Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Otakar Kodl

Problém Malfattiův

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 69 (1940), No. Suppl., D1--D5

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120982

ČLÁNKY A REFERÁTY.

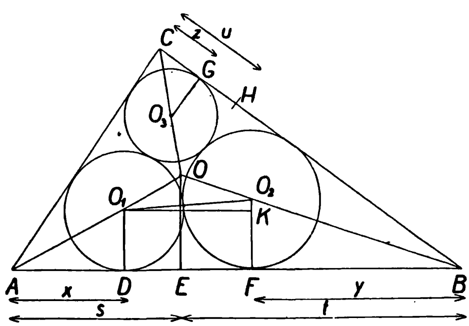
Problém Malfattiův.

Dr. **Otakar Kodl**, Valašské Meziříčí.

Tento problém žádá, aby se do daného trojúhelníka ABC vepsaly tři kružnice, z nichž každá se dotýká druhých dvou kružnic a dvou stran trojúhelníka.

Jeho řešením se zabývalo mnoho matematiků jako Gergonne, Lechmutz, Zornow, Schellbach, Mertens, Catalan, Simons, Steiner, Pelletrau, Lebon (viz časopis JČMF, XIX, str. 47) a u nás řešil jej trigonometricky dr. K. Rychlík (Časopis JČMF XL).

V obrazci značí O střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC, O_1, O_2, O_3 středy kružnic Malfattiových, D, E, F paty kolmic



Kreslil O. Kodl. Archiv JČMF.

spuštěných s bodů O_1, O, O_2 na stranu $\overline{AB}$, G a H paty kolmic s bodů O_3 a O na $\overline{BC}$ a K patu kolmice s O_1 na $\overline{O_2F}$.

Dále je $\overline{AD} = x$, $\overline{BF} = y$, $\overline{CG} = z$, $\overline{AE} = s$, $\overline{BE} = t$, $\overline{CH} = u$, r poloměr kružnice vepsané a r_1, r_2, r_3 poloměry Malfattiových kružnic.

Z obrazce je patrno, že $\overline{O_2K} = | r_2 - r_1 |$,

$$\overline{O_1K} = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2} = 2\sqrt{r_1 r_2}.^{1})$$

[1]) Symbol $\sqrt{}$ značí nezáporné číslo.

Z podobnosti trojúhelníků ADO_1, AEO plyne $r_1 = \frac{xr}{s}$ a cyklicky $r_2 = \frac{yr}{t}$.

Tím jsme vedeni k rovnici

$$x + y + 2\sqrt{r_1 r_2} = s + t$$

anebo, dosadíme-li za r_1 a r_2,

$$x + y + 2r\sqrt{\frac{xy}{st}} = s + t \tag{1}$$

a cyklickou substitucí k dalším dvěma

$$y + z + 2r\sqrt{\frac{yz}{tu}} = t + u, \tag{2}$$

$$z + x + 2r\sqrt{\frac{zx}{us}} = u + s. \tag{3}$$

Původce úlohy, italský matematik Malfatti, uveřejnil řešení této soustavy tří rovnic o třech neznámých x, y, z ve tvaru:

$$\left.\begin{aligned} 2x &= s + t + u - r + \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2}, \\ 2y &= s + t + u - r - \sqrt{r^2 + s^2} + \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2}, \\ 2z &= s + t + u - r - \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} + \sqrt{r^2 + u^2}. \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

(Viz A. Adler: Theorie der geometrischen Konstruktionen, str. 11.)

Dosadíme-li tyto hodnoty do systému (1), (2), (3), vyhovují.

Způsob, kterým Malfatti nalezl řešení, neuveřejnil a praví o něm, že je velmi složitý.

Podávám v tomto článku způsob, jímž jsem soustavu (1), (2), (3) rozřešil ryze algebraicky.

Rovnice (1) je vzhledem k $\sqrt{y}$ druhého stupně a dává

$$\sqrt{y} = -r\sqrt{\frac{x}{st}} \pm \sqrt{\frac{r^2x}{st} + s + t - x};$$

podobně z rovnice (2) plyne

$$\sqrt{y} = -r\sqrt{\frac{z}{tu}} \pm \sqrt{\frac{r^2z}{tu} + t + u - z}.$$

Užijeme-li u odmocnin znamének + (vzhledem k tomu, že $\sqrt{y} > 0$), pak pravé strany obou posledních rovnic vedou k rovnici o neznámých x a z

$$-r\sqrt{\frac{x}{st}} + r\sqrt{\frac{z}{tu}} = -\sqrt{\frac{r^2x}{st} + s + t - x} + \sqrt{\frac{r^2z}{tu} + t + u - z}.$$

Tuto rovnici umocníme dvěma, čímž vznikne

$$-\frac{2r^2}{t}\sqrt{\frac{xz}{su}}+x+z-s-2t-u=$$

$$=-2\sqrt{\left[\left(\frac{r^2}{st}-1\right)x+s+t\right]\left[\left(\frac{r^2}{tu}-1\right)z+t+u\right]}. \qquad (\alpha)$$

Z rovnice (3)

$$z+x+2r\sqrt{\frac{zx}{us}}=u+s$$

určíme výraz

$$-\frac{2r^2}{t}\cdot\sqrt{\frac{xz}{su}}=\frac{[x+z-(s+u)]\,r}{t}$$

a dosadíme-li do rovnice (α), máme

$$(x+z)\left(1+\frac{r}{t}\right)-\frac{(s+u)\,r}{t}-(s+2t+u)=$$

$$=-2\sqrt{\left[\left(\frac{r^2}{st}-1\right)x+s+t\right]\left[\left(\frac{r^2}{tu}-1\right)z+t+u\right]}.$$

