Karel Lerl

Poznámka k metodice obyčejných zlomků

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 69 (1940), No. Suppl., D118--D122

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120990`

VYUČOVÁNÍ.

Poznámka k metodice obyčejných zlomků.

Karel Lerl.

Většina učitelů potvrdí, jakých nemožných chyb se při počítání se zlomky dopouštějí žáci i ve vyšších třídách, a to i tehdy, když byly zlomky hned po prvé probrány a procvičeny důkladně. Kromě toho v dalších třídách se počítání se zlomky stále cvičí nejen při různém použití, ale i při výkladu mnohých nových poznatků (na př. při záporných zlomcích v tercii, v kvartě pak při zlomcích s obecnými čísly atd.). Je tedy nutno dbáti toho, aby v úvodní části byl výklad zlomků metodicky co nejvíce propracován. Proč je žákům tato část tak obtížnou a proč se vyskytují nejnemožnější chyby takořka po celou dobu studia? Je třeba si uvědomiti, že zavedením zlomků rozšiřujeme číselný obor, jenž byl žákům vštípen od počátku učení se počtům, ovšem až na čísla desetinná, která však jim nečiní nijak velkých potíží a nejsou jim cizí vzhledem k desetinnému dělení měr a vah, jakož i k běžnému používání. Druhým momentem je velké hromadění pravidel, obzvláště při výkonech druhého stupně. Na př. při dělení uvádí se zvlášť dělení zlomku celým číslem, je-li čitatel dělitelný a není-li dělitelný, pak dělení celého čísla zlomkem, zlomku zlomkem atd., při čemž vždy jsou uvedena pravidla o krácení. Tyto zvláštní formy pravidel přispívají jen k rozhojnění jejich počtu a nikoliv k prohloubení podstaty početních výkonů. Zavádějí-li se pak ještě současně některé individualisující obraty, není někdy divu, že nakonec žáci popletou vše dohromady. Různé vhodné obraty se samozřejmě doporoučejí, avšak vše se musí díti s patřičnou mírou. Na počítání s výhodou klade se váha v moderních metodikách nejen z praktických důvodů, nýbrž též proto, aby žák při jednoduchých počtech samostatně přemýšlel a aby byly vyloučeny jak ústní tak i písemné mechanické bezmyšlenkovité výpočty. Jsou však metodikové, kteří nadměrně vyžadují individualisujícího počítání. Tak na př. v Maennchenově metodice*) je několik článků,

*) Ph. Maennchen, Metodik des mathematischen Unterrichts, Frankfurt a. M. 1928, str. 16—25.

v nichž příklady jsou voleny tak, aby stále bylo poukazováno jen na kdejakou výhodu. Při zlomcích zachází Maennchen i tak daleko, že používá násobení a dělení mnohočlenu jednočlenem, jak je patrno z příkladů, kde násobence nebo dělence nahrazuje vhodným součtem, aby při dělení mohl použíti dalších jednotlivých výhod atd. Maennchen je ovšem jedním z předních propagátorů individualisujícího počítání a věnuje mu ve své knize i obšírný článek.

Skutečnost, že při počítání se zlomky vyskytují se chyby v mnohem větším počtu než kdekoliv jinde, je jen pobídkou k tomu, aby tato část jak ve výkladu tak i v aplikaci byla co nejvíce propracována. Úvodní část musí spočívati na názorném výkladu, aby obtížnější části mohly se hladce probírati. Při tom musíme se co nejvíce vyvarovati poukazování na naučené poučky a pravidla o početních výkonech, neboť tyto co nejdříve vymizí z paměti, a pak dochází k zmíněným stále se opakujícím chybám. Počítání se zlomky se musí žákům vžíti!

