Václav Simandl

Poznámka ke kombinacím daného součtu z čísel přirozené řady číselné

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 46 (1917), No. 2-3, 155--159

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120908

a libovolné

$$\frac{G'(x)}{G(x)} + \frac{a}{x} = o, \; a \geqq o$$

jen reálné kořeny. Takové rovnice jsou na př.

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} + a = o, \quad x \operatorname{tg} x - a = o,$$

$$\frac{\psi'_m(x)}{\psi_m(x)} + \frac{a}{x} = 0, \quad \frac{J'_m(x)}{J_m(x)} + \frac{a}{x} = o, \quad a > o.$$

3. Větu Maloovu lze aplikovat na celistvé funkce rodu o mající kořeny reálné téhož znamení; rod funkce takto vzniklé jest též o. Jenssen (Acta mathematica 1913, pag. 188) připouští možnost aplikace věty Maloovy i pro funkce rodu 1.

K funkcím celistvým rodu 1, majících jen reálné kořeny téhož znamení nelze se blížiti polynomy majícími jen reálné kořeny téhož znamení: nelze tedy tímto způsoben rozhodnouti, lze-li větu Maloovu aplikovati na celistvé funkce rodu 1. Jenssen (Acta mathematica 1913 p. 188) míní, že ano.

4. Větu Schurovu lze aplikovati na funkce rodu o mající kořeny téhož znamení. Funkce tam vzniklá jest rodu o. O funkcích rodu 1 platí totéž, co bylo řečeno v 3.

Poznámka ke kombinacím daného součtu z čísel přirozené řady číselné.

Napsal doc. dr. **Václav Simandl** v Brně.

Uvažujme následující problém kombinatorický. Jest nalézti počet kombinací bez opakování h-té třídy ze všech čísel přirozené řady číselné té vlastnosti, aby součet čísel v těchto kombinacích byl určité číslo této řady m. Tento počet si jako *E. Netto* *) označíme symbolicky následovně:

$$\Gamma^{(h)}. (\int m).$$

*) Viz *E. Netto*: Lehrbuch der Combinatorik. Lipsko 1901, pag. 119 a následující.

Ku stanovení tohoto počtu udal již *Euler**) následující rekurrentní formuli:

$$\Gamma^{(h)}(\int h + m) = \Gamma^{(h-1)}(\int h + m - 1) + \Gamma^{(h)}(\int m)$$

a od této *Eulerovy* formule vyšed, stanovil *Stern* independentní výraz pro $\Gamma^{(h)}(\int m)$. *Stern* dospívá totiž ku své formuli**) ze vztahu:

$$\begin{aligned}\Gamma^{(h)}(\int m) = \Gamma^{(h-1)}(\int m - 1) + \Gamma^{(h-1)}(\int m - h - 1) \\ + \Gamma^{(h-1)}(\int m - 2h - 1) + \ldots,\end{aligned} \tag{A}$$

kterýžto vztah jest patrně důsledkem uvedené rekurrentní formule Eulerovy.

Vidíme pak, že jest

$$\Gamma^{(1)}(\int m) = 1$$

a

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}(\int m) = \Gamma^{(1)}(\int m - 1) + \Gamma^{(1)}(\int m - 3) \\ + \Gamma^{(1)}(\int m - 5) + \ldots\end{aligned}$$

Jelikož pak pro $m = 2\mu$ jest $\Gamma^{(2)}(\int m) = \mu$, rovněž jako při $m = 2\mu + 1$ jest $\Gamma^{(2)}(\int m) = \mu$, ukazuje *Stern*, že lze psáti:

$$\Gamma^{(2)}(\int m) = E\left(\frac{m}{2}\right).$$

Pak formule (A) vede *Sterna* ku výsledku:

$$\Gamma^{(3)}(\int m) = E\left(\frac{m-1}{2}\right) + E\left(\frac{m-4}{2}\right) + E\left(\frac{m-7}{2}\right) + \ldots,$$

což v jiné formě lze psáti

$$\Gamma^{(3)}(\int m) = \sum_{k_1} E\left(\frac{m - 3k_1 - 1}{2}\right),$$

kde

$$k_1 = 0, 1, 2, \ldots E\left(\frac{m-1}{3}\right).$$

A tak dále obecně dospívá *Stern* ku formuli***):

$$\Gamma^{(h)}(\int m) = \sum_k E\left(\tfrac{1}{2}\left[m - h + 2 - 3k_1 - 4k_2 - \ldots - hk_{h-2}\right]\right),$$

kde $$k_\alpha = 0, 1, 2, \ldots E\left(\frac{m - h + 2}{\alpha + 2}\right).$$

*) Ibidem pag. 126.

