Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Otomar Pankraz

O pojmu pravděpodobnosti

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 69 (1940), No. Suppl., D73--D81

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120977

ČLÁNKY A REFERÁTY.

O pojmu pravděpodobnosti.

Otomar Pankraz.

V zimním semestru 1938—39 a v letním semestru 1939 jsem konal na Karlově universitě přednášky z počtu pravděpodobnosti, při čemž jsem byl nucen vypracovati pro své posluchače úvodní kapitolu o pojmu pravděpodobnosti obšírnějším způsobem, než jak učinil na př. Kolmogoroff ve své knize „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung" (Berlin 1933). Ukázalo se totiž, že jest nutné vyložiti mnohé důležité pojmy a vztahy, dříve než se zavedou pravděpodobnostní axiomy. Hleděl jsem tak učiniti způsobem stručným, přesným a jasným, ale při tom úplným. Jestliže některé pojmy, jako na př. isomorfismus, nejsou v této stati vyloženy, odkazuji čtenáře na svoji studii „O axiomech počtu pravděpodobnosti" (Rozpravy Jednoty pro vědy pojistné, Praha 1939), kde jsem diskutoval hlavně problematická místa v základech tohoto počtu. Připomínám, že úvahy, které předkládám, jsou schopny zobecnění na t. zv. svazy (angl. lattices[1]) a že jich lze použíti jak pro obyčejné statistické teorie, tak i pro statistiky fysikální. K uveřejnění této stati dochází na žádost posluchačů, aby měli vhodný úvod k různým novějším pracím z počtu pravděpodobnosti.

I.

Množiny uzavřené vůči operaci. Těleso.

Nejlepším formálně matematickým nástrojem kterékoliv teorie počtu pravděpodobnosti jest teorie množin a proto jeví se účelné zavésti předem některé teoretickomnožinové definice.

Buďtež

$$a, b, c, d, \ldots$$

elementy zcela abstraktní povahy a

[1]) O souvislosti svazů a pravděpodobnosti viz na př. V. Glivenko, Théorie générale des structures. (Actualités sci. et industr. No. 652, Paris 1938.) Str. 7, 26.

$$M = \{a, b, c, d \dots\}$$

množina z nich složená. Okolnost, že element a patří do M pišme — jak jest obvyklé — jako

$$a \in M;$$

je-li N podmnožina (částečná množina) pro M anebo jsou-li obě tyto množiny stejné, pak tento jejich vztah označíme

$$M \supseteqq N.$$

Nechť pro uspořádanou dvojici elementů $a, b \in M$ jest definován předpis (binární, dvojčlenná operace) Φ, pomocí kterého se k této dvojici přiřazuje jeden a jen jeden symbol e, což píšeme

$$\Phi(a, b) = e \quad \text{anebo také} \quad (a\, \Phi\, b) = e.$$

Nyní jsou možné případy:

1. Buď symbol e má smysl, takže značí abstraktní element a potom pravíme „operace Φ jest v M definována". Obecně při tom: buď $e \in M$ anebo e nepatří do M. e sluje výsledek operace Φ.

2. Anebo symbol e jest beze smyslu, takže Φ pro danou dvojici a, b není definována, protože e nepředstavuje žádný abstraktní element.

Pomocí těchto pojmů si zavedeme následující dvě definice:

Definice 1. Jestliže operace Φ pro libovolnou dvojici elementů z M dává výsledek, který opět patří do M, pak M sluje uzavřená množina vzhledem k Φ.

Pro elementy z M může býti obecně definováno více operací Φ_1, Φ_2, Φ_3, ..., při čemž jest lhostejné, jsou-li tyto operace navzájem na sobě závislé či nikoliv.

Definice 2. Množina M se nazývá tělesem, je-li uzavřená vůči každé operaci, která v M jest definována.

Prozatím jsme uvažovali jen dvoučlenné operace, což však není nutné. Pro účele teorie pravděpodobnosti jest naopak výhodné, jestliže se definice uzavřenosti a tělesa vztahují na operace bez ohledu k tomu, jsou-li jednočlenné (unární) či dvoučlenné.

II.

Pojem náhodného jevu.[2])

Ve vědeckých teoriích popisujeme jevy pomocí vět těchto druhů:

1. Věta kausální. „Jev B se uskuteční tehdy a jen tehdy, když před ním nastane jev A".

[2]) Rozeznávám slovo „náhodný" od „náhodový". Náhodným může býti jev (tedy jen to, co se uskutečňuje). Výrok (věta, funkce, veličina a pod.), který popisuje náhodný jev, jest náhodový.

