Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Libický

Casparyho nové věty z geometrie trojúhelníka. [IV.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 31 (1902), No. 4, 273--283

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120963

$$y' = \frac{y}{x} \cdot \frac{my - x^2}{2my - x^2},$$

směřující k témuž bodu osy x majícímu úsečku $-x_1$, přináležejí bodům ležícím na křivce (1).

Rovnice (1) značí patrně hyperbolu, jedna asymptota její jest rovnoběžná s osou y ve vzdálenosti $-x_1$, druhá dotýká se paraboly n, a směrnice její má hodnotu $\frac{x_1}{m}$.

Všecky takové hyperboly oskulují se v O, majíce v bodě tom $\frac{m}{2}$ za poloměr křivosti. Pro $x_1 = \infty$ přejde hyperbola v parabolu $x^2 = my$.

Casparyho nové věty z geometrie trojúhelníka.

Dokazuje

A. Libický,

professor na Král. Vinohradech.

(Dokončení.)

10. Z trojúhelníka $B_1 B_2 B_3$ odvodíme ještě jeden důležitý trojúhelník. Veďme v $\triangle B_1 B_2 B_3$ mediany $B_1 G$, $B_2 G$ a $B_3 G$ (obr. 7.) a ustanovme průsečík C_1 první z nich s příčkou $A_1 X$, dále průsečík C_2 druhé s $A_2 X$ a průsečík C_3 třetí s $A_3 X$. Rovnice bodů C_1, C_2, C_3 nalezneme z rovnice (4). Vložíce tu za x_1, x_2, x_3 hodnoty souřadnic bodu A_1, totiž 1, 0, 0, za x'_1, x'_2, x'_3 hodnoty souřadnic bodu X: x_1, x_2, x_3, za y_1, y_2, y_3 souřadnice bodu B_1: x_1, x_3, x_2 a za y'_1, y'_2, y'_3 souřadnice bodu G: 1, 1, 1, dostaneme rovnici bodu C_1 ve tvaru:

$$c'_1 C_1 = -\begin{vmatrix} 0, & x_1, & 1 \\ x_2, & x_3, & 1 \\ x_3, & x_2, & 1 \end{vmatrix} A_1 + \begin{vmatrix} x_2, & x_1, & 1 \\ 0, & x_3, & 1 \\ 0, & x_2, & 1 \end{vmatrix} A_2 + \begin{vmatrix} x_3, & x_1, & 1 \\ 0, & x_3, & 1 \\ 0, & x_2, & 1 \end{vmatrix} A_3.$$

Hodnota prvního determinantu jest

$$\begin{aligned} x_2^2 - x_1 x_2 + x_1 x_3 - x_3^2 &= (x_2 + x_3)(x_2 - x_3) - x_1(x_2 - x_3) \\ &= (-x_1 + x_2 + x_3)(x_2 - x_3); \end{aligned}$$

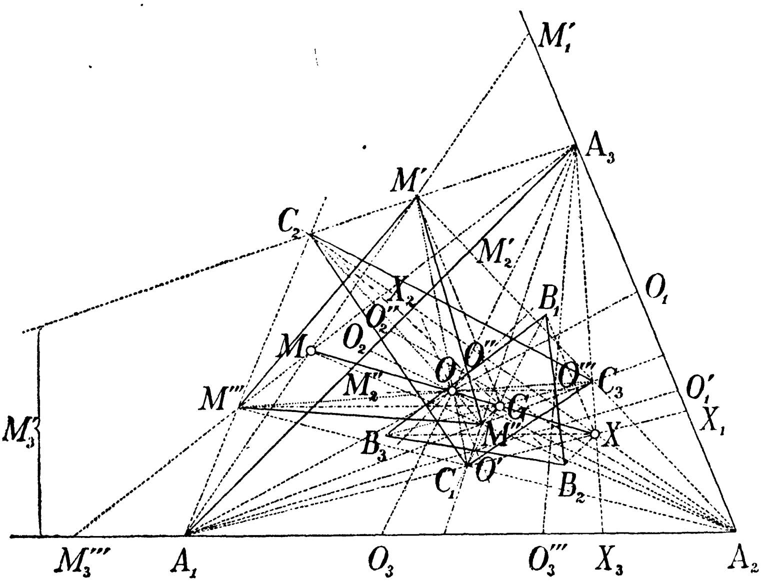
druhý determinant rovná se součinu $x_2(x_3 - x_2)$ a třetí součinu $x_3(x_3 - x_2)$; tudíž jest rovnice bodu C_1:

$$c'_1 C_1 = -(x_2 - x_3)(-x_1 + x_2 + x_3) A_1 - x_2(x_2 - x_3) A_2 - x_3(x_2 - x_3) A_3,$$

aneb, nerovná-li se $x_2 - x_3$ nulle, konečně

$$(25\,a) \qquad c_1 C_1 = (-x_1 + x_2 + x_3) A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3,$$

kde $\qquad c_1 = c'_1 : -(x_2 - x_3)$.



Obr. 7.

Týmž způsobem vyhledáme rovnice bodů C_2 a C_3; jsouť pak

$$(25\,b) \qquad c_2 C_2 = x_1 A_1 + (x_1 - x_2 + x_3) A_2 + x_3 A_3,$$
$$(25\,c) \qquad c_3 C_3 = x_1 A_1 + x_2 A_2 + (x_1 + x_2 - x_3) A_3.$$

Je-li ve zvláštním případě bod X bodem Lemoine-ovým, jest trojúhelník $C_1 C_2 C_3$ *druhým trojúhelníkem Brocardovým*; vrcholy jeho jsou průměty středu kružnice opsané trojúhelníku $A_1 A_2 A_3$ na symediany jeho.

Spojíme-li body C_1, C_2, C_3 s těmi základními body A_1, A_2, A_3, se kterými ještě spojeny nejsou, vzniknou příčky $A_1 C_2$,

A_1C_3, A_2C_1, A_2C_3, A_3C_1, A_3C_2; průsekem jich obdržíme nové body, z nichž zvláště vytkneme:

$$\begin{array}{llll} \text{průsečík} & M' & \text{příček} & A_2C_3 \text{ a } A_3C_2, \\ \text{„} & M'' & \text{„} & A_3C_1 \text{ a } A_1C_3, \\ \text{„} & M''' & \text{„} & A_1C_2 \text{ a } A_2C_1. \end{array}$$

Souřadnice jejich ustanovíme snadno, užívajíce úměr (3); pro bod M' jest

$$A_3M'_2 : M'_2A_1 = x_1 : (x_1 + x_2 - x_3),$$

přihlížíme-li k tomu, že příčka A_2M' prochází bodem C_3 a že tedy můžeme vzhledem k bodu M'_2 použiti druhé úměry (2), kladouce v ní za x_1 a x_3 první a třetí souřadnici bodu C_3. Podobně plyne z hodnot pro souřadnice bodu C_2 dle třetí úměry (2)

$$A_1M'_3 : M'_3A_2 = (x_1 - x_2 + x_3) : x_1;$$

tudíž dle (3 *b*) platí pro souřadnice m'_1, m'_2, m'_3 bodu M' úměra

$$\begin{aligned} m'_1 : m'_2 : m'_3 &= x_1^2 : x_1(x_1 - x_2 + x_3) : x_1(x_1 + x_2 - x_3) \\ &= x_1 : (x_1 - x_2 + x_3) : (x_1 + x_2 - x_3). \end{aligned}$$

Rovnice bodu M' zní tedy

$$3x_1M' = x_1A_1 + (x_1 - x_2 + x_3)A_2 + (x_1 + x_2 - x_3)A_3;$$

podobné jsou rovnice bodů M'', M''', totiž

$$(26) \quad \begin{aligned} 3x_2M'' &= (-x_1 + x_2 + x_3)A_1 + x_2A_2 + (x_1 + x_2 - x_3)A_3, \\ 3x_3M''' &= (-x_1 + x_2 + x_3)A_1 + (x_1 - x_2 + x_3)A_2 + x_3A_3. \end{aligned}$$

Uvážíme-li, že střed hmotný G jest dán rovnicí

$$3G = A_1 + A_2 + A_3,$$

obdržíme z těchto rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1(M' - G) &= (x_2 - x_3)(A_3 - A_2), \\ 3x_2(M'' - G) &= (x_3 - x_1)(A_1 - A_3), \\ 3x_3(M''' - G) &= (x_1 - x_2)(A_2 - A_1), \end{aligned}$$

t. j. úsečka GM' jest rovnoběžna se stranou A_2A_3 a tudíž i s úsečkou XB_1, úsečka $GM'' \parallel XB_2$, úsečka $GM''' \parallel XB_3$.