Úkolem jest uvésti žáky do podstaty a metod počítání se zlomky. Jádrem toho je pojem zlomku, představa jeho velikosti při srovnání s jinými čísly a všechny jiné vlastnosti při srovnání s celými čísly. Pochopení této individuality zlomků je základní podmínkou pro zdárné počítání. Úvod ten má býti prováděn s tak malými čísly, že se výpočty provádějí vesměs zpaměti a že spočívají na názoru. Použité znázornění nemá býti nijak složité. Přes všechny názorné pomůcky je však snad nejlepším používati zlomků jako čísel pojmenovaných (metry, kilogramy, dny, koruny atd.). Tím se výklad co nejvíce zjednoduší a není potřebí uváděti početní pravidla.

Počínáme pojmem lomené jednotky a přejdeme k lomenému číslu neboli zlomku. Důležité je zde čtení zlomků a vypisování jejich jak slovné tak i ciferné. Jejich znázornění lze provésti několikerým způsobem (na př. úsečkami, plochami, tělesy). Ovšem ihned se zde naskytají nesnáze. Žáci umějí rozděliti úsečku dosud toliko na 2^n dílů; také při znázornění kruhovými výsečemi jsou potíže. V tomto druhém případě provádíme sestrojení přibližně pomocí úhloměru dělením středového úhlu, s nímž jsou žáci již seznámeni. Přes to se toto znázornění doporučuje, aby již předem byl žákům vštípen názor na kruhový diagram výsekový. Třetí vhodné znázornění je plochami na čtverečkovaném papíře, kde lze provésti řadu základních úloh a kde znázornění není nijak pracné. Doporoučí je na př. A. Höfler ve své didaktice.*) Za jednotku se zde volí obdélník nebo čtverec. Posléze — jak již bylo uvedeno — nutno žáky učiti tomu, aby na zlomky hleděli

*) A. Höfler, Didaktik des mathem. Unterrichts, str. 78 a násl.

jako na čísla pojmenovaná, což nám prospívá tam, kde nelze použíti dosavadních pomůcek. S čísly pojmenovanými jsou žáci již seznámeni a stejně se všemi početními výkony s nimi prováděnými. Zdaří-li se nám učiniti výklad srozumitelnějším, není třeba uváděti řadu pravidel, často i zbytečných; tím se zmenší i počet chyb. Béřeme-li zlomek v tomto pojetí, lze postup probírání celkem roztříditi ve tři skupiny: α) proměna celých čísel na zlomky a zlomků v zlomky jiné (krácení a rozšiřování), β) počítání se zlomky jako čísly pojmenovanými, γ) násobení, při němž je násobitel zlomkem.

α) Diagramy výsekovými nebo jinými ukážeme, že 1 celek = 2 polovinám = 3 třetinám = . . . atd. Z řetězu rovnic lze na př. odvoditi, že 3 třetiny = 9 devítinám, z čehož 1 třetina = 3 devítinám, 2 třetiny = 6 devítinám, . . . 5 třetin = 15 devítinám, atd. Konečně proměníme 2, 3, . . . celky na poloviny, třetiny, . . . Přejdeme tedy k rozdělení zlomků na pravé a nepravé. Zaváděti pojem zlomku nevlastního nezdá se býti účelným, ježto mu schází pojem opačný. Diagramy samy pomohou nám při prvním porovnání zlomků, při převádění čísla smíšeného na zlomek a naopak. Je vhodné číslo smíšené probírati zde i v širším smyslu, t. j. i ten případ, kdy číslo celé se zlomkem je spojeno znaménkem minus. Po řadě takových příkladů, kdy používáme čísel malých, aby výpočty bylo možno provésti zpaměti, navyknou si žáci pohlížeti na zlomek jako na pojmenované číslo; pak se snadno v dalším nacvičí krácení, rozšiřování zlomků a uvádění na spol. jmenovatele. Názorné pomůcky podporují myšlení a zajišťují naučenému větší trvanlivost v paměti. Po tomto úvodě je třeba zopakovati zbytek poznatků z číselné teorie, t. j. nejv. spol. míru a nejm. spol. násobek. Zde by bylo zcela na místě zavésti název pro zlomek, jejž nelze dále již zkrátiti — *zlomek ireducibilní*, jemuž se středoškolské učebnice vyhýbají. (Český, dříve používaný název byl zlomek „nesvodný“. Snad bylo by možno místo toho zavésti na př. název „zlomek zcela zkrácený“.) Před krácením zvykejme žáky nejprve psáti v čitateli i jmenovateli prvočíselný rozklad, aby tím více jim v paměti utkvělo, že lze krátiti toliko činitele. Než přistoupíme k slučování zlomků, provádějme srovnání zlomků podle velikosti. Vhodné jsou zde i příklady, kde z rovnosti dvou zlomků hledáme jedno neznámé číslo (čitatele nebo jmenovatele), označené $x, y, \ldots$ Jsou to jakési první náznaky rovnic a provádějí se s malými čísly při všech početních výkonech.

