Ladislav Seifert

O jedné ploše stupně čtvrtého

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 46 (1917), No. 2-3, 136--141

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120925

rovnice naše tím nabudou tvaru

$$1 + t^2 + 2awt = 0,$$

$$[(2 - k)(1 + t^2) - 1]\frac{v}{u} + t\,[1 + k(1 + t^2)] = 0;$$

do druhé rovnice vložíme hodnotu $1 + t^2$ plynoucí z první, a rovnici tak vzniklou

$$\left[1 - 2(2 - k)\frac{awv}{u}\right]t - \frac{v}{u} - 2k\,awt^2 = 0$$

snížíme pomocí první na stupeň 1. Vyjde

$$\left[1 - 2(2 - k)\frac{awv}{u} + 4ka^2w^2\right]t + 2kaw - \frac{v}{u} = 0.$$

Při označení

$$P = 4k\,a^2w^2u - 2(2 - k)\,awv + u$$

máme tedy rovnici

$$Pt + (2k\,awu - v) = 0,$$

která ve spojení s rovnicí první dává

$$P^2 + (2k\,awu - v)^2 - 2awP(2k\,awu - v) = 0,$$

čili

$$[u - 2(1 - k)\,awv]\,[4k\,a^2w^2u - 2(2 - k)\,awv + u] + (2k\,awu - v)^2 = 0. \tag{19}$$

Toť tangenciální rovnice konoidu (V), při čemž k značí $\cos^2 \alpha$.

(Dokončení.)

O jedné ploše stupně čtvrtého.

Napsal Dr. **L. Seifert**, prof. reálky v Praze-I.

Buď F ohniskem rotačních ploch druhého stupně, které jdou pevnými body A, B. Jak patrno, jest geometrickým místem druhého ohniska dvojina rotačních ploch (ellipsoid a dvojdílný hyperboloid) o společných ohniskách A, B.

V tomto článku chci odpověděti k podobné otázce: *jaké jest geometrické místo druhého ohniska F' při stálém F, mají-li plochy za tečny pevné přímky a, b.*

Buď F' ohniskem jedné takové plochy, A, B body dotyčné na a, b. Pak jest

$$| FA \pm AF' | = | FB \pm BF' |$$

a přímkami a, b jdou tečné roviny ploch, které půlí současně úhly FAF', FBF' neb jejich vedlejší.

Přeneseme-li na AF' délku $AT = AF$, na BF' délku $BU = BF$, jsou body T, U na kružnicích α, β, jichž osami jsou přímky a, b a které mají společný bod F. Dále jest $F'T = F'U$, tedy F' středem koule, jež v T, U se dotýká kružnic α, β.

Naše plocha jest geom. místem středů koulí, které se dotýkají dvou kružnic α, β o společném bodu F a osách a, b.

Učiňme F počátkem pravoúhlé soustavy souřadnicové. Střed S_1 kružnice α měj souřadnice x_1, y_1, z_1; pak lze psáti souřadnice bodu na kružnici α jako funkce parametru ω:

$$x = x_1 + R_1 (\alpha_1 \cos \omega + l_1 \sin \omega),$$
$$y = y_1 + R_1 (\beta_1 \cos \omega + m_1 \sin \omega),$$
$$z = z_1 + R_1 (\gamma_1 \cos \omega + n_1 \sin \omega).$$

Při tom α_1, β_1, γ_1 jsou kosiny směrné jednoho průměru kružnice, l_1, m_1, n_1 průměru k němu kolmého a

$$R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Podmínku dotyku libovolné koule

$$K \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2\xi x - 2\eta y - 2\zeta z - p = 0$$

s kruhem α možno psáti ve tvaru

$$4R_1^2 (M_1^2 + N_1^2) = (2L_1 + p)^2,$$

kde zavedeno označení

$$M_1 = \alpha_1 (x_1 - \xi) + \beta_1 (y_1 - \eta) + \gamma_1 (z_1 - \zeta) = \Sigma\alpha_1 (x_1 - \xi)$$
$$N_1 = \Sigma l_1 (x_1 - \xi),$$
$$L_1 = \xi x_1 + \eta y_1 + \zeta z_1 - R_1^2.$$

Při podobném označení jest podmínka dotyku koule K s kruhem β

$$4R_2^2 (M_2^2 + N_2^2) = (2L_2 + p)^2.$$

Vyloučením veličiny p dostáváme jako geom. místo středu (ξ, η, ζ) plochu.

$$[R_1^2 (M_1^2 + N_1^2) - R_2^2 (M_2^2 + N_2^2)]^2$$
$$= (L_1 - L_2)^2 [2R_1^2 (M_1^2 + N_1^2) + 2R_2^2 (M_2^2 + N_2^2) - (L_1 - L_2)^2].$$

Této lze dáti také jiný tvar. Nejprve volme jeden ze dvou kolmých průměrů v kruhu α i β tak, aby procházel bodem F, příkladem

$$\alpha_1 = \frac{x_1}{R_1}, \quad \beta_1 = \frac{y_1}{R_1}, \quad \gamma_1 = \frac{z_1}{R_1}.$$