Příčky $A_1 M'$, $A_2 M''$, $A_3 M'''$ protínají se v jediném bodě M; dle první úměry (2) jest totiž

$$A_2 M'_1 : M'_1 A_3 = (x_1 + x_2 - x_3) : (x_1 - x_2 + x_3)$$

a podobně

$$A_3 M''_2 : M''_2 A_1 = (-x_1 + x_2 + x_3) : (x_1 + x_2 - x_3),$$
$$A_1 M'''_3 : M'''_3 A_2 = (x_1 - x_2 + x_3) : (-x_1 + x_2 + x_3),$$

součin těchto poměrů rovná se pak 1.

Souřadnice bodu M (m_1, m_2, m_3) plynou pak opět z některé úměry (3); nahradíme-li na př. v úměře (3a) poměr $p_2 : p_3$ poměrem $(x_1 + x_2 - x_3) : (x_1 - x_2 + x_3)$ a poměr $q_3 : q_1$ poměrem $(-x_1 + x_2 + x_3) : (x_1 + x_2 - x_3)$, obdržíme, krátivše dříve výrazem $(x_1 + x_2 - x_3)$, úměru

$$m_1 : m_2 : m_3 = (-x_1 + x_2 + x_3) : (x_1 - x_2 + x_3) : (x_1 + x_2 - x_3).$$

Jest pak rovnice bodu M:

$$(27) \quad xM = (-x_1 + x_2 + x_3) A_1 + (x_1 - x_2 + x_3) A_2 + (x_1 + x_2 - x_3) A_3 \qquad (x = x_1 + x_2 + x_3).$$

Bod M jest tedy bodem anticomplementárním bodu X; je-li ve zvláštním případě bod X středem kružnice trojúhelníku $A_1 A_2 A_3$ vepsané, jest bod *M bodem Nagelovým.*

11. Středy O', O'', O''' stran $B_2 B_3$, $B_3 B_1$, $B_1 B_2$ trojúhelníka $B_1 B_2 B_3$ mají v soustavě $A_1 A_2 A_3$ rovnice

$$2xO' = x(B_2 + B_3) = (x_2 + x_3) A_1 + (x_1 + x_2) A_2 + (x_3 + x_1) A_3,$$
$$2xO'' = x(B_3 + B_1) = (x_1 + x_2) A_1 + (x_3 + x_1) A_2 + (x_2 + x_3) A_3,$$
$$2xO''' = x(B_1 + B_2) = (x_3 + x_1) A_1 + (x_2 + x_3) A_2 + (x_1 + x_2) A_3.$$

Veďme bodem O' rovnoběžku ke straně $A_2 A_3$ a bodem O'' rovnoběžku k $A_3 A_1$; obě tyto rovnoběžky sekou se v bodě O, jehož souřadnice o_1, o_2, o_3 ustanovíme takto:

Poněvadž jest $O'O \,||\, A_2 A_3$, platí úměra

$$OO_1 : A_1 O_1 = O'O'_1 : A_1 O'_1,$$

jsou-li O_1 a O'_1 průsečné body příček $A_1 O$ a $A_1 O'$ se stranou $A_2 A_3$.

Přihlížejíce k rovnici (2c) poznáme, že z rovnice bodu O' vychází pro druhý z těchto poměrů $O'O'_1 : A_1 O'_1$ hodnota $(x_2 + x_3) : 2x$; poměr $OO_1 : A_1 O_1$ můžeme pak vyjádřiti dle rovnice (2c) poměrem

$$o_1 : (o_1 + o_2 + o_3),$$

tudíž

$$o_1 : (o_1 + o_2 + o_3) = (x_2 + x_3) : 2x.$$

Podobně vyplývá z rovnice bodu C'' úměra

$$o_2 : (o_1 + o_2 + o_3) = (x_3 + x_1) : 2x;$$

můžeme tedy psáti

$$o_1 : o_2 : o_3 = (x_2 + x_3) : (x_3 + x_1) : (x_1 + x_2),$$

a rovnice bodu O jest

$$(28) \quad 2xO = (x_2 + x_3) A_1 + (x_3 + x_1) A_2 + (x_1 + x_2) A_3.$$

Z předcházející úměry jde, že

$$o_3 : (o_1 + o_2 + o_3) = (x_1 + x_2) : 2x,$$

což jest dle obr. 1. hodnota poměru $OO_3 : A_3 O_3$; z rovnice bodu O''' pak plyne, že