**) Ibidem pag. 127. *Stern* zmíněným problémem se zabýval v pojednání: „Beiträge zur Combinationslehre und deren Anwendung auf die Theorie der Zahlen." Crellův Journal 21. svazek pag. 91.

***) *E. Netto*: Lehrbuch der Combinatorik. p. 128.

Ukážeme nyní na zjednodušení této formule, které vyplývá z velmi jednoduchého vzorce pro $\Gamma^{(3)}(fm)$, kterýžto vzorec především odvodíme. *)

Položme si v řadě:

$$E\left(\frac{m-1}{2}\right)+E\left(\frac{m-4}{2}\right)+E\left(\frac{m-7}{2}\right)+\ldots$$

Za $(m-1)$ postupně šest hodnot:

$$6k,\ 6k+1,\ 6k+2,\ 6k+3,\ 6k+4,\ 6k+5.$$

Dostáváme pak následujících šest řad:

$$\begin{aligned}
S_0 &= 3k+(3k-2)+(3k-3)+(3k-5)+\ldots+3+1,\\
S_1 &= 3k+(3k-1)+(3k-3)+(3k-4)+\ldots+3+2,\\
S_2 &= (3k+1)+(3k-1)+(3k-2)+(3k-4)+\ldots+2+1,\\
S_3 &= (3k+1)+3k+(3k-2)+(3k-3)\quad+\ldots+3+1,\\
S_4 &= (3k+2)+3k+(3k-1)+(3k-3)\quad+\ldots+3+2,\\
S_5 &= (3k+2)+(3k+1)+(3k-1+(3k-2)+\ldots+2+1.
\end{aligned}$$

Tyto řady, ježto patrně sestávají ze dvou řad arithmetických, můžeme sečísti, dostáváme pak:

$$S_0=3k^2+k,\quad S_1=3k^2+2k,\quad S_2=3k^2+3k+1,$$
$$S_3=3k^2+4k+1,\quad S_4=3k^2+5k+2,\quad S_5=3k^2+6k+3.$$

Dosadíme-li pak do těchto posledních rovnic zase za k postupně šest hodnot:

$$\tfrac{1}{6}(m-1),\ \tfrac{1}{6}(m-2),\ \tfrac{1}{6}(m-3,\ \tfrac{1}{6}(m-4),\ \tfrac{1}{6}(m-5),$$
$$\tfrac{1}{6}(m-6),$$

tu dostáváme:

$$S_0=\tfrac{1}{12}(m^2-1),\quad S_1=\tfrac{1}{12}(m^2-4),\quad S_2=\tfrac{1}{12}(m^2+3),$$
$$S_3=\tfrac{1}{12}(m^2-4),\quad S_4=\tfrac{1}{12}(m^2-1),\quad S_5=\tfrac{1}{12}m^2.$$

Jest pak patrno, že

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ S_5$$

pro hodnoty m, jež se postupně rovná:

$$6k,\ 6k+1,\ 6k+2,\ 6k+3,\ 6k+4,\ 6k+5$$

---

*) V 6. odstavci citovaného zde pojednání zabývá se též *Stern* specielně vzorcem pro počet $\Gamma^{(3)}(Sm)$, dospívá však ku vzorci značně komplikovanému (viz pag. 96 svazku 21. Crellova Journalu).

mají vesměs hodnotu, kterou možno jednotně vyjádřiti:

$$E\left(\frac{m^2+3}{12}\right).$$

Vidíme tedy, že platí vztah:

$$\Gamma^{(3)}(\int m) = E\left(\frac{m^2+3}{12}\right).$$

Dle formule (A) vychází pak pro $\Gamma^{(4)}(\int m)$ řada:

$$\Gamma^{(4)}(\int m) = E\left(\frac{[m-1]^2+3}{12}\right) + E\left(\frac{[m-5]^2+3}{12}\right)$$
$$+ E\left(\frac{[m-9]^2+3}{12}\right) + \ldots,$$

neboli

$$\Gamma^{(4)}(\int m) = \sum_{\mu_1} E\left(\frac{[m-4\mu_1 \quad 1]^2+3}{12}\right),$$

kde μ_1 nabývá patrně hodnot:

$$\mu_1 = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots E\left(\frac{m-1}{4}\right).$$