Označíme $1+\dfrac{r}{t}=A$,

$$-\frac{(s+u)\,r}{t}-(s+2t+u)=B,$$

a provedeme-li násobení na pravé straně poslední rovnice pod odmocnítkem, je

$$(x+z)\,A+B=$$

$$=-2\sqrt{\left(\frac{r^2}{st}-1\right)\left(\frac{r^2}{tu}-1\right)xz+\left(\frac{r^2}{st}-1\right)(t+u)\,x+\left(\frac{r^2}{tu}-1\right)(s+t)\,z+(s+t)(t+u)}. \qquad (\beta)$$

Poněvadž

$$r=\sqrt{\frac{stu}{s+t+u}},$$

je

$$\frac{r^2}{st}-1=\frac{u-s-t-u}{s+t+u}=-\frac{s+t}{s+t+u}$$

a podobně

$$\frac{r^2}{tu}-1=-\frac{t+u}{s+t+u}.$$

Pak je

$$\left(\frac{r^2}{st}-1\right)(t+u)=\left(\frac{r^2}{tu}-1\right)(s+t)=-\frac{(s+t)(t+u)}{s+t+u}.$$

a rovnice (β) nabývá tvaru

$$(x+z)A+B=$$

$$=-2\sqrt{\frac{(s+t)(t+u)}{(s+t+u)^2}\cdot\left[\frac{s+u-(x+z)}{2r}\right]^2su-}$$

$$\overline{-\frac{(s+t)(t+u)}{s+t+u}(x+z)+(s+t)(t+u)}, \qquad (\gamma)$$

při čemž ještě užito dosazení

$$xz=\left[\frac{s+u-(x+z)}{2r}\right]^2 su,$$

plynoucího z rovnice (3).

Položíme-li $x+z=\eta$, $s+u=F$,

$$\frac{(s+t)(t+u)su}{4(s+t+u)^2r^2}=\frac{(s+t)(t+u)}{4t(s+t+u)}=C,$$

$$\frac{(s+t)(t+u)}{s+t+u}=D \text{ a } (s+t)(t+u)=E,$$

pak rovnice (γ) zní

$$A\eta+B=-2\sqrt{C(F-\eta)^2-D\eta+E}. \qquad (\delta)$$

Rovnici (δ) umocněme na druhou, čímž vznikne rovnice v η stupně druhého

$$A^2\eta^2+2AB\eta+B^2=4C(F-\eta)^2-4D\eta+4E$$

a po úpravě

$$(A^2-4C)\eta^2+2(AB+4CF+2D)\eta+B^2-4CF^2-4E=0. \qquad (\varepsilon)$$

Do výrazů pro koeficienty rovnice (ε) dosaďme za veličiny A, B, C, D, E a F jejich původní význam.

Obdrží se tím

$$A^2-4C=\frac{2r}{t};$$

ježto $B=-(AF+2t)$, je

$$AB+4CF+2D=-A(AF+2t)+4CF+2D=-F(A^2-$$

$$-4C)-2(At-D)=-(s+u)\frac{2r}{t}-2\left[t+r-\frac{(s+t)(t+u)}{s+t+u}\right]=$$

$$=-(s+t+u-r)\frac{2r}{t}.$$

Třetí koeficient rovnice (ε)

$$B^2 - 4CF^2 - 4E = A^2F^2 + 4AFt + 4t^2 - 4CF^2 - 4E = F^2 (A^2 - 4C) + 4 (AFt + t^2 - E) = (s + u)^2 \frac{2r}{t} + 4 [(t + r) (s + u) + t^2 - (s + t) (t + u)] = \frac{2r}{t} [(s + t + u - r)^2 - (t^2 + r^2)].$$

Vrátíme-li se s těmito hodnotami koeficientů k rovnici (ε) a dělíme ji prvním koeficientem $\frac{2r}{t}$, máme konečně rovnici

$$\eta^2 - 2 (s + t + u - r) \eta + (s + t + u - r)^2 - (t^2 + r^2) = 0. \qquad (\zeta)$$

Řešením rovnice (ζ) obdržíme kořeny

$$\eta_{1,2} = s + t + u - r \pm \sqrt{t^2 + r^2}$$

neboli (pro znaménko —)

$$x + z = s + t + u - r - \sqrt{t^2 + r^2}$$

a cyklickou substitucí další dvě rovnice

$$y + x = s + t + u - r - \sqrt{u^2 + r^2},$$
$$z + y = s + t + u - r - \sqrt{s^2 + r^2}.$$

Odečteme-li postupně od součtu dvou rovnic rovnici třetí, dospějeme snadno k řešení Malfattiovu (I).

Úpatnice a pseudoúpatnice II.

Zdeněk Pírko, Praha.

Článek je pokračováním stejnojmenného článku otištěného v „Rozhledech mat. přír.", 1935. Tam byla úpatnicová a pseudoúpatnicová konstrukce aplikována na t. zv. křivky Laméovy a sinusové spirály a tímto způsobem odvozena řada křivek zvláštních. Zde ve formě úloh (s nástinem řešení a s výsledky) podávám některé obecnější vlastnosti těchto křivek, ukazuji jejich souvislost. Posléze připojena aplikace na kuželosečky.[1])

1. Obalovou křivkou ∞^1 křivek Laméových indexu n,

$$\left(\frac{x}{\xi}\right)^n + \left(\frac{y}{\eta}\right)^n - 1 = 0,$$

---

[1]) Oba články budou uzavřeny stejně upraveným článkem o t. zv. křivkách harmonických, v jejichž výtvarném principu jsou konstrukce úpatnicová i pseudoúpatnicová obsaženy jako jednoduchá metrická specialisace.