$$O'''O'''_3 : A_3 O'''_3 = (x_1 + x_2) : 2x,$$

je-li O'''_3 průsečík příčky $A_3 O'''$ se stranou $A_1 A_2$. Srovnáním vychází

$$OO_3 : A_3 O_3 = O'''O'''_3 : A_3 O'''_3,$$

t. j. též rovnoběžka, vedená bodem O''' ke straně $A_1 A_2$, probíhá; bodem O.

Hodnoty souřadnic bodu O poučují nás o tom, že bod ten jest *bodem complementárním bodu X.*

Ukážeme ještě, že bodem O procházejí přímky $C_1 M'$, $C_2 M''$, $C_3 M'''$. Rovnice bodů C_1, M' a O jsou totiž:

$$(-x_1 + 2x_2 + 2x_3) C_1 = (-x_1 + x_2 + x_3) A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3,$$
$$3x_1 M' = x_1 A_1 + (x_1 - x_2 + x_3) A_2 + (x_1 + x_2 - x_3) A_3,$$
$$2xO = (x_2 + x_3) A_1 + (x_3 + x_1) A_2 + (x_1 + x_2) A_3$$

násobíme-li třetí z těchto rovnic -1 a sečteme-li pak všechny, obdržíme

$$(-x_1 + 2x_2 + 2x_3)\,C_1 + 3x_1 M' - 2xO = 0,$$

t. j. body C_1, M' a O leží v téže přímce. Podobně dokážeme, že leží na jedné přímce jednak body C_2, M'', O, jednak body C_3, M''', O.

Trojúhelníky $C_1C_2C_3$ *a* $M'M''M'''$ *jsou homologickými vzhledem ke středu* O.

Jiná věta Casparyho jest: *Body* X, G, M, O *jsou položeny na jedné přímce.* Rovnice těchto bodů jsou totiž:

$$\begin{aligned}
xX &= x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3,\\
3G &= A_1 + A_2 + A_3,\\
xM &= (-x_1+x_2+x_3)\,A_1 + (x_1-x_2+x_3)\,A_2 + (x_1+x_2-x_3)\,A_3,\\
2xO &= (x_2 + x_3)\,A_1 + (x_3 + x_1)\,A_2 + (x_1 + x_2)\,A_3\,;
\end{aligned}$$

z těchto rovnic odvodíme bezprostředně tyto tři rovnice (při čemž rovnici pro $3G$ násobíme rovnicí $x = x_1 + x_2 + x_3$):

$$\begin{aligned}
X + M - 2O &= 0,\\
2X - 3G + M &= 0,\\
3G + M - 4O &= 0.
\end{aligned}$$

Rovnice tyto lze psáti též takto:

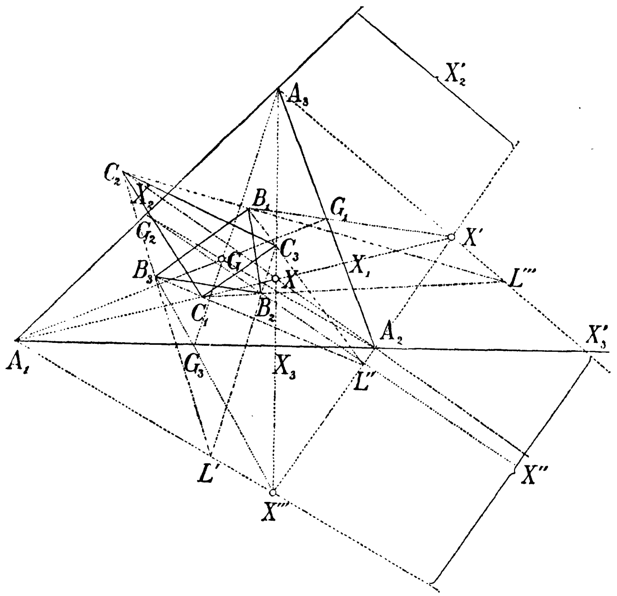
$$\begin{aligned}
X - O &= O - M,\\
2(X - G) &= G - M,\\
4(G - O) &= G - M.
\end{aligned}$$