A nazýváme příčinou jevu B a B účinkem (nebo: následkem) jevu A.

2. Náhodová věta V_X. Budiž

$$M_X = \{\xi, \eta, \zeta, \ldots\}$$

množina elementů $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, které nazývejme elementárními jevy. Pak jest

$V_X \equiv$ „Jev X se uskuteční tehdy a jen tehdy, když před ním se vyskytne jeden z elementárních jevů množiny M_X".

X sluje náhodný jev.

Má-li množina M_X jen jediný element, pak věta V_X přechází ve větu kausální.

Má-li se uskutečniti jev X, musí býti splněna tato nutná a postačující podmínka: před výskytem jevu X musí se uskutečniti jeden a to jen jeden (nezáleží však na tom který) elementární jev z množiny M_X. Jev X se tedy neuskuteční, jestliže před ním nastal jev, který nepatří do M_X. Náhodnost jevu X jest způsobena právě okolností, že jeho výskyt nenastane jen při jediném elementárním jevu, nýbrž při více takových jevech.

Množina M_X může býti konečná, nekonečná spočetná anebo nespočetná.

Známe-li množinu M_X, známe tím také úplně jev X a obráceně. Každá množina M_X definuje tedy určitý náhodný jev X a všude, kde v našich úvahách přichází X, můžeme jej nahraditi množinou M_X. Jest proto zcela ekvivalentní, mluvíme-li buď o „jevu X" anebo o „množině M_X".

III.

Struktura statistické teorie.

Důvod, aby nějaká vědecká teorie Ω mohla býti označena jako statistická, leží v okolnosti, že Ω prostřednictvím náhodových vět $V_X, V_Y, \ldots$ pojednává o náhodných jevech $X, Y, \ldots$ Každou statistickou teorii Ω můžeme proto považovati za množinu určitých náhodových vět:

$$\Omega = \{V_X, V_Y, \ldots\}.$$

Tázati se po struktuře teorie Ω znamená:

1. udati transformativní pravidla, jak z daných náhodových vět z Ω pomocí určitých elementárních větných spojení, která jsou v Ω definována, lze odvozovati nové náhodové věty, a

2. zjistiti, zdali soubor všech vět teorie Ω jest uzavřený či nikoliv.

(1.) Za elementární větná spojení (t. j. operace v množině Ω), kterým každá statistická teorie musí vyhovovati, budeme považovati následující tři operace:

1. binární operaci „a“: „V_X a V_Y“, to zn. „platí obě věty V_X a V_Y“;

2. binární operaci „nebo“: „V_X nebo V_Y nebo obojí“, t. zn. „platí aspoň jedna z vět V_X, V_Y“;

3. unární operaci „ne (nikoli)“: „nikoli V_X“. to zn. „platí-li V_X, pak věta $\overline{V_X}$ neplatí (a naopak)“.

K tomu ihned lze odvoditi následující ekvivalentní rčení:

pro náhodné jevy	pro množiny elementárních jevů
1. jevy X a Y se vyskytnou současně (nastanou právě jevy X, Y);	1. průnik $M_X \,.\, M_Y$;
2. nastane aspoň jeden z jevů X, Y;	2. součet $M_X + M_Y$;
3. jev X nenastane.	3. značí-li E_Ω množinu všech elementárních jevů, které v teorii Ω přicházejí v úvahu, pak jde o množinový doplněk $E_\Omega - M_X$.

(2.) Abychom zodpověděli otázku uzavřenosti teorie Ω, použijeme principu logického empirismu:

Každá věta V_X statistické teorie Ω musí býti větou empiricky kontrolovatelnou; věta, která se nedá (ať přímo či nepřímo) empiricky zkontrolovat, jest pro Ω beze smyslu.

Tento princip zasahuje velmi radikálně do vědeckého myšlení, protože očišťuje teorie od vět nedokazatelných, které jsou jen přítěží vědeckého výzkumu.

Nyní jsou v zásadě možny dva případy:

I. Výsledek spojení dvou libovolných vět teorie Ω jest věta empiricky kontrolovatelná. Pak rovněž popisuje náhodné jevy z teorie Ω a jest tedy větou, která patří do Ω.

Z toho plyne: Věty statistické teorie Ω tvoří (v tomto případě) těleso (větné).