β) Nyní teprve proveďme jednotlivé případy počítání se zlomky. První skupina obsahuje slučování stejnojmenných zlomků, dělení a měření jejich a posléze násobení zlomku celým číslem.

1. Je-li 10 K + 2 K — 7 K = 5 K, jest obdobně pro stejnojmenné zlomky $\frac{10}{6} + \frac{2}{6} - \frac{7}{6} = \frac{5}{6}$. Při slučování čísel smíšených

dlužno poukázati na to, že není vždy vhodné celky převáděti na zlomky; činíme to jen v případech nutných a tím výpočet valně zjednodušujeme, na př. $8\frac{3}{7} - 3\frac{4}{7} = 5\frac{3}{7} - \frac{4}{7} = 4\frac{10}{7} - \frac{4}{7} = 4\frac{6}{7}$.

2. $3\,K \times 5 = 3 \times 5\,K = 15\,K$, obdobně $\frac{3}{4} \times 5 = 3 \times \frac{5}{4} = \frac{3\times5}{4} = \frac{15}{4}$. Při násobení smíšeného čísla převeďme toto dříve na zlomek; Maennchen doporučuje jej násobiti přímo.

3. Dělení stejnojmenných zlomků provádíme obdobně jako měření čísel pojmenovaných: $20\,K : 4\,K = 5$, $\frac{20}{3} : \frac{4}{3} = \frac{20}{4} = 5$.

4. Dělení zlomku celým číslem provádíme nejprve pro případ, kdy čitatel je dělitelný celým číslem: $21\,K : 7 = 3\,K$, stejně $\frac{21}{4} : 7 = 21$ čtvrtin : $7 = 3$ čtvrtinám; $\frac{21}{4} : 7 = \frac{21 : 7}{4} = \frac{3}{4}$.

V dalším je třeba převádění na spol. jmenovatele.

5. $5\,dm + 3\,cm = 50\,cm + 3\,cm = 53\,cm$, obdobně $\frac{5}{4} + \frac{3}{7} = \frac{35}{28} + \frac{12}{28} = \frac{47}{28}$. Stejně při slučování zlomků vůbec.

6. $4\frac{2}{3} = 4 + \frac{2}{3} = 4$ celky $+ 2$ třetiny $= 4\,.\,3$ třetiny $+ 2$ třetiny $= 14$ třetinám. O slučování čísel smíšených byla již výše učiněna poznámka.

7. $2\,K : 50\,h = 200\,h : 50\,h = 4$, obdobně $\frac{20}{7} : 4 = 20$ sedmin : $: 4 \times 7$ sedmin $= \frac{20}{4\times7}$.

8. $5 : \frac{2}{3} = 5\,.\,3$ třetiny : 2 třetinami $= \frac{5\times3}{2}$.

9. $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = 2$ třetiny : 4 pětinami $= 10$ patnáctin : 12 patnáctinami $= \frac{10}{12}$, obdobně $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{10}{15} : \frac{12}{15} = \frac{2\times5}{3\times4}$.
Na všech těchto příkladech bylo jasně viděti, že nahrazení zlomku pojmenovaným číslem nám usnadnilo při prvém výkladu pravidla o krácení; myšlenkové pochody se tím redukovaly na nejmenší míru. Počítání je též rychlé. Nedůslednost obvyklého sledu jednotlivých výkonů je vyvážena kratším a jednoduchým výkladem. Tím je dbáno i staré zásady „postupovati od jednoduššího k složitějšímu". Čtenář si jistě povšiml, že vynecháno bylo násobení, kdy násobitel je číslo lomené a násobenec číslo jakékoliv.