První rovnice nám praví, že bod O rozpoluje úsečku MX; z druhé a z třetí rovnice poznáváme, jak sestrojiti body M a O, jsou-li dány body X a G. Abychom sestrojili anticomplementární bod M, prodlužme úsečku GX a vnesme na ni směrem protivným ke směru od G ku X délku GX dvakráte; koncový bod takto vnesené délky jest hledaný bod M. Complementární bod O sestrojíme pak buď rozpůlením úsečky MX nebo přenesením polovice úsečky GX od bodu G ve směru protivném.

12. Strany trojúhelníků $B_1B_2B_3$ a $C_1C_2C_3$, dostatečně byvše prodlouženy, sekou se v nových bodech, z nichž zde uvedeme tyto tři (obr. 8.):

průsečík L' stran B_2C_3 a B_3C_2,
" L'' " B_3C_1 a B_1C_3,
" L''' " B_1C_2 a B_2C_1.

Souřadnice těchto bodů ustanovíme opět z rovnice (4), kladouce v ní nejprve za x_1, x_2, x_3 po řadě hodnoty x_3, x_2, x_1, za x'_1, x'_2, x'_3 hodnoty $x_1, x_2, (x_1 + x_2 - x_3)$, za y_1, y_2, y_3



Obr. 8.

hodnoty x_2, x_1, x_3 a za y'_1, y'_2, y'_3 hodnoty $x_1, x_1 - x_2 + x_3, x_3$; tím dostaneme pro bod L' rovnici

$$lL' = -\begin{vmatrix} 0, & x_2, & x_1 \\ x_2(x_3 - x_1) & x_1, & x_1 - x_2 + x_3 \\ x_3(x_2 - x_3) + x_1(x_3 - x_1), & x_3, & x_3 \end{vmatrix} A_1$$

$$+ \begin{vmatrix} x_2(x_3 - x_1), & x_2, & x_1 \\ 0, & x_1, & x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_2(x_2 - x_3), & x_3, & x_3 \end{vmatrix} A_2$$

$$+ \begin{vmatrix} x_3(x_2 - x_3) + x_1(x_3 - x_1), & x_2, & x_1 \\ x_2(x_2 - x_3), & x_1, & x_1 - x_2 + x_3 \\ 0, & x_3, & x_3 \end{vmatrix} A_3.$$

První determinant na pravé straně této rovnice pozměníme takto: Prvky druhého sloupce násobme x_3 a prvky třetího sloupce x_1, rozdíl těchto součinů připočtěme pak posloupně k prvkům sloupce prvního; tím obdržíme

$$\begin{vmatrix} x_2x_3 - x_1^2, & x_2, & x_1 \\ x_2x_3 - x_1^2, & x_1, & x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2x_3 - x_1^2, & x_3, & x_3 \end{vmatrix} = (x_2x_3 - x_1^2) \begin{vmatrix} 1, & x_2, & x_1 \\ 1, & x_1, & x_1 - x_2 + x_3 \\ 1, & x_3, & x_3 \end{vmatrix}.$$

Přičteme-li k prvkům třetího sloupce posledního determinantu nejprve prvky prvního sloupce násobené x_2 a odečteme-li pak od těchto součtů posloupně prvky druhého sloupce, nabýváme determinantu

$$\begin{vmatrix} 1, & x_2, & x_1 \\ 1, & x_1, & x_3 \\ 1, & x_3, & x_2 \end{vmatrix},$$

který dle rovnice (12a) byl označen ξ'. Tudíž součinitel u A_1 v rovnici pro L' rovná se $-(x_2x_3 - x_1^2)\xi'$. Součinitel u A_2 jest pak

$$\begin{vmatrix} x_2(x_3-x_1), & x_2, & x_1 \\ 0, & x_1, & x_1-x_2+x_3 \\ -x_2(x_2-x_3), & x_3, & x_3 \end{vmatrix} = x_2 \begin{vmatrix} x_3 - x_1, & x_2, & x_1 \\ 0, & x_1, & x_1-x_2+x_3 \\ -(x_2-x_3), & x_3, & x_3 \end{vmatrix};$$

odečteme-li v tomto determinantu prvky druhého sloupce od prvků třetího sloupce, dostaneme

$$\begin{vmatrix} x_3 - x_1, & x_2, & x_1 - x_2 \\ 0, & x_1, & -(x_2-x_3) \\ -(x_2-x_3), & x_3, & 0 \end{vmatrix}.$$