Přejdeme-li od vět k množinám elementárních jevů, obdržíme ekvivalentní výsledek: Množiny elementárních jevů statistické teorie Ω tvoří (množinové) těleso, které obsahuje E_Ω, jakožto největší množinu. Každá množina M_X elementárních jevů teorie Ω jest podmnožinou pro E_Ω:

$$E_\Omega \supseteqq M_X.$$

Tvrzení obsažená v těchto výsledcích můžeme označiti jako spojovatelnost vět v teorii Ω. V tomto případě jsou zahrnuty na př. teorie vitální a hospodářské statistiky a vůbec všechny statistické teorie, které se týkají makroskopických jevů.

II. Spojovatelnost vět neplatí však obecně pro mikroskopické jevy kvantové fysiky. Je-li Ω určitá statistická teorie kvantové fysiky, pak spojením dvou vět z této teorie obdržíme

1. buď větu, která jest empiricky kontrolovatelná, tedy větu v Ω,

2. anebo větu, kterou empiricky nelze prokázat (tedy větu empiricky beze smyslu), takže výsledek větného spojení nepatří do Ω, ačkoliv obě věty, na kterých toto spojení bylo použito, do Ω patří.

Rozhodnutí, který z těchto dvou případů v kvantové fysice nastane, opírá se o Heisenbergovy relace neurčitosti: platí-li pro dva náhodné jevy z Ω Heisenbergova relace neurčitosti, pak věty těmto jevům přiřazené nejsou schopny spojení.

Máme tedy výsledek: Množina vět určité statistické teorie kvantové fysiky není uzavřená vůči základním větným spojením (tedy: netvoří větné těleso). K této množině existuje sice množinový systém množin elementárních jevů, ale tento systém není množinovým tělesem. Lze však naproti tomu dokázati: Množina všech vět statistické kvantové teorie dá se nahraditi množinou projektivních operátorů v abstraktním Hilbertově prostoru. (J. v. Neumann: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin 1932. Str. 130 až 134.)

*

Dva náhodné jevy X, Y, které se navzájem vylučují. slují alternativní. Jest to případ, kdy průnik odpovídajících množin M_X, M_Y jest nulová množina:

$$M_X \,.\, M_Y = 0,$$

to zn., že M_X a M_Y jsou disjunktní množiny.

K této nulové množině patří věta:

$V_0 \equiv$ „žádný z náhodných jevů nenastane“.

Věta V_0 patří do každé statistické teorie, protože bez ní bychom nemohli vysloviti četné jiné věty těchto teorií.

IV.

Pojem pravděpodobnosti.

Buďtež X, Y dva náhodné jevy statistické teorie Ω a M_X, M_Y jim odpovídající množiny elementárních jevů.

Položme si následující otázku, která tvoří jádro problému indukce: Víme-li, že se uskuteční jev X, kdy můžeme z toho usuzovati, že se uskuteční jev Y?

Matematické zpracování tohoto problému lze provésti různým způsobem.

Nechť M_X resp. M_Y jest množina elementárních jevů, při kterých nastane X resp. Y. Pak nutná podmínka, aby platil větný vztah

„Když Y, pak X"

jest platnost množinového vztahu

$$M_X \supseteqq M_Y.$$

Tato podmínka není však postačující, protože obecně:

„Když X, pak může, ale nutně nemusí Y".

Vztah $M_X \supseteqq M_Y$ tedy sám o sobě nepostačuje k rozhodnutí problému indukce. K tomu jest třeba, aby mezi množinami M_X, M_Y bylo těsnější spjetí než jest pouhá teoretickomnožinová inkluse. O podmínkách této těsnosti pojednává teorie Ω. Soubor těchto podmínek ohodnotíme tím, že ke vztahu $M_X \supseteqq M_Y$ přiřadíme jedno a jen jedno číslo $P(X, Y)$ jakožto míru těsnosti mezi M_X a M_Y. Číslo $P(X, Y)$ budeme nazývati pravděpodobností jevu Y vzhledem k jevu X anebo také „pravděpodobnost, že X, když Y".

Patrno, že obecně jde o větný vztah

„Jestliže X, potom Y s pravděpodobností P",

to zn., patří-li nějaký element do X, patří s pravděpodobností P také do Y".

Pravděpodobnost jest tedy číslo přiřazené určitému vztahu mezi dvěma náhodnými jevy X, Y a má smysl jen se zřetelem k dané statistické teorii Ω. V různých statistických teoriích pro tytéž jevy X, Y může míti číslo P různé numerické hodnoty, protože ohodnocení vztahu $M_X \supseteqq M_Y$ závisí na hledisku (principech), které v těchto teoriích zastáváme.