Pak bude

$$M_1 = R_1 - \Sigma \frac{x_1}{R_1} \xi, \quad N_1 = - \Sigma l_1 . \xi, \quad L_1 = - R_1 . M_1,$$

$$M_2 = R_2 - \Sigma \frac{x_2}{R_2} \xi, \quad N_2 = - \Sigma l_2 . \xi, \quad L_2 = - R_2 . M_2.$$

a rovnice plochy nabude tvaru

$$2(R_1^2 M_1^2 - R_2^2 M_2^2)(R_1^2 N_1^2 - R_2^2 N_2^2) + (R_1^2 N_1^2 - R_2 N_2^2)^2 = \\ 2(R_1 M_1 - R_2 M_2)^2 (R_1^2 N_1^2 + R_2^2 N_2^2)$$

neb ještě lépe, uváží-li se, že

$$2(R_1^2 N_1^2 + R_2^2 N_2^2) = (R_1 N_1 + R_2 N_2)^2 + (R_1 N_1 - R_2 N_2)^2,$$

tvaru

$$2(R_1^2 M_1^2 - R_2^2 M_2^2)(R_1^2 N_1^2 - R_2^2 N_2^2) + (R_1^2 N_1^2 - R_2^2 N_2^2)^2 \\ = (R_1 M_1 - R_2 M_2)^2 [(R_1 N_1 - R_2 N_2)^2 + (R_1 N_1 + R_2 N_2)^2].$$

Zaveďme ještě pro krátkost psaní označení:

$$X = R_1 M_1 - R_2 M_2, \quad Y = R_1 N_1 + R_2 N_2, \quad Z = R_1 N_1 - R_2 N_2, \\ U = R_1 M_1 + R_2 M_2.$$

Máme pak rovnici plochy

$$2X . Y . Z . U = X^2 . Y^2 + X^2 . Z^2 - Y^2 . Z^2.$$

Tato jest stupně *čtvrtého*, má přímky

$$d_1 (X = 0, \ Y = 0), \quad d_2 (X = 0, \ Z = 0), \quad d_3 (Y = 0, \ Z = 0)$$

za *dvojné*, společný jejich bod za *trojnásobný*. Máme tedy před sebou *plochu Steinerovu*.

$M_1 = 0$, $N_1 = 0$ jsou roviny k sobě kolmé, které jdou osou a kruhu α, druhá také bodem F, počátkem souřadnic, podobně $M_2 = 0$, $N_2 = 0$ procházejí osou b kruhu β.

Znamená tedy $d_3 (N_1 = 0, \ N_2 = 0)$ přímku, která jde počátkem F a seče obě osy a, b.

$Y = 0$, $Z = 0$ jest dvojina rovin, které obsahují tuto transversálu. Každý bod jedné z nich má od rovin $N_1 = 0$, $N_2 = 0$ poměr vzdálenosti $R_2 : R_1$.

$X = 0$ jest rovina jdoucí průsekem rovin $M_1 = 0$, $M_2 = 0$ kolmo ku spojnici S_1S_2. Dvojné přímky d_1, d_2 leží tedy v této rovině a rovinách $Y = 0$, $Z = 0$.

Rovina dvojnou přímkou d_3 má rovnici $Y - \lambda Z = 0$ a seče plochu naši v kuželosečce, která leží též na ploše druhého stupně:

$$\lambda^2(X^2 - Z^2) + 2\lambda \,.\, X \,.\, U + X^2 = 0$$

a seče d_3 mimo T ještě v bodu daném rovnicí

$$\lambda^2 \,.\, X + 2\lambda \,.\, U + X = 0.$$

Bodu na d_3 přísluší dvě roviny $Y - \lambda Z = 0$ a jdou jím dvě kuželosečky. Roviny jejich tvoří tedy involuci s osou d_3.

Dvojným rovinám této involuce náleží na d_3 *kuspidální body* plochy. Aby kořeny λ_1, λ_2 rovnice splynuly, musí býti

$$U^2 - X^2 = 0,$$

čili

$$U = \pm X$$

t. j. roviny $M_1 = 0$, $M_2 = 0$ vytínají na d_3 body kuspidální.

Body $A \equiv (a, d_3)$ a $B \equiv (b, d_3)$ jsou *kuspidální body* přímky d_3.

Podobně určíme kuspidální body přímek d_1, d_2. Rovina přímkou d_1 buď $X - \lambda Y = 0$. Kuželosečka v ní ležící jest zároveň na ploše

$$\lambda^2(Y^2 + Z^2) + 2\lambda \,.\, Z \,.\, U - Z^2 = 0$$

a má s d_1 společný bod v rovině

$$\lambda^2 \,.\, Z + 2\lambda \,.\, U - Z = 0.$$

Diskriminant této rovnice

$$\Delta = U^2 + Z^2$$

vymizí při

$$U \pm i\, Z = 0$$

t. j.

$$R_1 M_1 + R_2 M_2 \pm i(R_1 N_1 - R_2 N_2) = 0.$$

Kuspidální body na d_1 ($X = 0$, $Y = 0$) hoví této rovnici nebo i jednodušším

$$M_2 \mp i N_2 = 0,$$
$$M_1 \pm i N_1 = 0,$$

které rovnice značí patrně roviny isotropické osami a, b obou kruhů, Totéž shledáváme pro body na d_2.