Připočteme-li tu ještě prvky třetího sloupce k prvkům sloupce prvního, změní se tento determinant ve

$$\begin{vmatrix} -(x_2-x_3), & x_2, & x_1 - x_2 \\ -(x_2-x_3), & x_1, & -(x_2-x_3) \\ -(x_2-x_3), & x_3, & 0 \end{vmatrix} = -(x_2-x_3) \begin{vmatrix} 1, & x_2, & x_1 - x_2 \\ 1, & x_1, & -(x_2-x_3) \\ 1, & x_3, & 0 \end{vmatrix}.$$

Ale poslední determinant jest opět ξ', jak se snadno přesvědčíme, přičteme-li k prvkům třetího sloupce prvky sloupce prvního násobené x_2. I jest součinitel u A_2 v rovnici bodu L' roven výrazu $-x_2(x_2 - x_3)\xi'$.

Součinitel u A_3 jest konečně

$$\begin{vmatrix} x_3(x_2-x_3)+x_1(x_3-x_1), & x_2, & x_1 \\ x_2(x_2-x_3), & x_1, & x_1-x_2+x_3 \\ 0, & x_3, & x_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_3(x_2-x_3)+x_1(x_3-x_1), & x_2, & x_1-x_2 \\ x_2(x_2-x_3), & x_1, & -(x_2-x_3) \\ 0, & x_3, & 0 \end{vmatrix};$$

rozložíme-li tento determinant dle prvků poslední řádky, shledáme, že se rovná

$$x_3 \begin{vmatrix} x_1-x_2, & x_3(x_2-x_3)+x_1(x_3-x_1) \\ -(x_2-x_3), & x_2(x_2-x_3) \end{vmatrix}$$

$$= x_3(x_2-x_3) \begin{vmatrix} x_1-x_2, & x_3(x_2-x_3)+x_1(x_3-x_1) \\ -1, & x_2 \end{vmatrix}$$

$$= x_3(x_2-x_3)\,[x_2(x_1-x_2)+x_3(x_2-x_3)+x_1(x_3-x_1)] = x_3(x_2-x_3)\xi',$$

máme-li zření k rovnici (12a).

Jest tudíž rovnice bodu L', dělíme-li společným činitelem ξ', který se nerovná nulle,

$$l'L' = -(x_2x_3-x_1^2)A_1 - x_2(x_2-x_3)A_2 + x_3(x_2-x_3)A_3;$$

podobným způsobem určíme souřadnice bodů L'' a L''', totiž

$$(29)\quad \begin{aligned} l''L'' &= x_1(x_3-x_1)A_1 - (x_1x_3-x_2^2)A_2 - x_3(x_3-x_1)A_3, \\ l'''L''' &= -x_1(x_1-x_2)A_1 + x_2(x_1-x_2)A_2 - (x_1x_2-x_3^2)A_3. \end{aligned}$$

S body L', L'', L''' souvisí konečně další tři body, jichž rovnice jsou jednoduché; jsou to:

průsečík X' příček A_2L'' a A_3L''',
„ X'' „ A_3L''' a A_1L',
„ X''' „ A_1L' a A_2L''.

Abychom ustanovili souřadnice prvního z nich, použijeme opět úměry (3b); poněvadž totiž body X' a L'' leží na téže příčce A_2L'', přísluší jim společný průsečík X_2' této příčky se stranou A_3A_1 kterýž bod se tedy stotožňuje s bodem L_2''), i lze psáti dle druhé rovnice (2) úměru

$$A_3X'_2 : X'_2A_1 = l''_1 : l''_3,$$

aneb, přihlížíme-li k druhé rovnici (29) bodu L'', též

$$A_3X'_2 : X'_2A_1 = x_1 : -x_3.$$

Podobně body X' a L''' jsou položeny na téže příčce A_3L''', tudíž dle třetí rovnice (2) platí

$$A_1X'_3 : X'_3A_2 = l'''_2 : l'''_1$$

čili vzhledem k rovnici bodu L''' též

$$A_1X'_3 : X'_3A_2 = x_2 : -x_1.$$

Vložíme-li tyto hodnoty za $q_3 : q_1$ a za $r_1 : r_2$ do (3*b*), obdržíme

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = -x_1 : x_2 : x_3,$$

a rovnice bodu X' jest

$$(-x_1 + x_2 + x_3)\, X' = -x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3.$$