Závislost čísla $P(X, Y)$ na dvou argumentech vyjadřuje právě okolnost, že pomocí pojmu pravděpodobnost chceme zvládnouti induktivní výzkum, neboť v problému indukce jde (nejméně) o dva náhodné jevy.

Které formální vlastnosti musí míti číslo $P(X, Y)$ abychom je mohli považovati za pravděpodobnost, o tom nás poučí axiomy. Podle volby těchto axiomů obdržíme různý druh počtu pravděpodobnosti. Jsou-li tyto axiomy stanoveny, pak jedinou úlohou počtu pravděpodobnosti jest: z daných pravděpodobností odvozovati nové pravděpodobnosti. Počet pravděpodobnosti nejedná tedy o způsobu, jakým jest číslo P přiřazeno ke vztahu $M_X \supseteqq M_Y$, nýbrž vychází z tohoto přiřazení jako z daného údaje.

Můžeme proto souborně říci: Jedinou a nejdůležitější úlohou statistické teorie Ω jest odvození čísla P pro určitý vztah $M_X \supset M_Y$. Odvození pravidel, podle kterých počítáme s čísly P. jest úkolem (určitého) počtu pravděpodobnosti. Statistická teorie tvoří tedy základ počtu pravděpodobnosti a obráceně bez počtu pravděpodobnosti byla by tato teorie neúplná. protože by nebylo možné z jejích údajů odvoditi nějaký závěr.

V.

Množiny isomorfní se statistickými teoriemi.

Dříve než se rozhodneme pro určité axiomy počtu pravděpodobnosti, uvažme, kterými množinami lze danou statistickou teorii Ω, t. j. určitou množinu náhodových vět. nahraditi.

Víme, že každá náhodová věta V_X, která pojednává o náhodném jevu X, dá se nahraditi množinou M_X. Provedeme-li nějakou operaci $\Phi_V^{(1)}$ na věty $V_X, V_Y, \ldots$, pak jest vždy možné nalézti k $\Phi_V^{(1)}$ vhodnou operaci $\Phi_M^{(1)}$, která by byla použitelna na množinách $M_X, M_Y \ldots$ Opak však neplatí: z okolnosti, že na množinách $M_X, M_Y, \ldots$ lze provésti operaci $\Phi_M^{(2)}$, obecně ještě neplyne. že k ní existuje vhodná operace $\Phi_V^{(2)}$ mezi větami V_X. $V_Y \ldots$; operace $\Phi_V^{(2)}$ může ale nemusí míti smysl. Věty $V_X, V_Y, \ldots$ možno tedy vzájemně jednoznačně zobraziti na množiny $M_X, M_Y, \ldots$, ale jejich množina

$$\{V_X, V_Y, \ldots\} \tag{1}$$

obecně není isomorfní systému množin

$$\{M_X, M_Y \ldots\}; \tag{2}$$

tento isomorfismus platí tehdy a jen tehdy. tvoří-li věty V_X, $V_Y \ldots$ Booleovu algebru.[3])

Vzniká proto následující otázka: Jakou množinou M dá se nahraditi množinový systém (2), aby M byla isomorfní s množinou (1)? Jest přirozené, že množina M bude záviseti na operacích, které jsou v (1) definovány; podle volby těchto operací musíme zvoliti elementy v M a jejich spojení.

Ve zcela abstraktní formě, bez zřetele k speciálním interpretacím, můžeme proto statistickou teorii Ω považovati za množinu abstraktních elementů $X, Y, \ldots$ při čemž připouštíme všechny množiny, které s Ω jsou isomorfní.

Náš postup se tedy rozpadá ve tři části:

1. Vycházíme z vět $V_X, V_Y, \ldots$, které tvoří určitou statistickou teorii Ω.

---

[3]) O Booleově algebře viz na př. Glivenko, loc. cit., str. 36.

2. Na to vyhledáme odpovídající množiny elementárních jevů M_X. M_Y. . . . a pomocí uvedené statistické teorie Ω odvodíme čísla $P(X, Y)$ pro vztahy $M_X \supset M_Y$.

3. V dalším nejsou množiny elementárních jevů nutné. nýbrž můžeme použíti elementů kterékoliv množiny, která jest isomorfní s Ω.

VI.

Axiomy počtu pravděpodobnosti.

Pomocí isomorfních množin s Ω — které rovněž značme Ω — můžeme udati dva axiomatické systémy pro čísla $P(X, Y)$.

