméova křivka indexu $n - r$ (Timerding). Je-li n číslo celé kladné, dospějeme tímto postupem vždy k poláře kvadratické (elipse resp. kružnici) a lineární (přímce); není-li tomu tak, řada sukcesivních polár nemá žádné jednoduché ohraničení.

4. Dokažte větu Beltramiho: „Rovnoosou" křivku Laméovu lze považovati za sinusovou spirálu, vztáhneme-li Laméovu křivku k přímkám isotropickým jakožto k souřadným osám!

Regulární transformací $x = \xi + i\eta$, $y = \xi - i\eta$ přejde rovnice $x^m + y^m - b^m = 0$ na tvar $(\xi + i\eta)^m + (\xi - i\eta)^m - b^m = 0$. Zavedeme-li polární souřadnice rovnicemi $\xi = \varrho \cos \varphi$, $\eta = \varrho \sin \varphi$ a použijeme-li věty Moivreovy, dostaneme z předcházející rovnice

$$2\varrho^m \cos m\varphi = b^m.$$

Zaveďme postupně jiné konstanty vztahy $m = -n$, $2b^n = a^n$ a otočme křivku kolem počátku o úhel $\pi/2n$, obdržíme obvyklý tvar sinusové spirály $\varrho^n = a^n \sin n\varphi$. Ukažte na některých příkladech, jak pro sinusové spirály se modifikují některé věty, vyslovené o křivkách Laméových!

5. Logaritmickou spirálu lze pokládati za spirálu sinusovou pro $\lim n = 0$ a tedy, podle věty Beltramiho, za zvláštní případ křivek Laméových (Allégret)!

Najdeme nejdříve rovnici všech křivek, pro které úhel ϑ, který svírá tečna křivky $\varrho = f(\varphi)$ s odpovídajícím průvodičem, splňuje daný vztah $\vartheta = F(\varphi)$. Diferenciální rovnice těchto křivek jest $\operatorname{tg} F(\varphi) = \varrho/\varrho'$, kde $\varrho' = \mathrm{d}\varrho/\mathrm{d}\varphi$, a tedy rovnice polární $\varrho = c e^{\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\operatorname{tg} F(\varphi)}}$. Pro $F(\varphi) \equiv a + n\varphi$ nalezneme sinusové spirály $\varrho^n = c^n \sin(a + n\varphi)$, obvyklý tvar získáme otočením křivky kolem počátku o úhel a/n. Ptáme-li se, za jakých podmínek platí $\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\operatorname{tg} F(\varphi)} \equiv k\varphi$, najdeme jako postačující podmínku, aby $F(\varphi) = \vartheta = \operatorname{arctg} k^{-1} = \text{konst.}$, což je charakteristická vlastnost logaritmických spirál $\varrho = c e^{k\varphi}$. Porovnáním rovnic $\vartheta = a + n\varphi$ a $\vartheta = \operatorname{arctg} k^{-1}$ plyne pro logaritmickou spirálu jakožto spirálu sinusovou podmínka $n = 0$.

6. Budiž $f(x, y) = 0$ bodová a $F(u, v) = 0$ tečnová rovnice křivky základní. Úpatnici resp. pseudoúpatnici křivky základní v bodových souřadnicích ξ, η dostaneme, položíme-li v její rovnici

tečnové

$$u = -\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2},\quad v = -\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\ \text{(Loria)}$$

resp.

$$u = -\frac{1}{\xi},\quad v = -\frac{1}{\eta}.$$

Aplikujte na kuželosečky!

Vztahy tyto obdržíme snadno, když vyjádříme analyticky konstrukci, která od křivky základní vede na úpatnici resp. pseudoúpatnici. Bodové rovnici kuželosečky $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ odpovídá tečnová rovnice $A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + 2A_{12}uv + 2A_{13}u + 2A_{23}v + A_{33} = 0$, v níž A_{ik} jsou doplňky diskriminantu kuželosečky A. Rovnice úpatnice jest $A_{33}(\xi^2+\eta^2)^2 - 2(A_{13}\xi + A_{23}\eta)(\xi^2+\eta^2) + A_{11}\xi^2 + A_{22}\eta^2 + 2A_{12}\xi\eta = 0$, pseudoúpatnice $A_{33}\xi^2\eta^2 - 2(A_{23}\xi + A_{13}\eta - A_{12})\xi\eta + A_{22}\xi^2 + A_{11}\eta^2 = 0$. Vyšetřete!

7. Na základě výsledku úlohy 6 dokažte větu Maclaurinovu: Úpatnice kuželoseček jsou obecně křivky stupně čtvrtého. Je-li základní křivka parabolou, jsou stupně třetího. Stupně druhého, a to kružnicí, jsou tehdy, je-li pól v ohnisku kuželosečky; je-li nad to křivka základní parabolou, jsou stupně prvního.

Výsledek úlohy 6 ukazuje, že úpatnice kuželosečky je obecně křivka čtvrtého stupně. Aby byla stupně třetího, je nutné a stačí, když $A_{33} = 0$, t. j. základní křivka jest parabolou; rovnice úpatnice pak zní $2(A_{13}\xi + A_{23}\eta)(\xi^2+\eta^2) - A_{11}\xi^2 - A_{22}\eta^2 - 2A_{12}\xi\eta = 0$. Aby úpatnice byla stupně druhého je nutné a stačí, můžeme-li psáti $A_{11}\xi^2 + A_{22}\eta^2 + 2A_{12}\xi\eta \equiv \lambda(\xi^2+\eta^2)$, t. j. když platí $A_{12} = 0$, $A_{11} = A_{22} = \lambda$. Dokážeme však snadno, že jsou to nutné a postačující podmínky pro to, aby kuželosečka měla ohnisko v počátku, t. j. v pólu; rovnici úpatnice můžeme pak psáti ve tvaru $(\xi^2+\eta^2)[A_{33}(\xi^2+\eta^2) - 2(A_{13}\xi + A_{23}\eta) + \lambda] = 0$. Je-li nad to $A_{33} = 0$, zní rovnice úpatnice $(\xi^2+\eta^2)[2(A_{13}\xi + A_{23}\eta) - \lambda] = 0$, q. e. d.

8. Vyslovte obdobu k větě úlohy 7 pro pseudoúpatnice!

Výsledek úlohy 6 ukazuje, že pseudoúpatnice kuželosečky je obecně křivka čtvrtého stupně. Aby byla stupně třetího, je nutné a stačí, když platí jeden ze tří vztahů $A_{11} = 0$, $A_{22} = 0$, $A_{33} = 0$; základní kuželosečka se dotýká jedné z os souřadných nebo přímky nevlastní (je parabolou). Aby byla stupně druhého, je nutné a stačí, aby platily dva z právě napsaných vztahů současně. Platí-li všechny tři vztahy současně, má rovnice pseudoúpatnice tvar $\xi\eta(A_{23}\xi + A_{13}\eta - A_{12}) = 0$. Vyslovte větou!