V rovině $X = 0$ tvoří tedy tyto čtyři imaginární body čtyrroh, d_1, d_2 jsou jeho reální strany, body M, N, v nichž osy a, b sekou rovinu $X = 0$ reálné průseky sdružených imaginárných stran.

Isotropické roviny přímkou a a přímkou b tvoří čtyrstěn; každá stěna dotýká se plochy podél kuželosečky. Kuželosečky v rovinách přímkou a($M_1^2 + N_1^2 = 0$) leží na ploše druhého stupně

$$R_1^2 (M_2^2 + N_2^2) - (R_1 M_1 - R_2 M_2)^2 = 0$$

t. j. na kuželu, jehož body od přímky b a roviny X mají stálý poměr vzdálenosti. Podobně kuželosečky v rovinách isotropických přímky b($M_2^2 + N_2^2 = 0$) leží na ploše

$$R_2^2 (M_1^2 + N_1^2) - (R_1 M_1 - R_2 M_2)^2 = 0.$$

Přímky a, b jsou reálné hrany opsaného čtyrstěnu. Jeho imaginární hrany jsou fokální osy přímkové kongruence s osami a, b.

Každá rovina hranou tohoto čtyrstěnu jdoucí je rovinou tečnou a bod dotyčný je stálý. Obě takové kuželosečky v rovinách přímky a neb b lze snadno nalézti, uvážíme-li, jak geometricky lze naši plochu vytvořiti.

Buď R_1 bod kruhu α, R_2 bod kruhu β. Střed S koule která se dotýká prvého v R_1, druhého v R_2, jest průsek rovin ($a R_1$), ($b R_2$) a roviny symetrie bodů R_1, R_2. Poslední jest také tečnou rovinou bodu S. Je-li R_1 pevné, R_2 pohyblivé po β, probíhá S kuželosečku. V rovině ($a R_1$) jest pak ještě jedna, která náleží druhému průseku R'_1 na kruhu α.

Považujme α a β za degenerovanou plochu obalovou kouli (S); pak vyplývá z obecné věty o kongruencích kulových, že kuželosečky v rovinách svazku a a kuželosečky v rovinách svazku b tvoří sdružené systémy křivek na naší ploše.

Teď jest možno zodpověděti některé otázky, jež se týkají systému rotačních ploch s pevným ohniskem dotýkajících se daných přímek.

Naše plocha má v nekonečnu křivku st. čtvrtého, jež má tři dvojné body, *osy rotačních paraboloidů s ohniskem F dotýkajících se přímek a, b tvoří tedy racionální kužel čtvrtého stupně.*

Dán jest bod F a tři přímky a, b, c; pak tři plochy příslušné dvojinám ab, ac, bc mají společnou křivku st. 16, která v F má bod čtyrnásobný, již vyplňují druhá ohniska a p.

O rovnicích majících jen reálné kořeny.

(Dr. Kar. Čupr.)

I. Budiž dána rovnice stupně m-tého

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m = 0, \qquad (1)$$

kdež a_0, a_1, ... a_m jsou funkce argumentu t té vlastnosti, že probíhá-li t posloupnost hodnot $T \equiv t_1, t_2, \ldots t_n$ konvergující k limitě τ, že mají všechny rovnice tak vzniklé kořeny stejné reality (na př. $2k$ komplexních a $m - 2k$ reálných. Pak rovnice

$$\bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \ldots + \bar{a}_m x^m = 0, \qquad (2)$$

kdež

$$\bar{a}_0 = \lim \bar{a}_0(\tau)$$
$$\bar{a}_1 = \lim a_1(\tau)$$
$$\vdots$$

má kořeny téže reality.

Připusťme, že by rovnice (2) měla kořeny jiné reality (na př. $2k + 2$ kompl., $m - 2k - 2$ reál.). Utvořme si pro rovnici (2) Sturmovy funkce

$$S_0, S_1, \ldots S_m = \text{const.},$$

koefficienty nejvyšších mocnin označme

$$s_0(\tau), \; s_1(\tau), \ldots s_m(\tau).$$

Můžeme nyní voliti číslo ε libovolně malé, že jedno z čísel $\tau \pm \varepsilon$ patří do posloupnosti T; koefficienty nejvyšších mocnin Sturmových funkcí příslušné rovnice jsou

$$s_0(\tau) \pm \varepsilon s'_0(\tau) \ldots, \quad s_1(\tau) \pm \varepsilon s'_1(\tau) \ldots$$