Dříve však ještě si zaveďme tuto pomocnou definici: Dva abstraktní elementy X, Y z abstraktní množiny Ω, které jedno-jednoznačně při daném isomorfismu odpovídají množinám M_X, M_Y elementárních jevů, slují alternativní, jestliže tyto množiny jsou navzájem disjunktní. Podobně operaci $X \Psi Y$ nechť v tomto isomorfismu odpovídá teoretickomnožinový součet $M_X + M_Y$.

Budiž nyní Ω (konečná nebo nekonečná) množina abstraktních elementů X. Y, Z. . . . Pak (Ω, P) se nazývá

obyčejným	kvantovým

rozdělením pravděpodobnosti P v Ω, jsou-li splněny tyto podmínky:

I_1. Ω jest těleso vůči operacím v ní definovaným.	I_2. Ω obecně není uzavřená množina vůči operacím v ní definovaným.

$II_1 = II_2$. Ke každým dvěma elementům v X, $Y \in \Omega$ jest přiřazeno jedno jediné reálné číslo $P(X, Y) \geq 0$.

$III_1 = III_2$. Pro libovolný element $X \in \Omega$ platí $P(X, X) = 1$.

$IV_1 = IV_2$. Jsou-li Y, Z dva alternativní elementy, pak

$$P(X, Y \Psi Z) = P(X, Y) + P(X, Z).$$

	V_2. Existenční axiom. Význam mají jen takové vztahy mezi čísly P, jejichž všechny argumenty jsou v Ω.

Existenční axiom pro obyčejné rozdělení jest zbytečný, protože jest již obsažen v požadavku uzavřenosti I_1 množiny Ω.

Tyto axiomatické systémy jsou bezesporné, ale nikoliv úplné, takže přidáním nových axiomů lze je upraviti tak, aby se hodily na problémy, které právě zkoumáme. Tak na př. ke kvantovému rozdělení přibíráme axiomaticky některé vlastnosti Schrödingerovy vlnové rovnice, jak ukázal na př. M. Strauss v pojednání „Zur Begründung der statistischen Transformationstheorie der Quantenphysik" (Sitzungber. d. preuss. Akad. Berlin 1936.) anebo pojem tělesa specialisujeme (na př. na pojem „Borelovo těleso"), čímž do axiomatických systémů můžeme zavésti infinitesimální pojmy limity případně spojitosti.

VII.

Speciální pojmy pravděpodobnosti.

Kdyby každý ze zavedených axiomatických systémů byl úplný, byl by pomocí něho definován vždy jen jediný pojem. Protože jsou však neúplné, může jim vyhovovati více pojmů. Každý pojem P, který vyhovuje uvedeným axiomům, nazveme pravděpodobností.

Podle povahy zkoumaných otázek, budou to různé pojmy, z nichž uveďme dva jako nejdůležitější.

1. Pojem absolutní (nepodmíněné) pravděpodobnosti. Nechť Ω jest množinové těleso množin $A, B, \ldots$ elementárních jevů. Pak obsahuje největší množinu E_Ω. Číslo

$$P(E_\Omega, A)$$

označme si stručně $P(A)$ a nazveme absolutní (nepodmíněnou) pravděpodobností jevu A při „samozřejmém" předpokladu E_Ω.

2. Pojem podmíněné pravděpodobnosti. Pomocí absolutní pravděpodobnosti definujme zlomek

$$\frac{P(AB)}{P(A)}$$

za předpokladu $P(A) > 0$. Stručně tento zlomek nejčastěji značíme jako $P_A(B)$ a nazýváme pravděpodobností jevu B při podmínce A.

Že vskutku tyto speciální pojmy axiomům vyhovují, o tom viz důkaz na př. Kolmogoroff, loc. cit., str. 2, 6 nebo K. Rychlík, Úvod do počtu pravděpodobnosti (Praha 1938), str. 27, 28.

Uvedeným zjednodušením lze vyšetřování vlastností pravděpodobnosti převésti do teorie aditivních jednoargumentových množinových funkcí. Je to ovšem specialisace velmi účelná, ale zdaleka nevyčerpávající obecný pojem pravděpodobnosti, jak jest našimi axiomy definován.

Poznámka. Že kromě toho ve statistické praksi jest výhodná interpretace pravděpodobnosti jako limitní relativní četnost, jest všeobecně známo. Tato interpretace rovněž se zařazuje pod naše axiomy.