γ) Abychom objasnili poslední případ, nutno si pomoci úvahou nebo znázorněním. — Stojí-li metr látky 90 K, zač jsou $\frac{4}{5}$ m? — 2 m . . . $90\,K \times 2 = 90 \times 2\,K$, 3 m . . . $90\,K \times 3 = 90 \times 3\,K$, . . . $\frac{4}{5}$ m . . . $90\,K \times \frac{4}{5} = 90 \times \frac{4}{5}\,K$. — Metr látky stojí 90 K, pětina $\frac{90}{5}$ K a $\frac{4}{5}$ m čtyřikrát tolik. Úsudkem nalezli jsme $\frac{90\times4}{5}$ K, což je výsledkem pro $90 \times \frac{4}{5}$ K. Je tedy $90 \times \frac{4}{5}\,K = \frac{90\times4}{5}\,K$; čili pro zlomky $90 \times \frac{4}{5} = \frac{90\times4}{5}$. Ježto $\frac{90\times4}{5} = \frac{4\times90}{5} = \frac{4}{5} \times 90$, jest $90 \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \times 90$.

Tento případ byl převeden na případ β 2. Šlo tu vlastně o to, aby úvahou byla potvrzena platnost komutativního zákona.

Stejně může zde býti použito obdélníka jako grafického znázornění. Při násobení zlomku zlomkem postupuje se obdobně. — Ze všeho je patrno, že při výkladu má se vlastně poukazovati na *princip permanence*, který se má pro tento nový druh čísel prokázati. O tomto principu a jeho významu jak v nižší tak i ve vyšší matematice bude pojednáno v jiném článku.

Ukázka písemné práce z metodiky matematiky při ustanovovací zkoušce profesorské.

(Obraz vyučovací hodiny.*)

Antonín Peterka, Praha.

Učebný úkol:

Opakování: Výpočet druhé mocniny čísel dekadických (§ 8, odst. 33—34).

Nové učivo: Pojem druhé odmocniny čísel zvláštních (§ 8, odst. 35).

Učebnice: Ladislav Červenka: Aritmetika pro II. třídu středních škol. Osmé vydání.

I. Opakování.

Pamětné cviky provádíme opakováním velké násobilky. V této hodině je zakončíme opakováním druhých mocnin čísel 1—20. Zkoušíme v libovolném pořadí čísel, každou mocninu však nejméně jednou. Na každý příklad voláme jiného žáka.

Učitel: Napište na tabuli 13^2!

Žák píše a současně vyslovuje, co napsal.

Učitel: Jak nazýváme početní úkon, který jste naznačil na tabuli?

Žák: Tento početní úkon nazýváme umocňování dvěma.

Učitel: Jak se nazývá početní výraz 13^2?

Žák: 13^2 je druhá mocnina 13.

---

*) Písemné práce z matematiky při ustanovovacích zkouškách profesorských bývají zpravidla dvojího druhu. Jedna otázka bývá přehledná a týká se rozdělení většího, uzavřeného celku učebné látky na jednotlivé vyučovací hodiny. Jako druhý úkol bývá uloženo vypracovat obraz jedné vyučovací hodiny. Také při praktických výstupech se většinou žádá, aby kandidáti provedli písemnou přípravu na vyučovací hodinu. Ježto kandidáti bývají často na rozpacích, v jaké formě mají tyto písemné práce a přípravy prováděti, hodlá redakce postupně otisknouti několik vzorů těchto prací. Tento článek jest jedním z těchto vzorů. Za jeho obsah i formu odpovídá přirozeně autor. (*Poznámka redakce.*)