Applikujeme-li dále formuli (A), tu dostáváme:

$$\Gamma^{(5)}(\int m) = \sum_{\mu_2} \Gamma^{(4)}(\int(m-5\mu_2-1))$$
$$= \sum_{\mu_1\mu_2} E\left(\frac{[m-4\mu_1-5\mu_2-2]^2+3}{12}\right),$$

kde

$$\mu_1 = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots E\left(\frac{m-2}{4}\right),\quad \mu_2 = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots E\left(\frac{m-2}{5}\right).$$

Posléze pak tímto způsobem dospíváme k formuli:

$$\Gamma^{(h)}(\int m) = \sum_{\mu} E\left(\frac{[m-h+3-4\mu_1-5\mu_2-\ldots-h\mu_{h-3}]^2+3}{12}\right)$$

kde

$$\mu_\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots E\left(\frac{m-h+3}{\alpha+3}\right),$$

což jest zjednodušení formule *Sternovy* dříve zde napsané. Zjednodušení to spočívá patrně v tom, že kdežto ve formuli *Sternově* jest koefficientů μ v daném případě pro $\Gamma^{(h)}(\int m)$ celkem $(h-2)$, jest jich při formuli naší o jeden méně, totiž $(h-3)$.

Ukážeme nyní applikací naší formule na speciální případ, vypočtení na př. počtu

$$\Gamma^{(6)}(S\,15),$$

kterýžto počet jest dle formule *Sternovy* stanoven též na str. 128. citované zde knihy *Nettovy* o kombinatorice.

Dle obecné, právě odvozené formule máme patrně:

$$\Gamma^{(6)}\mathcal{f}(15) = \sum_{\mu_1\mu_2\mu_3} E\left(\frac{[12 - 4\mu_1 - 5\mu_2 - 6\mu_3]^2 + 3}{12}\right).$$

kde

$$\mu_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3;\quad \mu_2 = 0,\ 1,\ 2;\quad \mu_3 = 0,\ 1,\ 2.$$

Aby však výraz za symbolem E byl větší než nulla, vidíme, že toliko následujících 6 trojin hodnot (μ_1, μ_2, μ_3) jest přípustno: $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(2, 0, 0)$ a tu jest:

$$\Gamma^{(6)}(\mathcal{f}\,15) = E(\tfrac{147}{12}) + E(\tfrac{39}{12}) + E(\tfrac{52}{12}) + E(\tfrac{67}{12}) + E(\tfrac{12}{12})$$
$$+ E(\tfrac{19}{12}) = 12 + 3 + 4 + 5 + 1 + 1 = 26.$$

Absolutní minimum při odrazu světla.

Napsal **Bohuslav Hostinský.**

1. Světelný paprsek, jenž dospěje ze svítícího bodu A do jiného bodu A' po odrazu na rovinném zrcadle, urazí dráhu AOA', která jest kratší než jakákoliv jiná lomená čára AMA'; O značí bod dopadu a M libovolný jiný bod v zrcadlící rovině.

Tuto známou větu (Fermatův princip) lze rozšířiti pro případ odrazu na křivé ploše; jest však třeba připojiti různá omezení, poněvadž dráha AOA' paprsku není vždy minimální.

V následujících řádcích jest diskutován případ, který nazveme zkrátka odrazem na rovinné křivce z: zrcadlící plocha jest válcová s libovolnou křivkou řídící a paprsky dopadající i odražené jsou obsaženy v rovině kolmé k hranám válcové plochy; průsek plochy s rovinou dopadu jest právě křivka z.

Obyčejnou methodou pro vyhledávání maxim a minim dokazuje se věta: Buďiž M bod pohybující se po dané křivce z; proměnlivá délka lomené čáry AMA' spojující dva pevné body A a A' s bodem M může nabýti minimální hodnoty jen v případě,