Rovnice bodů X'' a X''' vyhledáme podobně; jsouť pak:

$$(x_1 - x_2 + x_3)\, X'' = x_1A_1 - x_2A_2 + x_3A_3,$$
$$(x_1 + x_2 - x_3)\, X''' = x_1A_1 + x_2A_2 - x_3A_3.$$

Z těchto rovnic plyne: *Body X', X'', X''' jsou body algebraicky přidružené k bodu X.*

Je-li ve zvláštním případě bod X středem kružnice, základnímu trojúhelníku vnitř vepsané, jsou body X', X'', X''' středy kružnic, témuž trojúhelníku vně vepsaných.

Z rovnic bodů B_1, X', G_1, totiž

$$xB_1 = x_1A_1 + x_3A_2 + x_2A_3,$$
$$(-x_1 + x_2 + x_3)\, X' = -x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3,$$
$$2G_1 = A_2 + A_3,$$

vychází, násobíme-li třetí rovnici součtem $x_2 + x_3$ a odečteme-li ji pak od součtu obou prvních, rovnice:

$$xB_1 + (-x_1 + x_2 + x_3)\, X' - 2(x_2 + x_3)\, G_1 = 0,$$

t. j. *body B_1, X' a G_1 leží na jedné přímce.* Týmž způsobem dokážeme, že jsou položeny na jedné přímce jednak body B_2, X'' a G_2, jednak body B_3, X''' a G_3.

Snadno můžeme též ukázati, že body X a X' jsou harmonicky sdružené vzhledem k bodům A_1 a X_1; podobně jsou body X a X'' harmonicky sdružené vzhledem k bodům A_2 a X_2 a body X a X''' vzhledem k A_3 a X_3. Z toho plyne jednoduché sestrojení algebraicky přidružených bodů X', X'', X''', je-li dán bod X.

Na Král. Vinohradech dne 5. března 1901.*)

Jak třeba zvoliti vazby a síly, aby soustava jimi daná dala se realisovati.

Napsal

Arnošt Dittrich v Praze.

(Pokračování.)

§ 5. *Věta třetí.* Obsah prvé části věty třetí, která praví, že, lze-li realisovati jistou úplnou soustavu, lze též realisovati každou soustavu shodnou, jest následující.

Čítá-li původní soustava n hmotných bodů, z nichž ν-tý má souřadnice x_ν, y_ν, z_ν, hmotu m_ν, lze realisovati též soustavu čítající n bodů, se souřadnicemi $x_{1\nu}$, $y_{1\nu}$, $z_{1\nu}$, hmotami m_ν, kterou lze přivésti vždy do každé polohy $x_{1\nu}$, $y_{1\nu}$, $z_{1\nu}$, jež z polohy x_ν, y_ν, z_ν vznikla nějakým pošinutím a otočením. Má-li původní soustava vazby $\varphi_\pi(x, y, z)$ síly $X_\nu(x, y, z)$, $Y_\nu(x, y, z)$, $Z_\nu(x, y, z)$ má nová soustava tytéž vazby a síly

$$\varphi_\pi(x_1, y_1, z_1),\ X_\nu(x_1, y_1, z_1),\ Y_\nu(x_1, y_1, z_1),\ Z_\nu(x_1, y_1, z_1).$$

Soustavy, jež jsou v tomto poměru, nazveme v dalším shodné.

Z definice shodných soustav plyne, že vazby musí míti

*) O větách Casparyho a jiných větách s nimi souvisících pojednávají též články „Zur neueren Dreiecksgeometrie“ od F. *Casparyho* a „Sur quelques nouveaux theorèmes relatifs au triangle“ par M. L. *Ripert,* jež jsou uveřejněny v I. svazku třetí řady „Archiv der Mathematik und Physik“ (1901); nížepsaný, sepisuje předcházející článek, neznal těchto pojednání, ježto vyšla teprve 2. dubna 1901.